

ПРИМЕНЕНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА В МАШИНОСТРОЕНИИ

СБОРНИК СТАТЕЙ

Под редакцией
канд. техн. наук И. Г. ЛЮДКОВСКОГО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «МАШИНОСТРОЕНИЕ»
Москва 1964

В сборнике описывается опыт проектирования и изготовления железобетонных станин прессов и правильно-растяжной машины, базовых деталей металлообрабатывающих станков и других машин; экспериментальные исследования основных узлов железобетонных машин, моделей станин натурных образцов; теоретические исследования и разработка методики расчетов сложных массивных элементов, железобетонных машин, спиральных камер гидротурбин из железобетона.

Кроме изложения теоретических вопросов, в сборнике даны практические приближенные методы и примеры расчета. Для облегчения расчета к сборнику приложены вспомогательные таблицы и графики.

Сборник предназначен для инженерно-технических работников машиностроительных заводов и проектных организаций, а также для научных работников научно-исследовательских институтов.

Сборник написан сотрудниками Лаборатории железобетонных конструкций для машиностроения Научно-исследовательского института бетона и железобетона (НИИЖБ) Госстроя СССР и рекомендован к изданию ученым советом НИИЖБ.

ВВЕДЕНИЕ

Коммунистическая партия Советского Союза и Советское правительство возложили на машиностроителей и строителей решение большой народнохозяйственной задачи — экономии металла при изготовлении машин и станков.

Благодаря применению железобетона в металлоемких конструкциях тяжелого машиностроения можно не только получить большую экономию металла, но и значительно снизить стоимость конструкций, освободить заводы тяжелого машиностроения от изготовления крупногабаритных изделий, обработка и транспортировка которых в ряде случаев представляют большие трудности.

Как известно, машиностроение является основным потребителем металла в виде литья и проката. Около 60% всего проката черных металлов в промышленности расходуется на его нужды. При этом почти $\frac{1}{5}$ часть потребляемого металла идет в отходы при обработке.

Потребности машиностроителей в металле в дальнейшем еще более возрастут.

Решению этой большой народнохозяйственной задачи будет способствовать применение железобетона взамен металла. Одним из самых важных преимуществ применения железобетона является возможность создания более мощного и совершенного оборудования.

В настоящее время для массовых строительных железобетонных конструкций применяются бетоны с пределом прочности 400—500 кг/см^2 . Имеется реальная возможность получения бетонов с пределом прочности 600—800 кг/см^2 . Известны случаи изготовления железобетонных конструкций из бетонов прочностью 1200 кг/см^2 .

Таким образом, прочность бетонов на сжатие составляет $\frac{1}{6}$ — $\frac{1}{4}$ прочности наилучшей стали, из которой изготавливаются основные наиболее напряженные элементы машин.

Резкий скачок в совершенствовании железобетонных конструкций за последние годы достигнут в результате предварительного напряжения, которое стимулировало применение высоких марок

бетона и стали (с пределом прочности от 10 000 до 25 000 кг/см²) и обеспечило создание железобетонных конструкций с большой несущей способностью, длительно сопротивляющихся многократно повторным и ударным нагрузкам.

Проведенные НИИЖБ, ВНИИМЕТМАШем, ЭНИМСом и НИИПТМАШем Донецкого совнархоза исследовательские и экспериментальные работы показали, что железобетон целесообразно применять как в мощных рамах прессов, растяжных машинах и др., так и в слабонапряженных элементах (например, в станинах металлообрабатывающих станков, сечения которых подбираются из условий жесткости). Один кубический метр железобетона может вытеснить в производстве крупногабаритного оборудования прессов и станкостроении от 1 до 2,5 т чугуна или стали. Следовательно, в ряде элементов 1 т металла может быть заменена 1 т железобетона.

Применение железобетона во многих элементах машин может высвободить от 50 до 90% расходуемого металла в «черном» весе (до обработки).

Ввиду того, что в «черном» весе эти детали весят на 20—25%, а в прессах до 60% больше, чем в «чистом» весе, экономия может составлять от 70 до 110% и в отдельных случаях до 160% чистого веса.

В некоторых элементах машин вес арматуры и закладных стальных деталей при железобетонном исполнении меньше, чем отходы при литье и механической обработке при осуществлении аналогичных элементов в металле.

Экономия стоимости достигает 50—70% от стоимости деталей в металле.

Наиболее значительная экономия металла получается при применении железобетона для станин уникальных тяжелых станков, прессов и др., изготовление которых в литых или сварных конструкциях представляет значительные технологические трудности. В этих деталях получается также и наибольшая экономия по стоимости, т. е. в 2—4 раза (табл. 1).

Для серийных станков (табл. 2) и прессов экономия металла в станинах получается в среднем около 60%, а денежных средств — около 40%. Машины в подавляющем большинстве выпускаются в больших сериях, поэтому общая экономия металла при выполнении их в железобетоне может составить значительную величину.

Помимо технико-экономических преимуществ, использование железобетона в тяжелом машиностроении и прессостроении дает значительные производственные и эксплуатационные выгоды. Железобетонные станины и силовые рамы вследствие больших поперечных сечений имеют и значительно большую жесткость, чем стальные и чугунные. Они могут быть выполнены с гораздо большей точностью, чем, например, чугунные, так как усадочные

Таблица 1

Характеристика и технико-экономические показатели станин прессов, разработанных с применением железобетона

Назначение и характеристика пресса	Расход материалов и стоимость при исполнении					Экономия в %	
	в железобетоне			в металле		металла в т	стоимости в тыс. руб.
	Металл в т	Бетон в м³	Стоимость в тыс. руб.	Металл в т	Стоимость в тыс. руб.		
Гидравлический штамповочный, усилием 50 000 т	1000	3500	830	7000	4200	85	80
Обжимной, усилием 800 т	6,1	7,0	2,1	20,0	12,0	69	82
Для заковки полых вагонных осей, усилием 1500 т	30,0	40,0	10,7	100,0	60,0	70	82
Механический штамповочный одностоечный, усилием 100 т	1,0	2,0	0,6	3,2	1,2	68	50
Механический ковочный, усилием 630 т	6,9	10,0	15,0	24,3	18,5	59	30
Испытательный, усилием 8000 т	115	355	110	—	—	—	—
Для изготовления стержней и труб из цветных металлов, Усилием 600 т	6,3	9,5	3,6	15,5	9,3	59	61
Механический кривошипно-шатунный обжимной, усилием 630 т	8,0	16,0	10,0	369	15,8	98	35
Гидравлический штамповочный для изделий из пластмасс, усилием 2000 т	11,1	34,0	14,0	74,0	15,0	85	6,0
Механический кривошипно-шатунный ковочно-штамповочный, усилием 8000 т	52,0	260	49,5	658	256,0	92	87
Гидравлический штамповочный, усилием в т:							
9 600	24,3	42,5	11,0	170	27,1	85	59
10 000	102	250	49	260	62,4	61	21
2 000	136	400	91,6	500	175,0	72	47

деформации чугуна достигают 10 мм/м, а железобетона — 0,15 мм/м, т. е. примерно в 60 раз меньше. При замене литых чугунных станин железобетонными может быть резко сокращен полный цикл их изготовления и значительно снижена трудоемкость производства, что достигается за счет упразднения операции естественного старения металла, а также снижением в 3—5 раз величины припуска на последующую механическую обработку металлических частей.

Так, например, для Коломенского завода тяжелого станкостроения была запроектирована железобетонная поперечина карусельного станка модели «16000» с диаметром планшайбы 20 м.

Таблица 2

Характеристика и технико-экономические показатели по станкам, выполненным с применением железобетона

Типы машин и оборудования	Наимено- вание изделия	Расход материала и стоимость					Экономия в %	
		в железобетоне			в металле			
		Металл в т	Бетон в м³	Стоимость в тыс. руб.	Металл в м³	Стоимость в тыс. руб.	металла	стоимости
Продольно-строгаль- ный станок 7212-Ж Шинорезный станок Круглошлифовальный станок 3А-164 Токарный станок 1660	Станина	4,0	9,0	1,69	13,3	1,74	70	3
		0,2	0,4	0,025	0,9	0,125	75	75
		1,62	1,2	0,394	4,6	0,845	65	53
		7,37	3,92	4,62	16,00	2,94	53,9	36,3

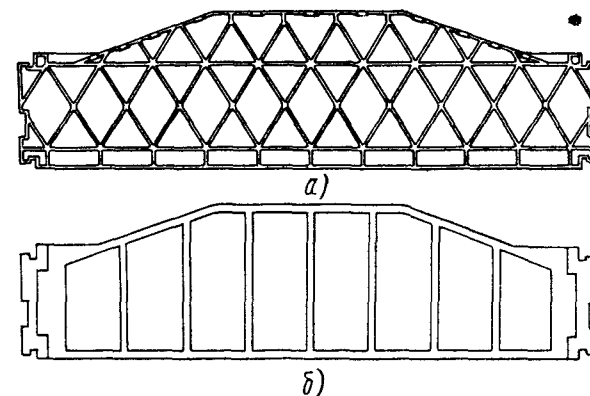
Такая поперечина в чугунном литье изготавливается из четырех частей и весит после обработки в сборе 248 т («черный вес» отливков до обработки 340 т). Таким образом, в отходы идет около 100 т металла. Вследствие больших размеров и веса таких поперечин их очистка от земли и обрубка производятся вручную. Практика показала, что срок изготовления таких элементов в металле колеблется от 1 до 2 лет.

В железобетоне та же деталь весит 193 т. Она требует расхода 80 т металла и стоит на 60% дешевле. Следовательно, при изготовлении поперечины в железобетоне требуется меньше металла, чем его идет в отходы в обычном металлическом исполнении. Такой несложный железобетонный элемент (фиг. 1, а и б) может быть изготовлен в течение двух месяцев.

Важным преимуществом железобетона является также демпфирующая способность этого материала — гашение вибрации (внутреннее поглощение энергии колебания в железобетонных конструкциях примерно в 5 раз выше, чем в стальных).

Как правило, сечения станин металлообрабатывающих станков подбираются исходя из условия обеспечения минимальных деформаций под нагрузкой. При этом прочность материала используется в незначительной степени и не превышает 100 кг/см², а в станинах наиболее распространенных типов станков [токарных, фрезерных, шлифовальных (фиг. 2) и других] составляет 60—80 кг/см². Очевидно, что столь небольшие напряжения могут быть легко восприняты железобетоном обычных марок. При этом следует иметь в виду, что объемный вес обычного тяжелого бетона в 3 раза меньше объемного веса металла, поэтому при неизменном весе станин площадь поперечного сечения должна быть принята

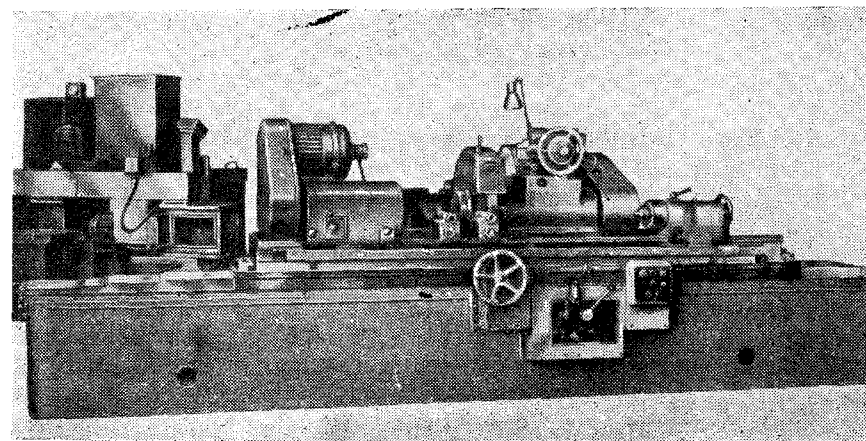
в 3 раза большей. В результате, напряжения в станинах соответственно уменьшаются, а их жесткость должна возрасти, несмотря на то, что модуль упругости бетона меньше, чем у чугуна.



Фиг. 1. Поперечина карусельного станка:

а — в металле; б — в железобетоне.

Расчеты и испытания показали, что жесткость железобетонных станин может быть в 2—3 раза выше, чем чугунных при том же



Фиг. 2. Круглошлифовальный станок.

их весе. Это позволяет применять ускоренные режимы резания керамическими и алмазными резцами, не опасаясь при этом вибрации станков, и увеличить таким образом их производительность. Одновременно может быть повышен и класс точности станков.

Силовые рамы и другие сильно растянутые элементы, а также элементы, воспринимающие значительные изгибающие моменты, необходимо изготавливать из предварительно напряженного железобетона высоких марок, который обеспечивает практически неограниченную долговечность при работе на многократно повторяющиеся нагрузки в связи с однозначностью и малой величиной амплитуды переменных напряжений в бетоне и стали.

Следует отметить, что не только в станинах станков, но даже в металлических станинах мощных прессов, обычно принимаются весьма небольшие напряжения. Так, например, в колоннах прессов, работающих на осевое растяжение, допускаемые напряжения составляют от 500 до 800 кг/см². Но даже и при столь незначительных напряжениях они систематически выходят из строя через $2 \cdot 10^6$ нагружений, главным образом вследствие внутренних пороков в крупногабаритных поковках и прокате.

Аналогичное положение и с гидравлическими цилиндрами, которые, как правило, выдерживают $1,5 \cdot 10^6$ — $2 \cdot 10^6$ циклов.

В металле часто ограничивается возможность использования сталей повышенной прочности. Так, например, исследования ВНИИМЕТМАШа показали, что применение для цилиндров сталей повышенной прочности нецелесообразно, так как при этом не могут быть уменьшены ни вес, ни габариты цилиндра. При уменьшении веса и габаритов снижается жесткость стенок цилиндра, возникают высокие напряжения на смятие в месте опирания цилиндра на поперечины пресса и др.

Эти органические недостатки металлических конструкций отсутствуют в железобетонных, причем предварительно напряженный железобетон делает целесообразным применение сталей самых высоких прочностей, обеспечивая при этом надежную работу при многократной нагрузке. Благодаря указанным преимуществам, из железобетона могут быть выполнены более жесткие, точные и долговечные конструкции станин и других элементов, чем из стали или чугуна.

Наряду с указанными преимуществами следует иметь в виду, что при применении железобетона в базовых деталях машин необходимо учитывать и ряд его существенных недостатков. К их числу относятся продолжительная усадка и ползучесть (которая начинает проявляться в бетоне даже при сравнительно небольших напряжениях), раннее появление трещин в растянутых зонах железобетонных конструкций и др.

В настоящее время имеются средства для частичного или полного их устранения. В частности, например, предварительное напряжение резко повышает трещиностойкость железобетонных конструкций.

В Научно-исследовательском институте бетона и железобетона Госстроя СССР (НИИЖБ) проводятся научно-теоретические и

экспериментальные исследования по изысканию возможностей замены металла железобетоном. Ряд статей, имеющих практическое и научное значение, публикуется в сборнике с целью дать инженерно-техническим работникам-машиностроителям отправные данные для практического внедрения железобетона в машиностроение. Настоящий сборник статей является первой публикацией работ, посвященных применению железобетона в машиностроении.

В публикуемой в сборнике статье Людковского И. Г. «Некоторые основные итоги исследований по применению железобетона в тяжелом машиностроении и прессостроении» указывается возможность резкого повышения предела упругой работы железобетона, а также устранения вредного влияния усадки на сохранение первоначальных размеров железобетонных элементов.

В статье рассматриваются и вопросы изыскания новых конструктивных форм и схем для железобетонных элементов машин и разработка методики их расчета.

При проектировании железобетонных деталей машин конструкторы приспосабливаются к существующим формам, характерным для металла. Новый материал требует создания новых конструктивных форм, что нередко связано с изменением механических частей машин и всегда должно учитываться при проектировании.

Однако, в тех случаях, когда проектировщики отказываются от существующих форм машин и ищут новых путей использования железобетона для изготовления деталей машин, возникают новые конструктивные решения и формы станин и других элементов, для которых не разработаны методы статического расчета.

Массивность элементов в ряде случаев приводит к тому, что методы строительной механики стержневых систем и теории оболочек не могут быть использованы для расчета. Вместе с тем, наличие предварительного напряжения элементов и рациональное конструирование могут обеспечить упругую работу большинства конструкций машин в эксплуатационной стадии. Это открывает возможность для использования при расчете таких конструкций методов линейной теории упругости.

В связи с этим в НИИЖБ ведутся теоретические исследования работы массивных элементов станин, основанные на использовании методов пространственной и плоской задач теории упругости. Кроме того, разработаны практические методы расчета основных конструктивных элементов машин: цилиндрических архитравов в виде сплошных круговых или параболических цилиндров, железобетонных гидравлических цилиндров, массивных железобетонных рам, составленных из прямоугольных элементов и др.

Более детально изучались цилиндрические элементы гидравлических прессов. Это было вызвано тем, что естественной

и статически наиболее целесообразной формой станины гидравлического пресса, работающего на центрально-приложенное усилие штампования, является круговой цилиндр.

Архитравы ряда запроектированных лабораторией станин выполнены в виде сплошных цилиндров, стены (стойки) представляют собой части полых цилиндров. Кроме того, из железобетона может быть выполнен гидравлический цилиндр пресса.

Цилиндрические элементы гидропрессов обычно подвергаются различного рода силовым воздействиям. Среди этих воздействий можно отметить: нагрузку от предварительного напряжения спиральной арматурой, сосредоточенную на небольшой площади, нагрузку от усилия штампования, давление жидкости в гидроцилиндре и др.

Разнообразны не только силовые воздействия на цилиндрические элементы гидропрессов, но и способы их сопряжения между собой, которые могут быть различны: в виде монолитного сопряжения стоек станин с архитравами, контактного сопряжения подштамповых плит с цилиндрическими архитравами и др. Свообразны условия сопряжения стен и днища железобетонного гидравлического цилиндра.

Большое разнообразие как самих элементов цилиндрической формы, так и условий их нагружения и сопряжения привело к необходимости проведения широких теоретических и экспериментальных исследований этих конструкций.

Целью теоретических исследований (см. статью Гохбаума Ф. А.) было, с одной стороны, получить картину напряженного и деформированного состояния каждого из элементов, выяснить наиболее опасные и слабые места конструкций, с другой стороны, — изыскать возможность построения приближенной методики расчета, практически приемлемой для проектировщиков.

Отмеченная выше специфика конструкций, заключающаяся в их массивности, сделала целесообразным применение точных методов решения пространственной задачи теории упругости. В тех случаях, когда условия на краях нельзя было удовлетворить точно, приближенные решения задач строились путем суперпозиций точных решений. Для облегчения практического расчета были протабулированы все основные использованные функции и построены вспомогательные графики.

Цель экспериментальных исследований состояла в оценке прочности цилиндрических элементов при различных воздействиях и условиях закрепления. При этом большое значение придавалось наличию преднапряженной оплетки, которая оказывалась чрезвычайно эффективной (см. статью Браиловского М. И., Астровой Т. И.).

Много интересных задач возникло в связи с разработкой новой и статически чрезвычайно целесообразной конструкции станины гидропресса с внешним расположением арматуры.

Основной проблемой для данной конструкции являлось изыскание оптимальной формы ригеля, который, с одной стороны, должен воспринимать усилие штампования, а с другой, — усилие от преднапряженной внешней арматуры.

Для изыскания наиболее оптимальной формы архитрава криволинейного очертания проводились экспериментальные и теоретические исследования.

Чтобы получить более или менее ясное представление о картине распределения напряжений в архитраве, была разработана приближенная методика расчета конструкции, основанная на использовании уравнения Кастильяно при решении плоской задачи теории упругости (см. статью Хлебного Я. Ф.). Полученные данные сравнивались с экспериментальными (см. статью Окунева Г. Н.), после чего можно было сделать поправки и ввести эмпирические коэффициенты в теоретический расчет, а также выбрать наиболее подходящие аппроксимирующие функции.

В результате экспериментальных и теоретических исследований была выбрана форма архитрава, которая и была принята для изготовления станины пресса. Испытания натурального образца подтвердили правильность предпосылок расчета (см. статью Агаджанова В. И. и др.).

Внедрение железобетона в гидротурбостроение также привело к необходимости постановки и решения ряда проблем, связанных с расчетом сложных по форме конструкций, и прежде всего спиральных камер гидротурбин.

Здесь мы пошли по пути изыскания упрощенной расчетной схемы для того, чтобы предварительно осмыслить работу конструкции. Спиральная камера в виде «улитки» заменялась при расчете полым толстостенным тором. Однако расчет даже такой упрощенной конструкции пока еще труднодоступен, и для дальнейшего упрощения были предложены (см. статью Касабьяна Л. В.) гипотезы об отсутствии касательных напряжений в торе. Это позволило получить предварительные данные для расчета и проектирования модели железобетонной спиральной камеры.

Естественно, что введение таких гипотез нуждается в серьезном теоретическом и экспериментальном обосновании. Поэтому наряду с экспериментальными исследованиями мы параллельно ищем пути для приближенного расчета спиральной камеры другим более строгим методом. Сделаны первые шаги в использовании для этой цели теории Рейснера (см. статью Плотникова Ф. А.).

Статический расчет позволяет лишь определить напряжения и перемещения элементов. Вопросы прочности отдельных конструктивных элементов и железобетонных конструкций машин в целом должны решаться с учетом многократной повторяемости нагрузки, изменения величины предварительного обжатия бетона вследствие явлений усадки, ползучести, релаксации напряжений в арматуре и многих других факторов.

Учет этих факторов, составляющих специфику работы железобетонных конструкций в машиностроении, составил одну из основных задач лаборатории.

В ряде статей сборника подробно рассматриваются вопросы прочности и деформативности бетона и железобетона при многократно повторных нагрузках.

До сих пор для строительных целей на многократно повторные нагрузки в большинстве случаев исследовался ненапряженный бетон марок «400» и ниже, испытания проводились в основном на усталости на базах $2 \cdot 10^6$ циклов, причем определению деформаций уделялось недостаточное внимание.

В машиностроении применяются бетоны марок «500» и выше, как правило, предварительно напряженные. Кроме того, отличие заключается и в том, что они работают на базах 10^7 циклов и более, и абсолютные величины упругих деформаций при этом важны в такой же мере, как и прочность.

С целью ответа на эти вопросы, возникающие в связи с применением железобетона в машиностроении, проведен анализ и статистическая обработка большого экспериментального материала по усталости бетона, накопленного как в СССР, так и за рубежом. Начаты также исследования по изучению влияния длительно приложенных и многократно повторных нагрузок на деформации бетона, в том числе высокопрочного. Имеющийся материал дал возможность, экстраполируя полученные зависимости, сделать рекомендации, расширяющие границы применения существующих норм на область машиностроения.

Так, например, можно считать установленным, что из железобетона могут быть сделаны конструкции, обладающие достаточной выносливостью при любых количествах циклов пульсирующей нагрузки. При увеличении числа циклов нагрузки с $2 \cdot 10^6$ до 10^7 и однозначном цикле нагружения ($q \leq 0,1$) расчетные сопротивления бетонов (по выносливости) должны быть снижены в среднем на 7%.

Если учесть, что при воздействии повторной нагрузки одновременно со снижением прочности бетона происходит рост ее вследствие старения бетона, то результирующее уменьшение прочности, принимаемое в расчетах на выносливость, составляет всего 5—25% при изменении q соответственно от 0,5 до 0,1 и базе $2 \cdot 10^6$ циклов.

Можно считать установленным, что увеличение числа циклов нагрузки слабо влияет на характер упругой работы бетона (фиг. 3). Однако пластические деформации в зависимости от степени напряжения могут составлять 100—150% от величины упругой деформации. По данным многих исследователей известно, что пластические деформации являются функцией марки и состава бетона, величины напряжения, количества циклов нагружения, длительности действия нагрузки, температуры и др.

Учет указанных факторов, влияющих на выносливость и деформации, позволяет давать рекомендации по подбору состава бетона с заданными физико-механическими свойствами.

Следует иметь в виду, что изучение предела выносливости бетона при сжатии и предела выносливости арматуры при растяжении не дает еще ясного представления о совместной их работе в железобетоне, особенно предварительно напряженном.

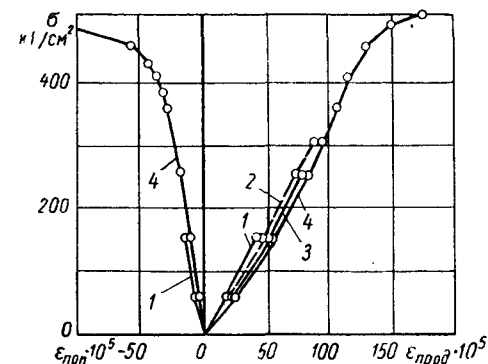
До сих пор выносливость обычных и предварительно напряженных конструкций исследовалась главным образом на простых элементах: однопролетных балках, колоннах и т. п.

Обработка и систематизация многочисленных экспериментов с балками показала, что железобетон, особенно предварительно напряженный, обладает высоким пределом выносливости.

Однако без достаточных теоретических и экспериментальных обоснований эти результаты не могут быть перенесены на сложные, пространственные конструкции. К таким конструкциям относятся станины прессов и других машин, работающие в сложных и неопределенных напряженных состояниях и имеющие значительные концентрации напряжений в многочисленных отверстиях, в местах резкого изменения сечения и др. К тому же, в настоящее время еще отсутствует научно обоснованная и безупречная общая теория деформаций железобетона при различных напряженных состояниях, учитывающая разнообразные режимы нагружений и другие факторы.

Поэтому одновременно с исследованиями прочности и деформативности бетона при многократно повторных нагрузках исследовались на выносливость отдельные железобетонные элементы машин, а также опытные образцы машин: натурные и в моделях. Результаты этих исследований освещены в ряде статей, публикуемых в сборнике.

Важное значение имеют исследования работы железобетона при действии мгновенных нагрузок (многократно повторяющийся



Фиг. 3. Кривые $\sigma - \epsilon$ для призмы с $R_{np} = 500 \text{ кг/см}^2$:

1 — при первом нагружении; 2 — после $2 \cdot 10^6$ циклов пульсации при $K = \frac{\sigma_{\max}}{R_{np}} = 0,6$ и $q = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = 0$; 3 — после $3,29 \cdot 10^6$ циклов пульсации при том же режиме; 4 — после $4,25 \cdot 10^6$ циклов пульсации при том же режиме до разрушения статической нагрузкой.

удар и импульсные нагрузки). В этом направлении ведутся работы, однако они находятся еще в начальном состоянии, поэтому в сборнике не дается их подробное изложение.

Коротко об этих работах можно сказать следующее:

Известно, что в настоящее время еще не разработана теория расчета сложных по форме конструкций на действие ударной волны. Естественно, что это осложняет исследования в почти новой для железобетона области.

Задача усложняется еще и тем, что конструкция должна работать без трещин и значительных деформаций при повторении весьма жестких ударов до 50—60 млн. циклов. Эти обстоятельства осложняли и наши исследования возможности создания из железобетона шабота штамповочного молота.

На первом этапе работы мы не получили данных, которые позволили бы нам рекомендовать изготовление целиком железобетонных шаботов. Однако возможна значительная экономия металла путем уменьшения веса металлического шабота при частичной передаче энергии удара на фундамент. При этом вместо обычной подушки под шаботом должна быть помещена сравнительно жесткая прокладка, а сам фундамент усилен, так как от удара в нем возможны напряжения до 150—200 кг/см².

Такая конструкция была проверена на моделях. При 10—11 млн. ударов по каждому образцу разрушить модели не удалось. На основании проведенных исследований для опытного производства была рекомендована конструкция фундаментов, позволяющая резко уменьшить шабот.

В последнее время в промышленность начали внедряться новые процессы объемного штампования, использующие импульсные нагрузки, т. е. беспрессовое штампование взрывом.

Импульсная нагрузка в этом случае будет воздействовать уже не миллионы раз, а всего несколько десятков, в крайнем случае несколько сотен раз, но скорость ее приложения будет выше, чем для нагрузки, действующей на шаботы молотов.

Беспрессовое штампование взрывом осуществляется в специальных матрицах, где для формовки используется сила взрывной волны.

Изготовление матриц из стального литья встречает большие затруднения, особенно в части точной обработки внутренней поверхности конструкции штампуемого изделия.

Разработаны конструкции железобетонных матриц, и частично испытаны опытные образцы их. Первые испытания дают основание считать, что из железобетона можно создавать качественные матрицы для объемного штампования импульсными нагрузками.

Ряд статей сборника посвящен исследованию вопросов, связанных с конструированием и изготовлением железобетонных элементов машин. В статье Зоммера И. Э. рассматриваются потери

напряжений в многорядной, предварительно напряженной, спиральной арматуре, навиваемой на цилиндрические элементы. Вопросы жесткости креплений к железобетону закладных металлических деталей (направляющих, платиков и др.) рассмотрены в статье Овчинниковой И. Г.

В сборнике также освещаются вопросы применения железобетона в автоклавостроении. Публикуемые материалы могут быть использованы при проектировании химического оборудования, в котором применение железобетона позволит сберечь много дорогостоящей специальной стали, а также ускорить и удешевить его изготовление.

Поскольку сборник в основном рассчитан на машиностроителей, в большинстве еще недостаточно знакомых с железобетоном, в конце сборника приведены краткие сведения о железобетоне и основных его свойствах.

С 1 января 1963 г. введен в действие ГОСТ 9867-61, в котором устанавливается применение Международной системы единиц СИ как предпочтительной во всех областях науки, техники и народного хозяйства.

Ввиду того, что существующие инструкции, нормы и указания по проектированию и расчету железобетонных конструкций, а также Строительные нормы и правила (СН и П) пока еще не переведены в Международную систему единиц, в сборнике оставлена система единиц МКГСС.

При необходимости пересчета железобетонных элементов машин в единицах СИ следует пользоваться табл. 3.

Таблица 3

Соотношение единиц Международной системы СИ с единицами, употребляемыми в тексте

Величина	Единица измерения	Сокращенные обозначения		Размер единицы
		русскими буквами	латинскими буквами	
Момент инерции плоской фигуры	метр в четвертой степени	м ⁴	м ⁴	(1 м ²) · (1 м ²)
Сила	ньютон	н	N	(1 кг) · (1 м/сек ²)
Момент силы, пары сил	ньютон-метр	н · м	N · m	(1 н) · (1 м)
Давление, напряжение	ньютон на квадратный метр	н/м ²	N/м ²	(1 н) : (1 м ²)

И. Г. Людковский

Канд. техн. наук ЛЮДКОВСКИЙ И. Г.

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ИТОГИ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА В ТЯЖЕЛОМ МАШИНОСТРОЕНИИ И ПРЕССОСТРОЕНИИ

Усилиями советских ученых создана современная теория расчета железобетонных конструкций, которая принимается и зарубежными строителями. Теория эта основана на обширном экспериментальном материале; она дает возможность проектировать самые разнообразные строительные конструкции.

Практика доказала, что многие базовые детали, на которые тратятся десятки тысяч тонн металла, могут быть надежно запроектированы из железобетона по действующим в строительстве нормам. Но, в то же время, применение железобетона в машиностроении, т. е. в новых областях с необычными и специфическими для этого материала условиями эксплуатации, новыми формами, повышенными качественными требованиями, естественно требует выполнения теоретических и экспериментальных исследований, которые должны проводиться в следующих трех основных направлениях.

1. Изучение работы бетона и железобетона с учетом специфики его применения в элементах машин.

2. Изыскание новых конструктивных форм и схем для железобетонных элементов машин.

3. Разработка методики расчета, отражающей специфику работы железобетонных элементов машин.

Исследовательские работы во всех трех названных направлениях проводились комплексно, т. е. не всегда расчленялись работы по изучению материала от исследования конструкции и разработки методики расчета.

Изучение работы бетона и железобетона с учетом специфики его применения в элементах машин

Основные требования, предъявляемые к железобетону при его применении в конструкциях большинства машин, заключаются в снижении деформативности, максимальном сохранении перво-

начальных размеров и формы элементов при любых воздействиях: многократно повторные нагрузки с различными скоростями их приложения, изменение режима температурно-влажностной среды и др. Этими требованиями и определяются такие задачи исследования железобетона, как изыскание мер, обеспечивающих неизменяемость во времени первоначальных размеров элементов машин и выявление возможности повышения предела упругой работы¹ и жесткости железобетона при распределенных и местных многократных нагрузках.

Однако для многих железобетонных элементов машин, так же как и для строительных конструкций, несущая способность (прочность) является основным критерием, определяющим необходимые размеры их сечений. Поэтому одновременно с указанными задачами исследовалась также возможность повышения прочности железобетонных, предварительно напряженных, элементов.

Деформации железобетона вследствие усадки. Стабильность работы железобетонных элементов станков определяется в основном двумя факторами: деформациями усадки и жесткостью крепления в бетоне различных металлических закладных деталей, через которые передаются эксплуатационные нагрузки.

Так как напряжения от эксплуатационной нагрузки в станинах станков обычно незначительны, то упругие деформации не являются решающими, и не ограничивают нагрузок.

Усадочные деформации обычного бетона невелики и примерно эквивалентны понижению температуры на 15° С. Они зависят от массивности конструкции, температуры, влажности и других факторов.

Усадка бетона может быть значительно сокращена за счет увеличения плотности бетона, качества заполнителей и цемента. Арматура также ограничивает усадку бетона. На основании имеющихся данных можно считать, что в железобетонных элементах при обычных процентах армирования арматура может уменьшить усадочные деформации бетона до двух раз, причем с увеличением процента армирования усадки уменьшаются.

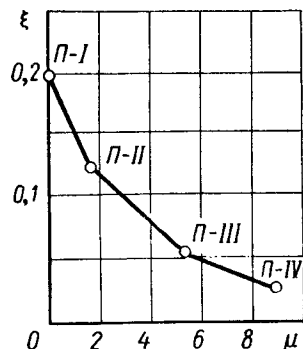
Известно, что коэффициент линейного набухания бетона в несколько раз меньше коэффициента линейной усадки. Однако, несмотря на относительно высокие показатели сохранения стабильности размеров бетонных и железобетонных элементов и наличие серьезных, долговременных исследований в этой области, для машиностроения потребовалось поставить специальные исследования с целью уточнения целого ряда характеристик.

Исследование усадки железобетонных образцов показало, что их усадочные деформации через 3—4 месяца почти прекращаются, поэтому предварительная выдержка железобетонных элементов

¹ Под пределом упругой работы понимается граница, до которой напряжения и деформации материала можно считать связанными линейно.

до их механической обработки на станках может обеспечить большую стабильность размеров. Изменения размеров вследствие набухания бетона и последующего его высушивания при возможных изменениях влажности в производственных зданиях могут происходить в пределах до 10% от полной величины усадки.

Следует отметить, что изоляция поверхности путем окраски или создания металлического кожуха уменьшает усадку, однако не исключает ее. Если усадка неизолированных образцов через 3 месяца прекратилась, то усадка



Фиг. 1. Усадка в бетонных призмах $150 \times 150 \times 1250$ мм в зависимости от процента армирования:

ξ — усадка в мм/м, μ — процент армирования; П-I, П-II, П-III, П-IV — армирование стержнями из стали Ст. 5 периодического профиля.

сечения металлом в значительно большем объеме, чем обычная арматура, что способствует уменьшению усадки. При увеличении процента армирования до 10% усадка уменьшается до 5—7 раз. На графике приведены данные о величинах усадки бетона в призмах $150 \times 150 \times 1250$ мм в зависимости от процента армирования (фиг. 1).

При несимметричном армировании следует опасаться искривления элементов вследствие неравномерной усадки бетона. Чтобы избежать этого, грани, противоположные тем, в которых устанавливаются закладные металлические детали, должны иметь специальную арматуру.

Арматура может применяться также в виде жестких прокатных профилей, при этом усадка бетона не окажет на деформации элементов сколь-нибудь заметного влияния, что было, в частности, подтверждено опытом изготовления клетки прокатного стана.

Предел упругой работы и деформативность предварительно напряженных железобетонных элементов. Как известно, предел упругой работы обычных (ненапряженных) бетонов, примерно

в 2,5—3,5 раза ниже марочной (кубиковой) прочности. В связи с тем, что во многих элементах машин возникают большие сосредоточенные нагрузки, бетоны даже самых высоких марок не могут дать удовлетворительного решения, если при этом не применяются специальные конструктивные мероприятия, увеличивающие предел упругой работы и одновременно предел прочности.

Наиболее эффективным мероприятием, обеспечивающим решение этих задач, является двухосное и трехосное предварительное напряжение железобетонных элементов.

Если всестороннее (трехосное объемное) обжатие трудно создать в обычных металлических конструкциях машин, то в предварительно напряженном железобетоне оно вполне возможно как по конструктивным, так и по технологическим соображениям.

Известно, что при всестороннем сжатии могут быть существенно изменены свойства и технические характеристики материалов. Исследованиями было, например, установлено, что материалы, хрупкие в условиях одноосного напряжения, как например, мрамор и другие, при трехосном сжатии приобретают пластические свойства. При этом резко возрастает их прочность по сравнению с прочностью в обычных условиях (при отсутствии бокового давления). Объясняется это тем, что каменные материалы при сжатии разрушаются от растяжения в поперечном направлении.

Железобетонные элементы, имеющие даже ненапряженную обойму в виде стальной трубы или спиральной арматуры при осевом сжатии, находятся в условиях трехосного напряжения.

Однако элементы с ненапряженной обоймой при высоких напряжениях, которые на них можно передать по условиям прочности, имеют повышенные величины деформаций как продольных, так и поперечных.

Если для обычных бетонов нормальной предельной деформацией при сжатии принято считать $\epsilon_{пр} = 1,5$ о/оо или 1,5 мм пог. м, то экспериментальные исследования железобетонных колонн со спиральной ненапряженной обоймой показали, что они еще имеют значительную прочность на сжатие при укорочениях до 30 мм/пог. м.

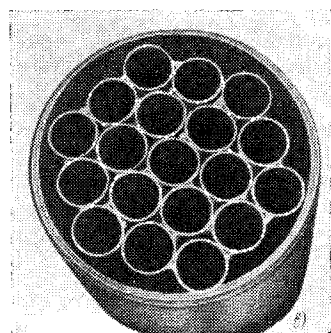
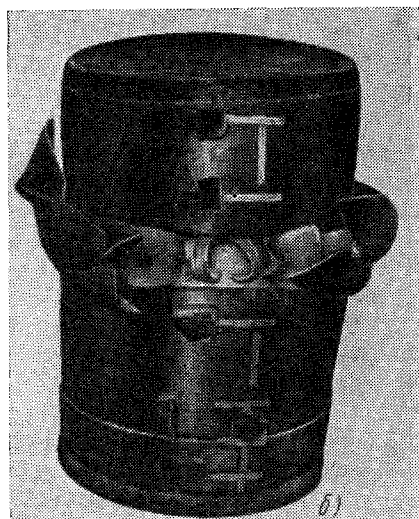
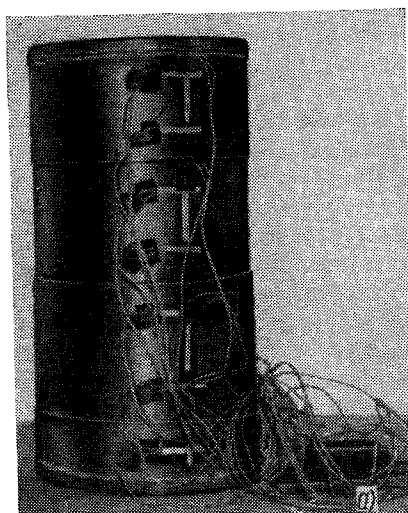
Поэтому бетон в обойме может иметь деформации, в 20 раз превышающие укорочение бетонных призм, не имеющих обоймы при их разрушении.

Если для обычных железобетонных элементов коэффициент поперечного расширения (коэффициент Пуассона) равен $1/6$, то в элементах с ненапряженной обоймой он может достигать до $1/2$.

Тем не менее, исследования показали, что железобетонные цилиндрические элементы с ненапряженной обоймой из стального листа могут найти в машиностроении довольно широкое применение не только для стоек прессов, клеток прокатных станов и других неподвижных элементов различных станков, воспринимающих значительные нагрузки, но также и для подвижных

рабочих элементов, как например, плунжеров, подштамповых блоков и др.

На фиг. 2 показаны опытные образцы трубобетонных элементов. Образцы первого типа имели обойму из листовой стали



Фиг. 2. Модели плунжеров (трубобетон):

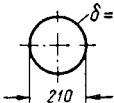
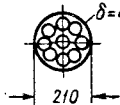
а — внешний вид образца; б — разрушение образца; в — армирование образца.

реchnerного сечения образца. В образцах второго типа за счет трубок площадью 39 см^2 процент армирования был увеличен до 19%. Основные показатели, полученные при их испытании, приведены в табл. 1. Из этих данных видно, что обойма позволяет повысить

марки Ст. 3; второго типа, кроме такой обоймы в средней части, имели и пакет металлических трубок. Наружный диаметр образцов 210 мм, высота 410 см. Кубиковая прочность бетона 318 кг/см^2 . Наружная листовая обойма по высоте образца имела различную толщину, что моделировало одну из конструкций плунжера. Увеличение толщины обоймы у торцов вызвано как конструктивными соображениями, так и желанием увеличить прочность в наиболее сильно напряженном сечении. В среднем сечении толщина была минимальной, и площадь металла обоймы равна $25,1 \text{ см}^2$, что составляло 7,4% от площади попе-

Таблица 1

Основные показатели, полученные при испытании

Эскиз	Характеристика модели		Процент армирования	Результаты испытаний				
	Марка бетона в кг/см ²	Площадь сечения		Начало выпучивания обоймы		В момент разрушения		
		образца		металла	Нагрузка в т	Среднее напряжение в сечении в кг/см ²	Нагрузка в т	Среднее напряжение в сечении в кг/см ²
	318	340	Обойма 25,1	7,4	80	235	460	1350
	318	340	Обойма 25,1 Трубки 39,9	7,4 11,6	200	590	840	2470

прочность образцов в 4,2—7,8 раза (по сравнению с неармированными элементами). Однако, как указывалось, работоспособность элементов, применяемых в машиностроении, определяется часто не их несущей способностью, а пределом упругой работы.

В трубобетонных элементах в обойме стали появляться первые поперечные пластические деформации значительно раньше, чем была исчерпана несущая способность, а именно в образцах первого типа при 80 т и в образцах второго типа при 200 т. Разрушающая нагрузка образцов соответственно была равна 460 и 840 т.

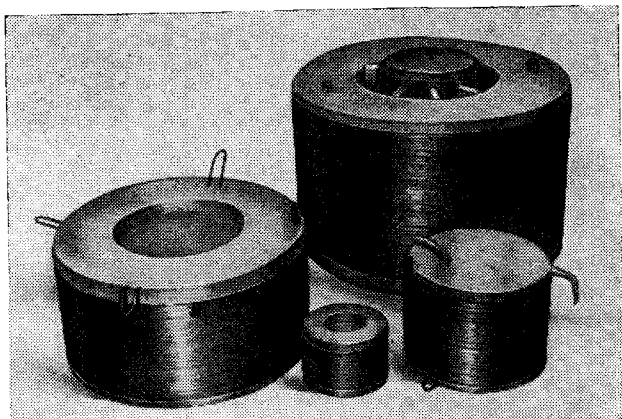
Следовательно, упругая работа этих трубобетонных образцов была в 5,7 и 4,2 раза ниже предела их прочности.

Максимальные величины поперечных относительных деформаций при эксплуатационной нагрузке были получены в моделях плунжера первого типа, они составляли $25 \cdot 10^{-5} D$ модели.

С увеличением мощности обоймы улучшаются все характеристики трубобетонных конструкций (увеличивается их прочность, выносливость и жесткость). Однако бетонные цилиндры, армированные по наружному контуру высокопрочной проволокой, навиваемой на затвердевший бетон с одновременным ее напряжением (спирально армированные предварительно напряженные элементы), работают еще более эффективно (фиг. 3).

При действии эксплуатационных продольных нагрузок бетон и в поперечном направлении остается сжатым за счет предварительного напряжения.

Такое армирование имеет много преимуществ: рационально используются прочностные свойства высокопрочной проволоки; резко увеличивается предел упругой работы при напряжениях, значительно превышающих расчетную призменную прочность



Фиг. 3. Железобетонные цилиндры, армированные предварительно напряженной спиральной обоймой.

бетона соответствующей марки; увеличиваются жесткость и выносливость конструкций, их работоспособность при значительных местных нагрузках и др.

Исследования, например, показали, что бетонные цилиндры, обвитые предварительно напряженной спиральной обоймой, при величине поперечного обжатия бетона до $0,3R_{np}$ работают еще упруго при напряжениях в бетоне $1,3—1,4R_{np}$, в то время как для обычного бетона предел упругой работы примерно равен $0,4R_{np}$.

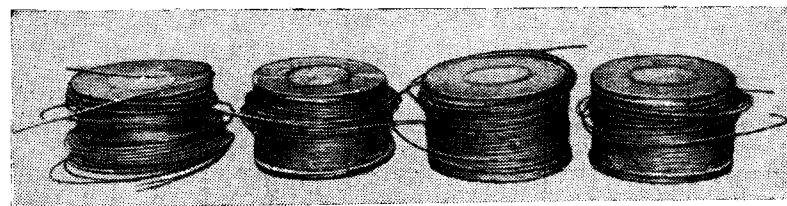
С увеличением поперечного сечения обоймы и величины поперечного обжатия увеличивается прочность образца, а с увеличением прочности растет и абсолютный предел упругой работы.

Полное использование несущей способности таких образцов в конечном счете происходит вследствие разрыва спиральной обоймы (фиг. 4). Следовательно, мощность обоймы и лимитирует их несущую способность. Но, в свою очередь, величина двухосного напряжения, создаваемого спиральной обоймой, ограничивается растягивающими деформациями бетона в продольном направлении. При значительных величинах поперечного обжатия достигается предельная растяжимость бетона и происходят разрывы

образцов на ряд дисков или же образуются трещины при наличии вертикальной арматуры.

Устранить это явление можно путем напряжения образцов в третьем направлении.

Поскольку продольная арматура обжимает образцы непосредственно, а осевые растягивающие деформации от спиральной арматуры возникают в результате поперечного расширения при боковом обжатии, то относительно небольшое продольное напряжение позволяет резко увеличить степень бокового обжатия. Таким образом, несущая способность железобетонных элементов может быть доведена до очень больших величин.



Фиг. 4. Образцы с предварительно напряженной спиральной обоймой после испытания.

При наличии мощной продольной арматуры, что имеет место в трубобетонных элементах, может быть создана и мощная предварительно напряженная обойма без продольного напряжения, т. е. можно ограничиться двухосным предварительным напряжением.

Сочетание трубобетона с напряженной спиральной обоймой позволяет создать элементы большой прочности.

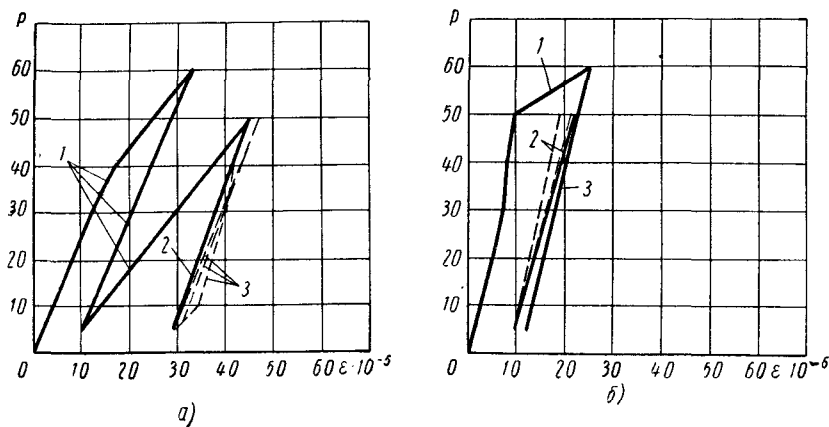
Так, образцы диаметром 200 мм (из бетона марки «400»), имеющие армирование в виде пакета стальных трубок (процент армирования 11,9) и предварительно напряженной спиральной обоймы с боковым обжатием 400 кг/см^2 (равным кубиковой прочности бетона), выдержали многократную нагрузку в 1000 т, при которой средние напряжения в поперечном сечении образцов были 3180 кг/см^2 . До напряжений $1200—1300 \text{ кг/см}^2$ бетон работал упруго. В дальнейшем эти образцы были испытаны до разрушения. К моменту разрушения среднее напряжение в поперечных сечениях образцов было порядка 5000 кг/см^2 .

Имеется практическая возможность поднять величину напряжений от эксплуатационных нагрузок примерно до $4—5R_{np}$. Испытания показали, что при таких соотношениях модуль деформации снижается незначительно.

Двухосно напряженные элементы хорошо работают при опирании их одним торцом на кольцевые основания или отдельные

опоры, что характерно, например, для архитравов цилиндрических прессов. При исследовании установлено, что несущая способность таких элементов в результате двухосного предварительного напряжения резко (в 1,5—2,5 раза) возрастает. С известным приближением можно считать, что до определенных границ их несущая способность прямо пропорциональна величине бокового обжатия.

Испытания на выносливость образцов в ненапряженной обойме и двухосно напряженных образцов цилиндрической формы подтвердили эффективность таких методов армирования.



Фиг. 5. График изменения поперечных и продольных деформаций в трубобетонных элементах при многократно повторных нагрузках:

а — продольные деформации; б — поперечные деформации; 1 — статика; 2 — деформации после $2 \cdot 10^6$ циклов; 3 — деформации после $100 \cdot 10^6$ циклов.

Модель трубобетонного плунжера (см. фиг. 2, а) была испытана на выносливость при $q = 0,125$ и напряжениях в бетоне, близких к пределу выносливости бетона принятой марки.

Произведенными испытаниями установлено, что бетон даже в ненапряженной обойме из стали хорошо сопротивляется многократно повторяющейся нагрузке. После 100 тыс. циклов происходит стабилизация продольных и поперечных деформаций (фиг. 5).

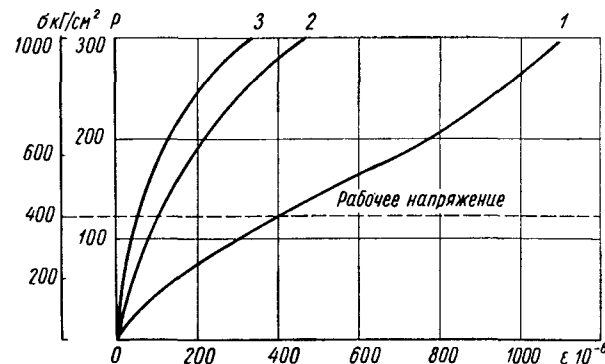
Последующие статические испытания образцов, выдержавших $3,5 \cdot 10^6$ циклов повторений нагрузки, не показали снижения прочности по сравнению с таким же образцами, испытанными только статической нагрузкой.

Выносливость элементов, работающих на центральное сжатие (плунжеры), проверялась также на двухосно напряженных образцах при боковом обжатии обоймой 80 кг/см^2 . Образцы из бетона марки «500» нагружались штампами, площадь которых была в 2 раза меньше площади образца.

Давление под штампом составляло 500 кг/см^2 . Это дало среднее напряжение в бетоне образца 250 кг/см^2 .

После $2 \cdot 10^6$ циклов никаких признаков, которые обычно предшествуют усталостному разрушению, обнаружено не было. Модуль упругости образцов после этих испытаний остался без изменений.

Выносливость двухосно напряженных цилиндрических элементов, работающих на изгиб, проверялась на образцах различной высоты при разных отношениях многократно повторной нагрузки к статической разрушающей и др.



Фиг. 6. Графики поперечных относительных деформаций:

1 — образец без напряженной спиральной обоймы; 2 и 3 — образцы в напряженной спиральной обойме.

Образцы, имеющие высоту, равную 0,2 диаметра, т. е. с наименее выгодными соотношениями размеров, испытывались многократно повторной нагрузкой, равной 0,7 от разрушающей статической нагрузки для аналогичных образцов, и выдерживали без признака разрушения 9,5 млн. циклов нагружения.

Такие же образцы при пульсирующей нагрузке, равной 0,8 от статической разрушающей, и при характеристике цикла напряжений $q = 0,125$ разрушались после $2 \cdot 10^6$ циклов. Характерно, что деформации и напряжения в наружной спиральной предварительно напряженной обойме возрастали лишь при первых 100—200 тыс. нагружений, а затем оставались почти постоянными на всем продолжении испытания.

Несмотря на столь сложное напряженное состояние испытанных конструкций, полученные результаты подтвердили указание строительных норм, согласно которым несущая способность элементов конструкций, работающих на воздействие многократно повторяющейся нагрузки и имеющих армирование в виде спиралей, сеток и колец, а также элементов, подвергаемых местному сжатию, определяется расчетом только на прочность.

Особенно эффективно предварительное напряжение сказывается при работе конструкции на осевое растяжение и при необходимости обеспечения трещиностойкости конструкции. Эти условия предъявляются к конструкциям, работающим на внутреннее давление.

Исследования железобетонных двухосно и объемно-напряженных полых цилиндров доказали их надежную работу при внутреннем давлении до 400 атм.

Рабочее давление в железобетонном двухосно-напряженном цилиндре может примерно в 1,2 раза превышать призменную прочность бетона, а предельное давление, которое приложено к внутренней поверхности железобетонного двухосно-напряженного цилиндра, может примерно в 1,7 раза превышать призменную прочность бетона.

Чтобы увеличить интенсивность поперечного обжатия без опасности возникновения трещин и тем самым увеличить несущую способность полых цилиндров, необходимо трехосное предварительное напряжение, причем как и для сплошных цилиндров укорочение от предварительного напряжения в вертикальном направлении должно быть больше, чем удлинение, возникающее при обжатии элемента в поперечном направлении.

Влияние предварительного напряженной обоймы на увеличение жесткости конструкции особенно наглядно выявляется при сравнении образцов с ненапряженной обоймой и такой же обоймой, но предварительно напряженной. Так, например, при давлении на бетон 600 кг/см^2 поперечные деформации образцов с ненапряженной обоймой имели величину $60\text{--}74 \cdot 10^{-5}$, а у образцов с обоймой того же поперечного сечения, но навитой с напряжением в проволоке $\sigma_d = 7600 \text{ кг/см}^2$, величина поперечных деформаций составляла около $40 \cdot 10^{-5}$, т. е. в 1,5—2 раза меньше (фиг. 6).

Исследование продольных и поперечных деформаций центрально сжатых элементов показало, что коэффициент поперечного расширения в двухосно-напряженных элементах, работающих в упругой стадии, оказывается меньше, чем в ненапряженных, но увеличивается с ростом напряжений и переходом в пластическую стадию работы и может достигать до 0,4—0,5.

При обычных же напряжениях от эксплуатационной нагрузки коэффициент поперечного расширения колеблется в пределах 0,17—0,22, причем с увеличением интенсивности бокового обжатия эта величина уменьшается.

Испытание трех серий образцов из бетона марки «500» при боковом обжатии 0; 80 кг/см^2 ; 275 кг/см^2 показало, что при одинаковых напряжениях от вертикальной нагрузки 400 кг/см^2 продольные деформации для образцов были соответственно равны 1,2 мм/м; 1 мм/м; 0,9 мм/м, а поперечные 0,4 мм/м; 0,22 мм/м; 0,17 мм/м.

Двухосное предварительное напряжение способствует уменьшению как продольных (в 1,34 раза), так особенно и поперечных

деформаций (в 2,35 раза), причем с увеличением интенсивности бокового обжатия деформации уменьшаются.

Приведенные сравнительные данные хотя и получены в результате испытаний элементов с одинаковыми напряжениями, но тем не менее они не характерны, так как относятся к различным стадиям работы образцов под нагрузкой.

Поэтому предварительно напряженные образцы нагружались более интенсивно, а именно до напряжений в 1350 кг/см^2 , что близко к предельным напряжениям для образцов с боковым обжатием 80 кг/см^2 , но не исчерпывало несущей способности образцов с обжатием 275 кг/см^2 .

При этом деформации были соответственно следующие: продольные 6,4 и 5,2 мм/м, а поперечные — 2,0 и 1,4 мм/м. Поэтому при увеличении напряжения в 3,3 раза продольные деформации возросли в 6,4 и 5,8 раза, а поперечные — в 9,8 раза.

Следует отметить, что даже при столь высоких сжимающих напряжениях как 1350 кг/см^2 (что соответствует расчетным напряжениям в наиболее нагруженных стальных элементах машин) поперечные деформации в 1,4 мм/м для многих деталей не выходят за пределы допустимых по эксплуатационным требованиям.

Резкое уменьшение деформации при одновременном возрастании прочности может быть получено при сочетании предварительно напряженной спиральной обоймы из тонкой проволоки с трубобетоном.

Так, при нормальных напряжениях 400 кг/см^2 поперечные деформации имели значение $12,8 \cdot 10^{-5}$.

При исследовании работы железобетонных предварительно напряженных полых цилиндров, рассчитанных на действие внутреннего гидростатического давления, также было выявлено, что коэффициент поперечного расширения является переменной величиной, зависящей от интенсивности предварительного напряжения.

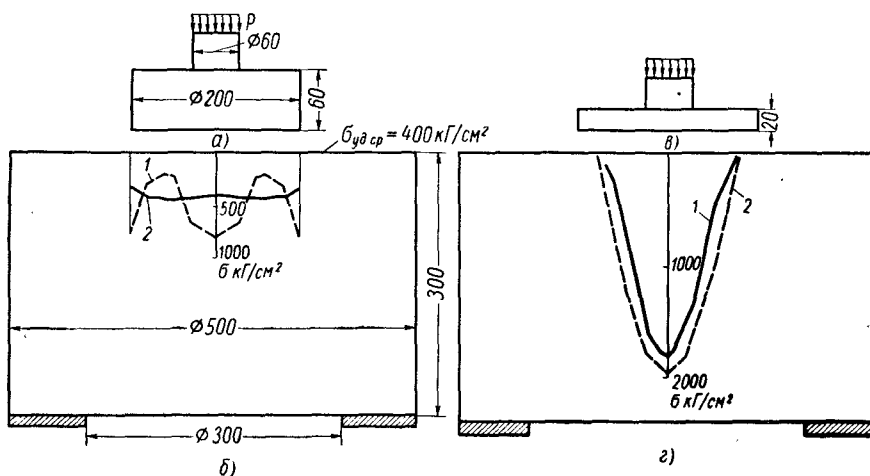
В массивных железобетонных элементах, нагружаемых многократно повторяемыми местными нагрузками, как правило, приходится считать не с общими, а местными деформациями, которые могут повлиять как на общий предел упругой работы элемента, так и на прочность контактирующих (сопрягающихся) между собой элементов, а также на степень точности работы машины.

Известно, например, что в прессах многократно повторяющееся воздействие вызывает изгиб архитрава и подштамповых блоков. В результате в подштамповых блоках прессов со временем образуются чечевицеобразные выработки, снижающие точность штамповки деталей.

Степень износа подштамповых плит в зоне контакта зависит от таких факторов, как соотношение жесткостей и характеристик материалов, контактирующих элементов: распределения

напряжений по поверхности контакта, степени обработки поверхности, частоты циклов повторяющейся нагрузки.

Проведенные исследования показали, что бетон в предварительно напряженной обойме работает как упругий материал в пределах от $2,6R_{np}$ до $5R_{np}$. При больших удельных давлениях по контакту появляются значительные пластические деформации, в результате чего в бетоне под жестким штампом происходит перераспределение усилий, и экспериментальная эпюра (контактных напряжений) приобретает сглаженный характер по сравнению



Фиг. 7. Контактные напряжения под жестким стальным штампом:

а и в — штамп; б и г — цилиндрический образец; 1 — экспериментальная эпюра контактных напряжений σ_z ; 2 — теоретическая эпюра, полученная методом однородных решений.

с теоретической, полученной для упругого материала (фиг. 7, а и б). В средней части контактной площади бетон работает в условиях объемного сжатия под действием внешней нагрузки и реактивного сопротивления обоймы. Это повышает предел упругой работы материала, поэтому для гибких штампов при давлениях, принимаемых при проектировании станин равными $300-400 \text{ кг/см}^2$, характеры теоретической и экспериментальной эпюр совпадают (фиг. 7, в и г).

Проведенные исследования показывают, что для расчетных нагрузок при передаче нагружения через набор подштамповых плит под углом несколько больше 45° в бетоне может быть получено равномерное распределение напряжений.

Что касается истирания бетонной поверхности и влияния двухосного предварительного напряжения на местное смятие, то проведенные экспериментальные исследования показали, что поверхность бетона архитрава, работающего на изгиб, после 3,5 млн.

циклов нагружения с местным давлением 400 кг/см^2 , равным марочной прочности бетона, оставалась в месте контакта с металлическим штампом неповрежденной и никаких признаков истирания не было обнаружено. Общая остаточная деформация смятия бетона по контуру штампа возникала при первом статическом нагружении и в дальнейшем не увеличивалась. Она составляла около $0,6 \text{ мм}$.

При испытании на сжатие трубобетонных образцов $\mu = 12\%$, заполненных бетоном марки «300» при среднем напряжении 477 кг/см^2 отмечены деформации $0,18 \text{ мм}$, а в образцах, имевших дополнительную преднапряженную обойму $\mu = 13\%$, эти деформации составляли всего $0,03 \text{ мм}$.

Следовательно, смятие контактной поверхности существенно уменьшается при наличии бокового обжатия по сравнению с необжатым бетоном.

Экспериментальные исследования показали также, что в зависимости от жесткости штампа резко меняется характер деформированной поверхности бетона под штампом.

Например, в образце из бетона марки «300» при боковом обжатии 40 кг/см^2 , напряжении 400 кг/см^2 для жесткого штампа с площадью, равной площади образца, деформации в теле бетона под поверхностью штампа по краям составили $8 \cdot 10^{-3}$, а средние — не превышали $2 \cdot 10^{-3}$.

Изыскание новых конструктивных форм и схем для железобетонных элементов машин

При проектировании первых железобетонных элементов машин, в связи с отсутствием опыта, естественно копировались традиционные формы, что для нового материала не дает оптимального решения.

Из железобетона, поскольку он формуется из подвижной (при вибрировании) смеси, можно получить изделия любых форм; при этом снимаются и ограничения в отношении размеров и весов элементов. Следовательно, при применении железобетона технологические факторы накладывают меньшие ограничения на формообразование и мощность оборудования, чем, например, при изготовлении металлических станин из прокатного металла. С другой стороны, особенности железобетона: хорошая работа бетона на сжатие и значительно меньшая его сопротивляемость растяжению накладывают специфические требования на армирование и конструктивные формы.

Вопросы выбора оптимальной формы наиболее просто решаются в случаях, когда сечение железобетонных элементов назначается из условий жесткости или по конструктивным соображениям, как, например, в станкостроении.

В этих случаях определяющими факторами должны являться жесткость конструкции, технологичность ее изготовления, вес,

простота обработки, надежность крепления закладных деталей. В таких малонапряженных элементах следует стремиться к наиболее простым формам сечений.

В элементах конструкций, воспринимающих большие многократно повторные нагрузки, как, например, в станинах прессов, вопросы выбора рациональной формы решаются сложнее, так как при этом требуется применять предварительное напряжение.

Во время исследования целесообразности создания гаммы тяжелых и средних прессов с применением железобетона, а также проектирования и изготовления первых опытных образцов прессов, клетей прокатных станов и других станин, воспринимающих значительные эксплуатационные усилия, были рассмотрены, запроектированы и частично испытаны станины разнообразных форм, которые определялись главным образом назначением машин.

Все изгибаемые и растянутые элементы станин проектировались предварительно напряженными, причем обязательным условием для всех элементов было отсутствие трещин в бетоне при эксплуатационных нагрузках.

Это основное требование диктовалось известным выводом о том, что предварительно напряженные конструкции (изгибаемые или центрально растянутые) могут выдержать неограниченно большое число нагружений, если многократно повторяющаяся нагрузка меньше нагрузки, вызывающей появление трещин, а также требованием проектировать станины максимальной жесткости.

Так как элементы конструкции машин подвергаются во время эксплуатации многократно повторным нагрузкам с большим числом циклов и при этом допускаются небольшие деформации, то выносливость и жесткость имеют первостепенное значение.

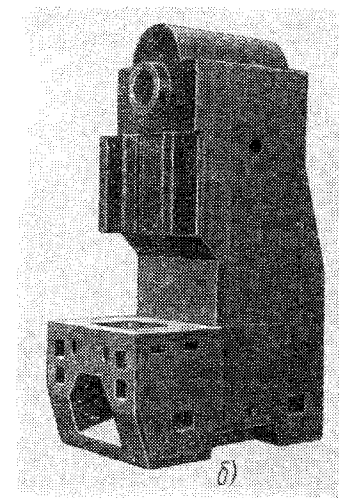
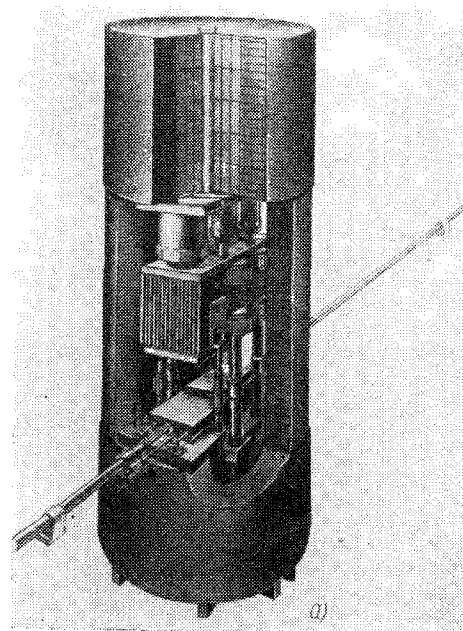
На фиг. 8—14 показаны некоторые осуществленные или запроектированные железобетонные прессы и клеть прокатного стана, выполненные в соответствии с этими требованиями. Технико-экономическими исследованиями были охвачены все прессы, выпускаемые нашей промышленностью. Из всей номенклатуры выпускаемых прессов были отобраны наиболее характерные представители. Для них разрабатывались эскизные проекты с применением железобетона, которые затем сравнивались с аналогичными осуществляемыми в практике проектами (в металлическом исполнении).

В результате проведенного анализа были сделаны выводы о целесообразности применения железобетона для всей гаммы прессов. В табл. 1 «Введения» приведены результаты сравнения стальных и железобетонных станин. В среднем в железобетонных станинах, по сравнению со стальными, расход металла снижается в 2,5—4 раза.

Рациональная работа двухосно напряженных железобетонных цилиндрических элементов, при различных и сложных видах воздействия дает возможность запроектировать и осуществлять ряд

железобетонных трубчатых прессов, в которых все базовые детали (станины, цилиндр, плунжер) или только станина могут быть выполнены с их применением.

Характерным представителем трубчатых прессов, в котором все элементы выполнены с применением железобетона, может служить испытательный пресс усилием 8000 т. Станина пресса представляет собой трубу высотой 20,4 м с толстыми днищами-архитравами. Наружный диаметр цилиндра 6,3 м, внутренний — 4,3 м.



Фиг. 8. Прессы:
а — 50 000 т; б — 100 т.

В нижнее днище встроен железобетонный цилиндр, внутри которого перемещается железобетонный плунжер.

В стенке цилиндрической станины сделаны два симметрично расположенных выреза, образующих проемы пресса шириной 2,8 м и высотой 9,2 м. Станина армирована вертикальной и кольцевой предварительно напряженной арматурой. Кроме того, имеется ненапряженная арматура в виде сварных сеток и каркасов. Архитравы станины предварительно напряжены по периметру сплошными обоями из высокопрочной проволоки диаметром 5 мм.

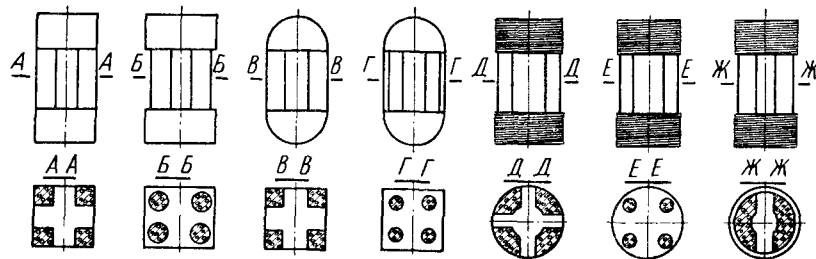
Цилиндр состоит из стальной рубашки толщиной 60 мм и железобетонных стен и днища, воспринимающих полную нагрузку.

Стальная рубашка обеспечивает герметичность цилиндра и создает условия для правильного перемещения плунжера.

Плунжер представляет собой сплошной железобетонный элемент, обжатый спиральной предварительно напряженной проволокой, который вставляется в стальной кожух, после чего кольцевой зазор между ними заполняется бетоном.

Двухосное напряжение архитравов непрерывной спиральной арматурой целесообразно и при опирании их в отдельных точках, а также не только при круглом, но и ином их очертании в плане, например эллиптическом.

В тех случаях, когда по технологическим требованиям эксплуатации пресса рабочие проемы необходимы в двух взаимно перпендикулярных направлениях, цилиндрические архитравы могут опи-



Фиг. 9. Варианты конструкций станин.

раться на четыре опоры. Такая схема принята, например, для четырехколонного пресса модели 4632 УЗТМ усилием 10 000 т.

Колонны пресса рационально выполнять трубобетонными или с напрягаемой кольцевой арматурой.

Такие станины могут быть применены для разнообразных по условиям работы машин. С их применением были, например, разработаны клетки ряда прокатных станов, в том числе клетки для прокатных станов 4200.

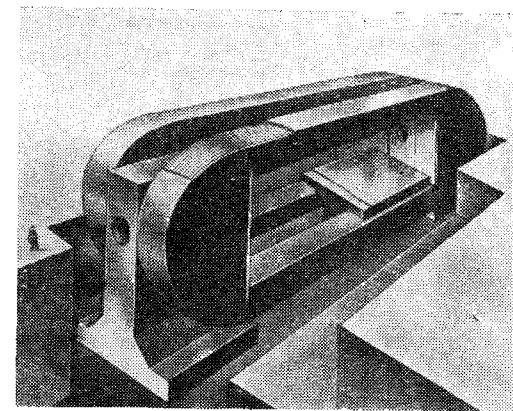
Целесообразная конструкция станин различного назначения (прессы, клетки прокатных станов и др.) получается в случае двухосно или объемно-напряженных железобетонных рам с ригелями в виде дисков ломаного или криволинейного очертания. Арматура располагается снаружи рамы в виде оплетки из высокопрочной тонкой проволоки или из толстых стержней, огибающих криволинейное или ломаное очертание ригелей.

Станины с такими ригелями, так же как и трубчатые станины, рациональны при широком диапазоне изменения нагрузок. В сборнике приведены данные, показывающие целесообразность такой конструкции для пресса усилием 600 т. Аналогичная конструкция была разработана и для других самых различных прессов. На фиг. 10 показан горизонтальный пресс для изготовления труб диаметром до 3000 мм усилием 50 000 т, запроектированный с такой станией.

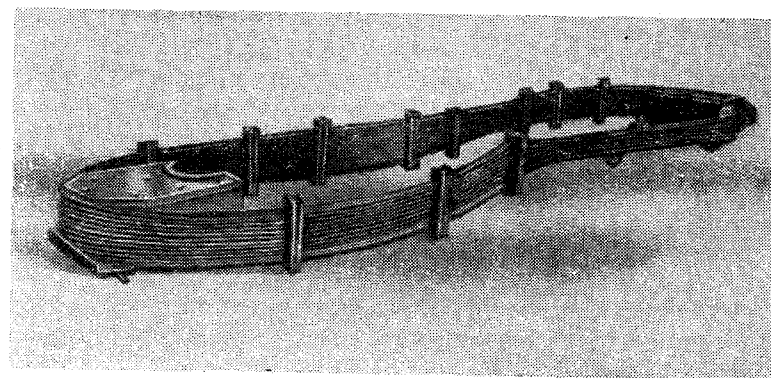
Одним из наиболее важных вопросов при проектировании и изготовлении станин с криволинейным очертанием ригелей является вопрос создания предварительного напряжения станины внешней арматурой.

Это предварительное напряжение можно выполнить специальной машиной, либо при помощи самого пресса.

При предварительном напряжении арматуры станины с помощью специальных машин максимально устраняются потери напряжения за счет трения. в результате чего ригель станины обжимается более равномерно, чем при напряжении арматуры самим прессом, так как при этом трение существенно снижает эффект предварительного напряжения. Уменьшить потери напряжения за счет трения можно путем применения вибрирования при обжатии.



Фиг. 10. Силовая рама горизонтального пресса усилием 50 000 т.

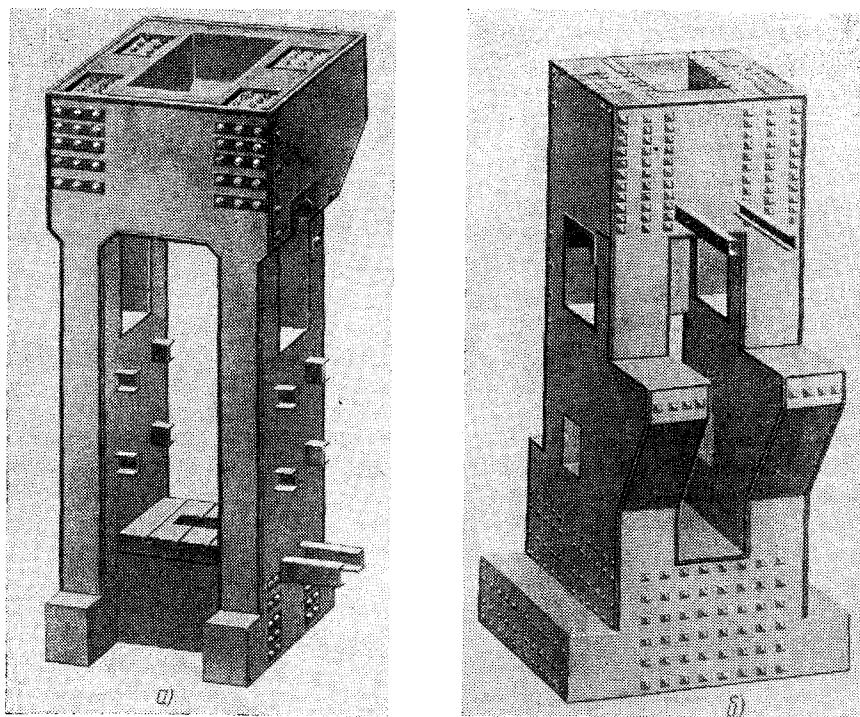


Фиг. 11. Мощный непрерывный арматурный пучок.

Следует указать, что большой радиус закругления проволоки и большая их длина обеспечивают надежную совместную работу проволок. Это подтвердилось, в частности, при испытании двух пучков, имеющих по торцам диски цилиндрической формы с радиусом закругления 250 мм (фиг. 11).

Длина пучков составляла 5000 и 7000 мм. Пучки состояли из четырех сплошных рядов проволоки диаметром 4,5 мм с пределом прочности 12 000—17 000 кг/см².

Теоретическое разрывное усилие определялось на основании фактических результатов испытаний отдельных образцов проволоки на разрыв.



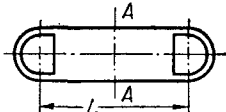
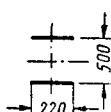
Фиг. 12. Силовые рамы прямоугольной формы ковочно-штамповочных прессов: а — станина усилием 630 т; б — усилием 8000 т.

В результате испытания было установлено фактическое разрывное усилие пучков, их удлинение, а также характер разрушения каждого пучка (табл. 2).

Проведенные испытания показали, что принятая конструкция непрерывного пучка обеспечивает надежную работу арматуры. Криволинейные диски при испытании не показали признаков разрушения. Бетонная опорная поверхность выдержала значительные сжимающие напряжения от четырех рядов проволоки, причем деформации смятия оказались небольшими.

Для некоторых силовых рам целесообразна и прямоугольная форма (фиг. 12, а и б). Однако такое решение имеет и недостатки.

Результат испытания мощных арматурных непрерывных пучков

Тип пучка	Схема пучка	Поперечное сечение пучка (размеры в мм)	Длина пучка в м	Количество проволок в сечении в шт.	Теоретическое разрывное усилие	Фактическое разрывное усилие	Коэффициент использования
					в т		
ПН-1			5000	320	860	746	0,87
ПН-2			7000	272	621	581	0,93

Так, например, при этом сложно создать двух- и трехосное предварительное напряжение, так как при небольших длинах стержней происходят значительные потери, что снижает эффект обжатия. Для таких конструкций может применяться только стержневая арматура, в то время как в станинах трубчатых прессов, а также в станинах с криволинейными ригелями в качестве предварительно напряженной арматуры применяется высокопрочная проволока, предел прочности которой примерно в 2 раза выше, чем у стержневой арматуры. При этом она навивается с помощью машин с меньшими трудозатратами и меньшими потерями.

О конструкциях железобетонных гидравлических цилиндров и плунжеров. Как указывалось выше, железобетонные гидравлические цилиндры могут быть встроенными в станины прессов, или в виде отдельных элементов, причем они могут быть как монолитно связанными с днищами, так и отрезанными от них.

На основе проведенных экспериментальных и теоретических исследований и проектных проработок разработана конструкция сборного железобетонного двухслойного гидравлического цилиндра, состоящего из трех основных элементов: железобетонных предварительно напряженных стен, железобетонного днища и внутреннего стального тонкостенного цилиндра. В данном случае его сечение назначается по расчету, и он воспринимает часть рабочего давления. В результате достигается не только большая экономия металла (в 2—4 раза), но увеличивается работоспособность цилиндров, так как при совместной работе с железобетоном резко уменьшаются перепад и концентрация напряжений в стальном цилиндре, что обеспечивает его большую долговечность.

Такая составная конструкция цилиндра имеет ряд преимуществ перед цилиндрами, монолитно соединенными с днищем.

Например, в монолитных цилиндрах при навивке напряженной спиральной арматуры может произойти скалывание стенок цилиндра по линии сопряжения с днищем вследствие разных жесткостей этих элементов. В составных цилиндрах эта опасность устраняется, так как навивка напряженной арматуры может осуществляться раздельно. Однако последующее соединение стенок и днища цилиндра с помощью предварительно напряженной вертикальной арматуры обеспечивает их совместную работу без нежелательных концентраций напряжений.

Для предварительного назначения толщин стен и днища стального и железобетонного цилиндра можно рекомендовать следующие соотношения: толщину стенки стального цилиндра принимать $\delta_1 = 0,065d$, толщину днища $h_1 = 1,5\delta_1$. Для железобетонного цилиндра толщина стенок может быть ориентировочно назначена $\delta = 0,65d$, а толщина днища $1,2d$ (d — внутренний диаметр стального цилиндра).

Что касается конструкции плунжера, то в зависимости от напряжений они могут быть как трубобетонными (см. фиг. 2, в), так и в виде двухосно предварительно напряженных элементов (см. фиг. 4).

Наиболее прочная и жесткая конструкция плунжера получается при сочетании этих двух видов армирования. Для плунжеров такой конструкции расчетные напряжения могут превышать 1000—1200 кг/см^2 .

О жесткости железобетонных станин. Проведенные исследования моделей и натуральных образцов прессов показали, что железобетонные предварительно напряженные станины значительно жестче аналогичных стальных. Объясняется это тем, что они имеют большее поперечное сечение элементов и незначительную величину перепада напряжений.

В предварительно напряженных железобетонных силовых рамах прессов при действии многократно повторяющейся нагрузки достигается однозначность напряжений в бетоне и стали, причем амплитуда изменения напряжения в стали незначительна.

Расчеты и исследования показали, что, например, напряжения в вертикальной арматуре станины, воспринимающей все усилия, создаваемые прессом, изменяются на 400—600 кг/см^2 , т. е. незначительно по сравнению с пределом прочности арматурной стали (10 000—20 000 кг/см^2). В металлических конструкциях пресса этот перепад был бы примерно в 2—3 раза больше, а следовательно, соответственно были бы больше и деформации.

Перепад напряжений в арматуре всего на 5—10% гарантирует большую выносливость железобетонных прессов. По действующим нормам при характеристиках цикла напряжений в арматуре $\rho = 0,9 \div 0,95$ расчетные сопротивления при расчете на выносливость можно принимать такими же, как и при расчете на прочность, т. е. при действии статической нагрузки.

Силовые рамы прессов, прокатных станов и другие работают в сложных напряженных состояниях и представляют собой массивные элементы, трудно поддающиеся расчету, поэтому потребовалось проведение значительных экспериментальных работ по определению действительных условий работы элементов железобетонных рам и их жесткости. Как известно, она зависит не только от жесткостей отдельных элементов, но и от деформативности, соединений, режимов загрузки и др.

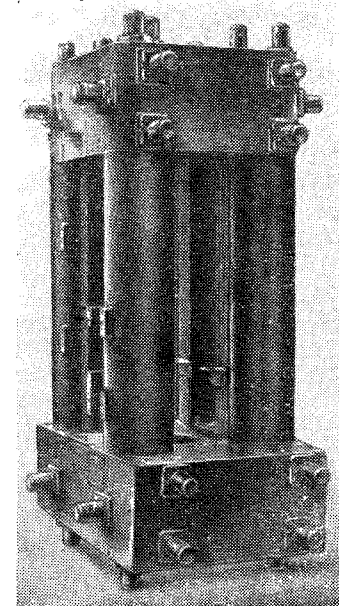
Проведенные испытания показали очень хорошее совпадение теоретически определенных деформаций с фактически полученными при эксперименте. В качестве примера высокой прочности и малой деформативности железобетонных станин могут служить результаты испытаний клеток прокатных станов.

При проектировании клетки прокатного стана было поставлено условие, чтобы при эксплуатации клетки упругие деформации не превышали 90 мк . Следует отметить, что в строительных конструкциях ранее не ставились задачи по созданию конструкций, размеры деформаций которых при эксплуатации измерялись бы с такой точностью и изменялись на такую величину. Опытная клетка (фиг. 13) первоначально была испытана статической нагрузкой. При этом, в основном, интересовались величинами упругих деформаций. Экспериментальные исследования показали, что расхождения между фактически полученными деформациями и расчетными находятся в пределах 5—16%. По расчету упругая деформация между опорами подушки станины получалась равной 88 мк , а фактически — 80 мк .

Затем эта клетка подвергалась испытанию многократно повторной нагрузкой 18 млн. циклов.

В результате этих испытаний установлено, что упругая деформация между опытными подушками станины практически не изменялась, а остаточная составила 0,078 мм , или 78 мк ¹.

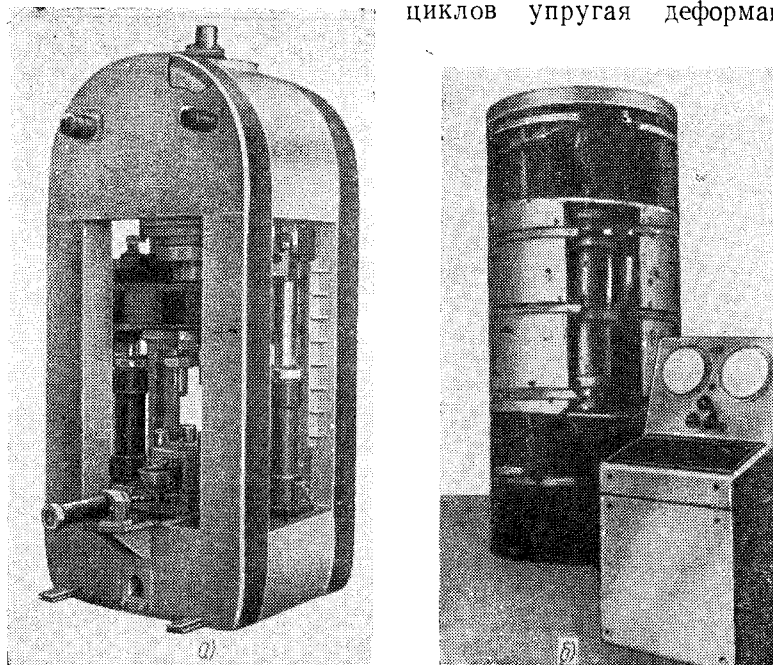
¹ Остаточные деформации не лимитируются. В клетках прокатных станов они компенсируются нажимными устройствами валков.



Фиг. 13. Клетка прокатного стана «Кварто 200».

Аналогичная картина получалась и при испытании модели железобетонной клетки для прокатных станов 4200, армированной не стержневой арматурой, как клеть стана «Кварто», а проволоочной.

Модель клетки с внутренней высотой 800 мм была испытана повторной нагрузкой до $5 \cdot 10^6$ циклов. Эти испытания показали, что уже после 500 тыс. нагружений упругие деформации стабилизировались, причем после $5 \cdot 10^6$ циклов упругая деформация



Фиг. 14. Станины прессов:
а и б — усилием 600 т.

станины составляла 85 мк. Упругая деформация от кратковременной статической нагрузки была равной 66 мк.

Остаточная деформация после $5 \cdot 10^6$ циклов нагружений составила 48 мк, при этом намечались тенденции к стабилизации деформаций.

Испытание железобетонной станины пресса усилием 600 т (фиг. 14, а) с колоннами высотой 3,1 м и двумя ригелями с расчетным пролетом 1,7 м при нагрузке 780 т, превышающей на 30% эксплуатационное усилие, показало, что упругая деформация колонн составляет 0,6 мм и ригелей 0,3 мм. Удельные деформации, отнесенные на 1 м высоты колонны, равны 200 мк, а отношение

упругой деформации ригелей к расчетному пролету составляет 1/7000. В металлических прессах эти отношения составляют обычно 1/1000—1/1250.

Испытание цилиндрической станины пресса такой же мощности (фиг. 14, б), имеющей следующие размеры: высота 2,80 м, расчетный пролет архитрава 0,61 м, показало, что при нагрузке 600 т полная деформация станины равнялась 0,29 мм, а прогиб наружной поверхности верхнего архитрава равнялся примерно 0,07 мм, что составляет 1/8500 часть от расчетного пролета.

Из этих данных видно, что станины различных железобетонных конструкций достаточно жестки и, следовательно, могут быть применены как в случаях, когда требуется воспринять большие растягивающие усилия, так и при необходимости обеспечить большую точность в работе машин.

Стабильность и точность работы машин зависит не только от общей жесткости железобетонных станин, но также и от жесткости крепления закладных металлических деталей. В большинстве случаев закладные детали подвергаются механической обработке, при которой на них действуют значительно более невыгодные сочетания нагрузок, чем в период нормальной эксплуатации.

Жесткость крепления закладных деталей может быть обеспечена различными конструктивными мероприятиями, применением специальных типов анкеров. Закладные детали могут быть также предварительно соединены с жесткими арматурными каркасами и др.

Однако и обычная заделка стержневых анкеров в бетон может в большинстве случаев обеспечить достаточную жесткость крепления.

Проведенные исследования показали, что перемещение закладных деталей в бетоне зависит от вида и величины силового воздействия, конструкции анкеров, их профиля и диаметра, а также и состава бетона. Так, например, опыты показали, что напряжения при начале скольжения арматуры периодического профиля были в 5,5 раз выше, чем у гладких стержней того же диаметра и той же длины.

Способы расчета прочности и жесткости крепления металлических деталей к бетону при разных видах силовых воздействий разрабатываются эмпирическим путем с учетом влияния указанных факторов.

Наряду с анкерами, закладываемыми в бетон до бетонирования, широкое распространение могут получить крепления различных закладных деталей к бетону посредством самозанкеривающихся болтов. Такие болты вставляются в круглое отверстие, выполненное в бетоне: при навинчивании гайки коническая головка болта развальцовывает заклинивающую трубку, имеющую на конце вертикальные прорези, и вдавливая ее в стенки отверстия. С наружной стороны трубка для лучшего сцепления

с бетоном нарезается. Опыты показали, что при глубине заделки таких болтов в бетон, равной всего 5—6 диаметрам болтов, прочность анкеровки превышает расчетные усилия на болты из стали марки Ст. 3 при растяжении и срезе. Так, например, болты диаметром 20 мм из стали марки Ст. 3, заделанные на глубину 100 мм, при выдергивании выдерживали усилия в 4000 кг и на срез 2500 кг, при соответствующих расчетных усилиях на болт 3590 кг и 2460 кг.

При незначительном дополнительном увеличении глубины заделки болтов марка стали может быть принята повышенной; следовательно, могут быть увеличены и усилия на болты. Сверление отверстий осуществляется при помощи пневматических бурильных молотков, как обычными сверлами, усиленными в режущей части победитовыми пластинами, так и инструментом с алмазными коронками.

Применение самозанкеривающихся болтов позволяет точно и надежно осуществлять крепление к бетону предварительно обработанных металлических деталей. В этом случае железобетонные элементы могут в собранном виде и не подвергаться обработке на станках. Естественно, что при этом усилия в анкерах будут значительно меньшими, так как они должны соответствовать лишь эксплуатационным нагрузкам.

Попутно отметим, что различные металлические детали, не несущие нагрузки, например предназначенные для крепления разводок, могут крепиться к бетону специальными дюбелями, загоняемыми в бетон с помощью особого пистолета.

О методах расчета железобетонных конструкций для машиностроения

Расчет строительных конструкций, в том числе железобетонных, в соответствии с действующими нормативными документами производится по трем расчетным предельным состояниям:

- 1) несущей способности (по прочности, устойчивости и выносливости);
- 2) деформациям (в основном лимитируются прогибы изгибаемых элементов);
- 3) местным повреждениям (образование или раскрытие трещин и др.).

Специфические эксплуатационные требования, предъявляемые к железобетонным элементам машин, выражаются в том, что расчет по несущей способности, как правило, должен строиться исходя из возможности усталостного разрушения конструкций.

В машиностроении предельное состояние по деформациям является основным — ограничивающим нормальную эксплуатацию элементов машин. Для многих несущих элементов машин до сих пор еще не установлены и не нормированы деформации, до-

стижение которых следует рассматривать как предельное состояние. Нормирование деформаций определяется эксплуатационными требованиями и не зависит от материала. Установление обоснованных норм упругих и остаточных деформаций является актуальной задачей для всех видов конструкций машин.

В качестве значений предельных деформаций железобетонных конструкций в случае, когда они не ограничиваются специальными эксплуатационными требованиями, может быть принят предел их упругой работы.

Предельным состоянием по местным повреждениям для строительных железобетонных конструкций считается появление или раскрытие трещин. В железобетонных конструкциях машиностроения образование трещин должно рассматриваться как предельное состояние также исходя из их влияния на выносливость, упругую работу и деформативность железобетонных базовых деталей машин.

Сами по себе они, как правило, не могут ограничить эксплуатацию машин. Так, например, железобетонные цилиндры гидравлических прессов, спиральные камеры высоконапорных гидротурбин и другие элементы, работоспособность которых зависит от герметичности, имеют металлические тонколистовые внутренние слои, обеспечивающие водонепроницаемость при высоких рабочих давлениях, поэтому образование в них трещин не приводит к потере напора.

В качестве предельных состояний по местным повреждениям в машиностроении могут быть и нарушение анкеровки закладных деталей, смятие или выработка в зоне контакта и др.

Разработка методики расчета железобетонных конструкций для машиностроения усложняется следующими обстоятельствами.

1. Многие элементы станков, и в первую очередь их станины, проектируются без расчета, так как отсутствуют данные о величинах действующих нагрузок. Отсутствуют также многие нормативные документы по расчету и конструированию базовых деталей.

Расчет производится только для наиболее напряженных деталей, причем сечения подбираются по допускаемым напряжениям.

В машиностроении в основном приняты эмпирический и индивидуальный подходы к проектированию.

2. Для многих элементов конструкций, даже в тех случаях, когда внешние нагрузки могут быть известны, весьма затруднительно определение возникающих в опасных сечениях внутренних усилий, в связи со сложностью формы и статической неопределимостью системы.

3. В машиностроении не известны схемы действительных предельных состояний для большого числа конструкций: коэффициенты перегрузки, коэффициенты условий работы и др.

4. Характерным для машиностроения является также принятие больших коэффициентов запаса, что объясняется неопределенностью нагрузок и расчетной схемы.

Следует отметить, что для одних и тех же материалов в различных элементах машин, в зависимости от их значения и степени ответственности, даются дифференцированные допускаемые напряжения.

Лаборатория поставила своей конечной задачей разработать для железобетонных элементов машин такую же методику расчета, которая принята для расчета строительных элементов железобетонных конструкций, т. е. по предельным состояниям.

В связи с указанными отличительными особенностями проектирования базовых деталей машин очевидно, что разработка унифицированной, единой методики расчета — задача сложная, но в то же время и вполне разрешимая.

Для проектирования многих железобетонных элементов машин могут быть целиком использованы положения СН и П (строительные нормы и правила) с уточнениями в отношении предельных состояний.

Для сложных же по форме и напряженному состоянию железобетонных элементов машин должны быть определены расчетные характеристики и разработана методика расчета.

Кроме того, для многих элементов должна быть дана методика статического расчета, как, например, толстостенных цилиндров пространственных станин, шаботов тяжелых молотов, матриц для штампования, спиральных камер гидротурбин и многих других сложных элементов.

Вопросы, относящиеся к нормированию нагрузок и деформаций, установлению коэффициентов перегрузок, должны решаться независимо от материала.

Вопросы, касающиеся характеристик материалов и железобетонных конструкций, в целом должны решаться совместно машиностроителями и строителями.

Канд. техн. наук **КАРАНФИЛОВ Т. С.**
Инж. **ВОЛКОВ Ю. С.**

РАБОТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА МНОГОКРАТНО ПОВТОРНУЮ НАГРУЗКУ

При расчете железобетонных конструкций машин перед конструктором стоит задача по учету воздействия многократно повторной нагрузки. Этот учет сводится к оценке выносливости конструкций, а также к оценке изменения упругих и остаточных деформаций в них.

В действующих нормах проектирования бетонных и железобетонных конструкций — СНиП II-B. 1-62 [21] расчет на выносливость ведется с использованием значений расчетных сопротивлений бетона, пониженных на 5—25% по сравнению с расчетом на статическую нагрузку. Причем это снижение относится к числу повторения нагрузки $2 \cdot 10^6$ циклов. База $2 \cdot 10^6$ циклов была первоначально принята при исследовании, а затем и при проектировании мостовых конструкций. Впоследствии эта база была распространена и на остальные строительные конструкции. Между тем применение железобетона в таких отраслях, как машиностроение, где конструкции испытывают за срок службы большее количество циклов нагрузок, чем $2 \cdot 10^6$, требует некоторой корректировки указаний СНиП.

Прежде чем остановиться на описании работы железобетонных обычных и предварительно напряженных конструкций на многократно повторные нагрузки, необходимо кратко осветить воздействие такой нагрузки отдельно на бетон и арматуру.

Воздействие многократно повторной нагрузки на бетон

Выносливость бетона. Для дальнейшего изложения приведем некоторые принятые основные обозначения:

N — количество циклов повторения нагрузки (база испытания бетонных образцов на выносливость);

K — относительное напряжение в цикле (уровень напряжения), $K = \frac{\sigma_{max}}{R_0}$;

R_6 — прочность бетона, которая может быть;
 $R_{n,p}$ — призмная прочность;
 R_u — прочность на сжатие при изгибе;
 R_{pu} — прочность на растяжение при изгибе;
 R_p — прочность при осевом растяжении;
 q — характеристика цикла повторения нагрузки,

$$q = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}};$$

σ_{\min} и σ_{\max} — минимальное и максимальное напряжение в цикле;

R_y — предел выносливости бетона (максимальное напряжение в цикле, при котором образец выдерживает N циклов);

K_y — относительный предел выносливости бетона,
 $K_y = \frac{R_y}{R_6}$.

Предел выносливости бетона при сжатии зависит от целого ряда факторов. С увеличением числа циклов N и уменьшением характеристики цикла q предел выносливости понижается, а при увеличении частоты приложения нагрузки — повышается [30]. Для более прочных бетонов относительный предел выносливости будет выше [3]. Кроме того, на величину K_y влияют и чисто технологические факторы: назначение более низкого водоцементного отношения, введение воздухововлекающих добавок [27], применение для приготовления бетона белитового цемента, т. е. цемента с повышенным содержанием двухкальциевого силиката ($2\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$), введение большого количества хлористых солей (до 9% от веса цемента) и пропаривание [16], способы укладки, условия твердения, хранение и возраст бетона, качество цемента и заполнителей. Можно насчитать более двадцати факторов, влияющих на выносливость бетона, но многие из них исследованы еще очень мало [10] и поэтому количественно оценить степень влияния каждого фактора на предел выносливости бетона в настоящее время еще не представляется возможным. Поэтому в действующих нормах предел выносливости пока записан зависящим лишь от прочности бетона и характеристики цикла q . При этом число циклов повторения нагрузки принято $2 \cdot 10^6$. Но как уже указывалось, для применения железобетона в машиностроении необходимо знание предела выносливости бетона на базах, значительно превышающих $2 \cdot 10^6$ циклов. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Эксперименты по исследованию выносливости бетона на больших базах пока еще фактически не проводились. Наибольшее число циклов, которое было достигнуто в лабораторных испытаниях, — это 10^7 циклов при изучении выносливости бетона на растяжение при изгибе [32] и $1,6 \cdot 10^7$ циклов при центральном сжатии [7]. Вследствие значительной трудоемкости подобных опытов, результатов испытаний по выносливости бетона для числа

циклов $5 \cdot 10^7$ — 10^8 следует ожидать еще не скоро. Но приближенные значения можно было бы получить уже сейчас, если проэкстраполировать на большие базы зависимость между относительным пределом выносливости бетона и числом циклов нагрузки N , полученную при $N \leq 2 \cdot 10^6$. Однако задача осложняется тем, что зависимостей $K_y = f(N)$ существует довольно много.

Если нанести на график в координатах K_y — $\lg N$ непосредственно экспериментальные данные различных авторов [2] — [41], [61], [71], [91], [151], [161], [271], [30] — [331], включая и данные авторов статьи, то получим поле точек, имеющих значительный разброс. Это и естественно, так как исследованные бетоны испытывались не только по самой разнообразной методике, но также имели и различные показатели по составу, прочности, качеству цемента В/Ц (водоцементное отношение) и т. д. Призмная прочность бетона в этой сумме исследований в подавляющем большинстве случаев колебалась от 150 до 500 кг/см² (8% образцов имели прочность от 500 до 700 кг/см²), расход цемента составлял от 180 до 550 кг/м³, В/Ц менялось от 0,3 до 0,8, частота приложения нагрузки колебалась от 6 до 600 циклов в 1 мин.

Следовательно, рассматривая совокупность результатов исследований многих авторов, можно предположить наличие самых разнообразных сочетаний различных факторов, в том числе таких сочетаний, которые в наибольшей степени снижают выносливость бетона. Таким образом, можно наметить некоторую границу экспериментальных данных, ниже которой разрушение бетона при воздействии повторной нагрузки становится практически невозможным, несмотря на самое неблагоприятное сочетание факторов, снижающих выносливость бетона. Для этих целей был использован следующий прием.

Из всей совокупности испытанных до разрушения бетонных образцов призм, балок и «восьмерок» были выбраны образцы, выдержавшие от 10^6 до $3 \cdot 10^6$ циклов повторения нагрузки. Результаты по этим образцам нанесены на графике фиг. 1 в координатах K_y — q (крестиками обозначены балки, кружками — призмы, треугольниками — восьмерки). Проведенная огибающая кривая записывается уравнением

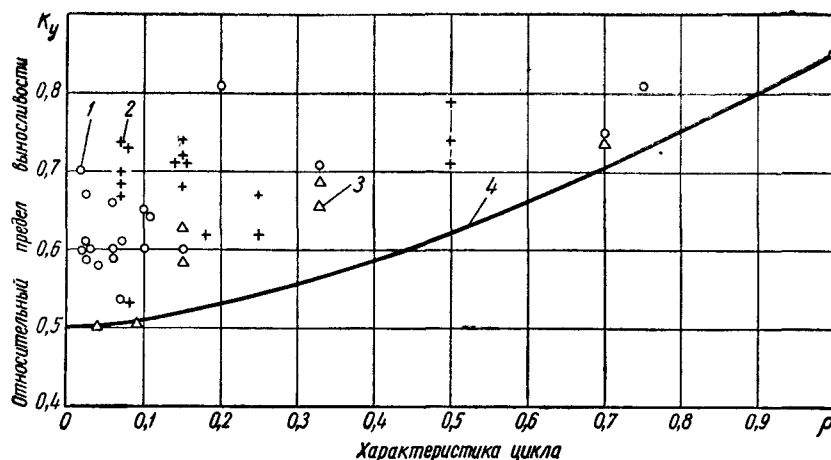
$$K_y = 0,5 + 0,35 \sqrt{q^3}. \quad (1)$$

Если сравнить результаты различных авторов, исследовавших выносливость бетона при сжатии призм, с результатами авторов, исследовавших выносливость при изгибе бетонных балок и при растяжении «восьмерок», то относительные значения пределов выносливости окажутся численно довольно близкими. Наиболее убедительно это показал Карпухин Н. С. [7] и [91], получивший одинаковую зависимость относительного предела выносливости бетона K_y от характеристики цикла q при сжатии бетонных призм и растяжении бетонных «восьмерок». Это обстоятельство позволяет

рассматривать результаты всех авторов совместно, не разделяя их по видам действующих напряжений.

Напомним, что и в нормах степень снижения прочности при действии повторной нагрузки принята одинаковой для расчетных сопротивлений: при сжатии, сжатии при изгибе и растяжении.

Огибающая кривая в уравнении (1) практически повторяет кривую Гудмана-Джонсона с той лишь разницей, что при $q = 1$



Фиг. 1. Зависимость относительного предела выносливости K_y от характеристики цикла нагрузки q , при $N = 10^6 - 3 \cdot 10^6$ циклов: Разрушившиеся бетонные:

1 — призмы; 2 — балки; 3 — «восьмерки»; 4 — огибающая кривая $K_y = f(q)$.

прочность бетона равна не кратковременной прочности, а длительной, как это принято и другими авторами в работах [6] и [7]. Дальнейший анализ подтвердил правильность выбранного вида кривой.

Таким образом, при $q = 0$ $K_y = 0,5$; при $q = 1$ $K_y = 0,85$, что соответствует длительной прочности бетона [7]. В связи с этим из дальнейшего рассмотрения исключены все образцы, испытывавшиеся при $K > 0,85$.

Уравнение (1) можно записать в общем виде следующим образом:

$$K_y = a + (0,85 - a) \sqrt[q^3]{q^3}. \quad (2)$$

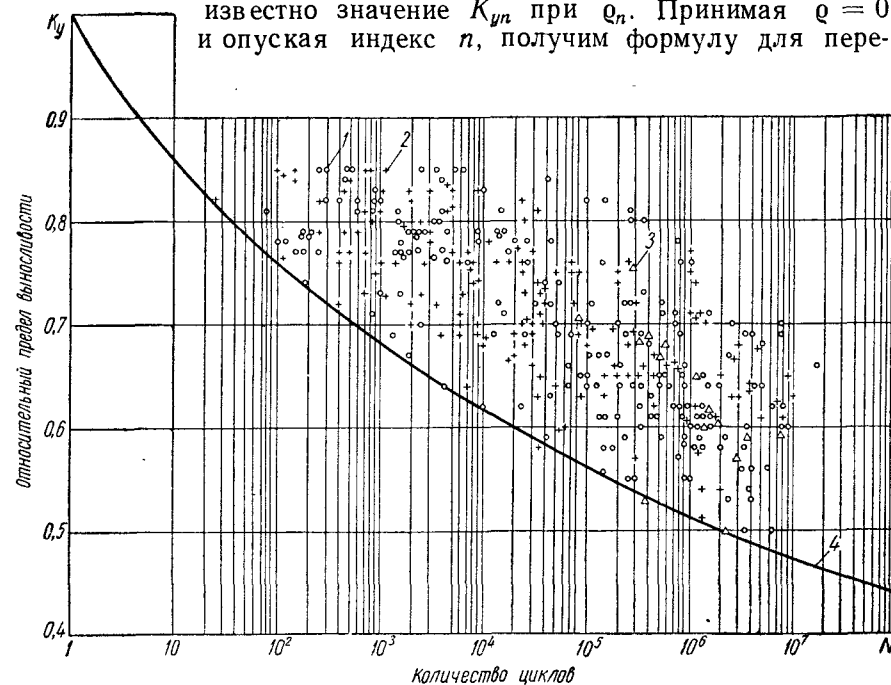
Если же на график $K_y - q$ нанести показатели образцов при любом другом значении N , то вид огибающей кривой почти сохранится и она также может быть описана уравнением (2). Следовательно, можно считать, что для любого образца связь между величинами K_y и q будет выражаться уравнением (2). Например, для образца n она запишется так:

$$K_{yn} = a + (0,85 - a) \sqrt[q_n^3]{q_n^3}. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), получим

$$K_y = \frac{K_{yn} - 0,85 \sqrt[q_n^3]{q_n^3}}{1 - \sqrt[q_n^3]{q_n^3}} (1 - \sqrt[q^3]{q^3}) + 0,85 \sqrt[q^3]{q^3}. \quad (4)$$

По этому уравнению представляется возможным для любого образца n определить величину K_y при любом значении q , если известно значение K_{yn} при q_n . Принимая $q = 0$ и опуская индекс n , получим формулу для пере-



Фиг. 2. Зависимость относительного предела выносливости K_y от числа циклов нагрузки N . Разрушившиеся бетонные:

1 — призмы; 2 — балки; 3 — «восьмерки»; 4 — огибающая кривая $K_y = f(N)$.

хода от значений K_y при данном q к значениям K_{y0} при $q = 0$:

$$K_{y0} = \frac{K_y - 0,85 \sqrt[q^3]{q^3}}{1 - \sqrt[q^3]{q^3}}. \quad (5)$$

Вычисленные по формуле (5) значения K_{y0} по каждой призме, каждой «восьмерке» и каждой балке показаны на фиг. 2; при этом значения $K_y = 0,85$ не пересчитывались.

При нанесении экспериментальных данных на график (фиг. 2) были исключены образцы, результаты испытаний которых сильно отличались от остальных, испытывавшихся при одинаковых параметрах. Например, в опытах Графа О. и Бреннера Е. [30] некоторые призмы разрушались много раньше своих близнецов, несмотря

на меньшее относительное напряжение при одинаковом q . Так же и по тем же причинам выпали из рассмотрения некоторые результаты опытов и других авторов.

Проведенная на графике (фиг. 2) огибающая кривая может быть описана уравнением

$$K_{y0} = \frac{1}{1 + 0,158 \lg N}, \quad (6)$$

которое в общем виде запишется

$$K_y = \frac{1}{1 + a \lg N}. \quad (7)$$

Следовательно, при любом значении q связь между K_y и N будет выражаться уравнением (7). Запишем это выражение для любого образца, характеризующегося величинами K_{yn} , N_n и q_n :

$$K_{yn} = \frac{1}{1 + a \lg N_n}. \quad (8)$$

Решая совместно уравнения (7) и (8), получим

$$K_y = \frac{1}{1 + \frac{1 - K_{yn}}{K_{yn} \lg N_n} \lg N}. \quad (9)$$

По этому уравнению путем пересчета данных результатов испытаний можно получить значения K_y при любой величине N и данном q . Принимая $N = 2 \cdot 10^6$, получим

$$K_y = \frac{K_{yn} \lg N_n}{K_{yn} \lg N_n + (1 - K_{yn}) 6,301}. \quad (10)$$

Вычисленные таким образом по формуле (10) значения величины K_y при $N = 2 \cdot 10^6$ нанесены на графике $K_y - q$ (фиг. 3) кружками (призмы), крестиками (балки) и треугольниками («восьмерки»).

Решая совместно уравнения (5) и (6), получим

$$K_y = \frac{1 - \sqrt{q^3}}{1 + 0,158 \lg N} + 0,85 \sqrt{q^3}. \quad (11)$$

На графике $K_y - q$ (фиг. 3) нанесена кривая $K_y = f_1(q)$, построенная по уравнению (11), и пунктирная линия $k_{q0} = f_2(q)$, построенная по СНиП.

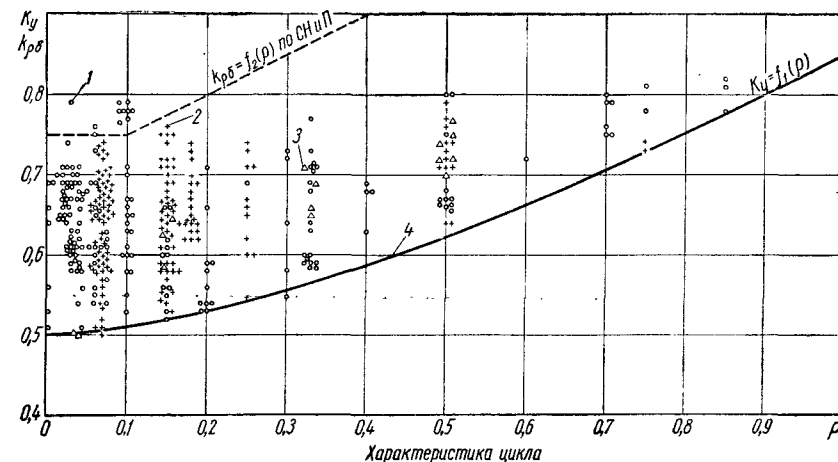
Сопоставляя эти линии между собой, получим

$$k_{q0} = 1,5 K_y = 1,5 \left(\frac{1 - \sqrt{q^3}}{1 + 0,158 \lg N} + 0,85 \sqrt{q^3} \right). \quad (12)$$

Формула [12] дает возможность определить значение коэффициента k_{q0} в зависимости от количества циклов повторения

нагрузки и величины характеристики цикла. Она также показывает, что при значениях $K_y \geq 0,667$ коэффициент $k_{q0} > 1$ и расчет на усталость не производится. Из графика (см. фиг. 2) также видно, что при $N < 1400$ циклов $K_y > 0,667$ при любых значениях q .

В практических целях при расчете конструкций на выносливость значение коэффициента k_{q0} , который используется для определения расчетных сопротивлений бетона на выносливость,



Фиг. 3. Зависимость относительного предела выносливости от характеристики цикла q при $N = 2 \cdot 10^6$ циклов. Разрушившиеся бетонные:

1 — призмы; 2 — балки; 3 — «восьмерки»; 4 — огибающая кривая $K_y = f_1(q)$.

можно принять дифференцированным в зависимости от q и числа циклов N по табл. 1, которая построена по формуле (12).

Деформация бетона при многократном повторении сжимающей нагрузки. В действующих нормах [21] и [23] учет деформаций бетона, развивающихся при действии повторной нагрузки, сводится к назначению повышенного соотношения между модулем упругости арматуры и модулем деформации бетона. Снижение модуля деформации бетона при многократно повторной нагрузке в зависимости от марки бетона колеблется от 2,35 до 3,8 раза [3], причем это снижение относится к базе $2 \cdot 10^6$ циклов. Модуль упругости арматуры принимается постоянным.

Ввиду большой важности точного учета изменения деформативных характеристик бетона в период эксплуатации различных машин с железобетонными станинами при числе нагружений, гораздо большем $2 \cdot 10^6$, в НИИ бетона и железобетона Госстроя СССР были проведены специальные исследования, которые включали в себя изучение деформаций бетона при воздействии повторной нагрузки до $15 \cdot 10^6$ циклов. При этом рассматривались:

Таблица 1

Коэффициенты $k_{Q,6}$ для определения расчетных сопротивлений бетона при расчете железобетонных конструкций на выносливость и по образованию трещин при многократно повторяющихся нагрузках

Q	Количество циклов N							
	10 ⁶	2·10 ⁶	10 ⁷	10 ⁸	10 ⁹	10 ¹⁰	10 ¹¹	10 ¹²
0	0,77	0,75	0,70	0,66	0,62	0,58	0,55	0,52
0,1	0,78	0,77	0,72	0,68	0,64	0,60	0,57	0,54
0,2	0,81	0,80	0,75	0,71	0,67	0,64	0,61	0,58
0,3	0,86	0,85	0,80	0,76	0,73	0,70	0,67	0,64
0,4	0,91	0,90	0,85	0,81	0,78	0,75	0,73	0,71
0,5	0,96	0,95	0,91	0,88	0,85	0,83	0,81	0,79
0,6	1,00	1,00	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,87
0,7	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,97	0,96

Примечание. Расчетные сопротивления бетона см. СН и П, II-В.
I — 62 (бетонные и железобетонные конструкции (табл. 2 [21]).

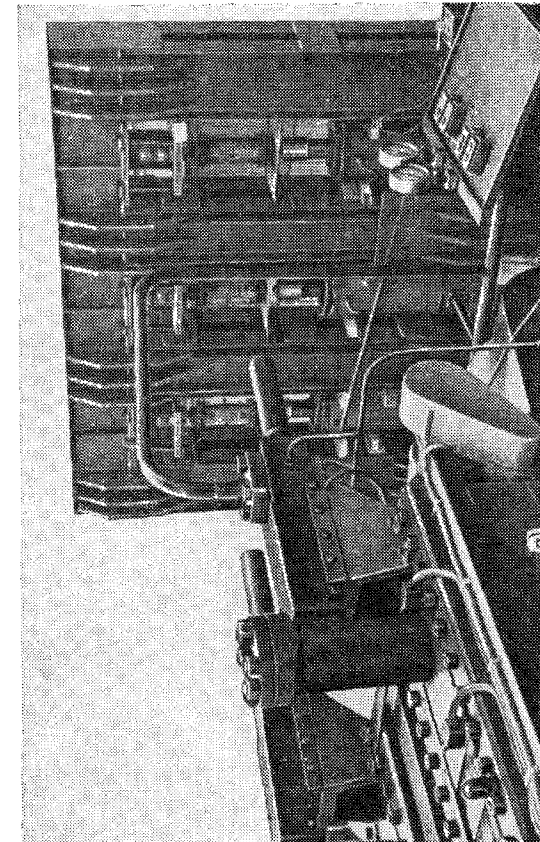
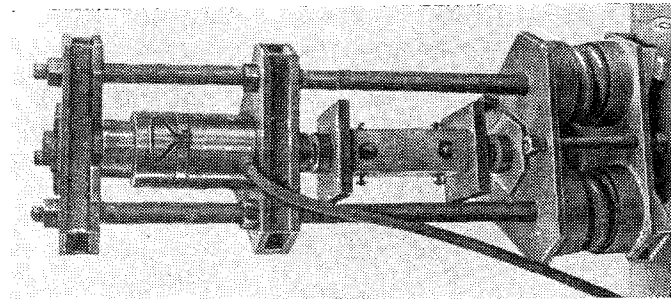
влияние на изменение упругих и остаточных деформаций воздействия повторной нагрузки после предварительного нагружения бетона постоянной нагрузкой; влияние возраста бетона к началу воздействия повторной нагрузки; влияние продолжительности пребывания бетона под длительной нагрузкой к началу действия повторной нагрузки и т. д.

Все исследования были выполнены на образцах из бетона одного состава со средней призмной прочностью, равной 490 кг/см^2 , в возрасте 28 дней. Изменение призмной прочности с возрастом бетона происходило довольно слабо; в период испытания она составила 540 кг/см^2 .

Деформативность бетона при воздействии многократно повторной нагрузки исследовалась на призмах размером $10 \times 10 \times 31 \text{ см}$, испытывавшихся при центральном сжатии.

Призмы на многократно повторные нагрузки испытывались в специальной установке с тремя пульсирующими домкратами, работающими от одного пульсатора (фиг. 4, а). В такой установке одновременно испытывалось по три призмы — две предварительно напряженных и одна ненапряженная для сравнения¹.

Предварительное нагружение призм осуществлялось в специальных пружинных установках (фиг. 4, б), позволяющих создавать усилия до 50 т . Максимальное напряжение при повторной нагрузке равнялось величине предварительного напряжения в пружинной установке для различных партий образцов и составляло



Фиг. 4. Испытание призм:
а — на многократно повторную нагрузку в пульсаторе; б — на длительную нагрузку в пружинных установках.

¹ Испытания на повторную нагрузку проводились в Секторе механических испытаний ЦНИИ строительных конструкций Госстроя СССР.

0,185 $R_{пр}$, 0,37 $R_{пр}$ и 0,555 $R_{пр}$. При действии повторной нагрузки q составляло 0,1.

Деформации ползучести бетона в пружинных установках и деформации виброползучести в установках с пульсирующими домкратами измерялись переносными индикаторами с ценой деления 0,002 мм (фиг. 5).

При измерении деформаций были использованы специальные репера с шариками для установки переносных индикаторов.

Реперные упоры приклеивались к призмам специальным составом на основе эпоксидной смолы. На этом клею упоры прочно держатся и не ползут под влиянием собственного веса. Отсутствие ползучести было установлено приложением нагрузки в 1 кГ к одному из реперов на контрольном образце. В течение двух месяцев показания индикаторов на нагруженном и ненагруженном реперах оставались одинаковыми.

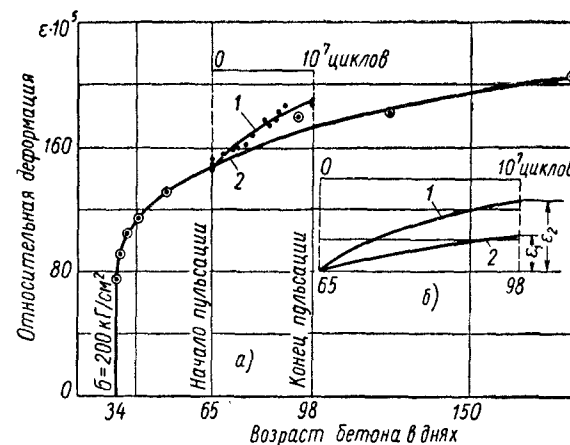
Так как большинство конструкций машин из железобетона выполняются предварительно напряженными, то полезно знать, как же будет влиять предварительное напряжение, осуществляемое обычно за некоторое время до ввода машины в эксплуатацию, на изменение упругих и остаточных деформаций в период эксплуатации. В описываемых исследованиях период предвари-

Фиг. 5. Измерение продольных и поперечных деформаций на призмах переносными индикаторами.

тельного обжатия имитировался нагружением образцов в пружинных установках, а воздействие эксплуатационной нагрузки — испытанием образцов в пульсаторе.

Первая группа из 15 образцов была нагружена длительной нагрузкой ($K = 0,37$) в возрасте 34 дней. В возрасте 66 дней три призмы из этих пятнадцати были подвергнуты действию повторной нагрузки. После 10^7 циклов эти образцы показали 9% прироста остаточной деформации по сравнению с величиной суммарной деформации, развившейся в образцах-близнецах под длительной нагрузкой (фиг. 6, а).

На слабое развитие деформаций виброползучести после предварительного воздействия постоянной нагрузки указывал и Лермит Р. [13]. В этих опытах образец после 1000 дней действия длительной нагрузки при напряжении 100 кГ/см^2 был разгружен и после некоторого перерыва подвергнут действию многократно повторной нагрузки с тем же максимальным напряжением. После $3 \cdot 10^6$ циклов остаточная деформация увеличилась на 6%. Однако, если величину деформации виброползучести отнести к величине



Фиг. 6. Деформация ползучести и виброползучести призм:

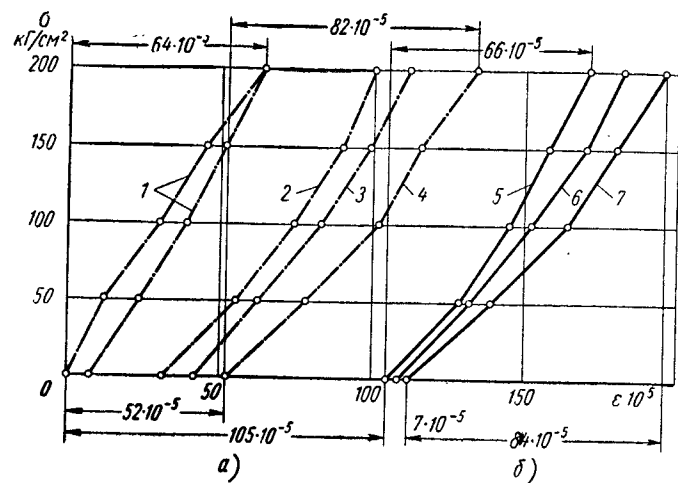
1 — виброползучесть предварительно напряженного бетона;
2 — ползучесть образцов при том же напряжении.

деформации ползучести, проявившейся за время действия повторной нагрузки, то прирост ее составит 200% (фиг. 6 б).

В возрасте 98 дней повторной нагрузке одновременно с предварительно напряженными образцами был подвергнут и ненапряженный образец. После воздействия $14 \cdot 10^6$ циклов нагрузки остаточная деформация бетона ненапряженной призмы в 7,5 раза превышала остаточную деформацию бетона предварительно нагруженных призм (фиг. 7).

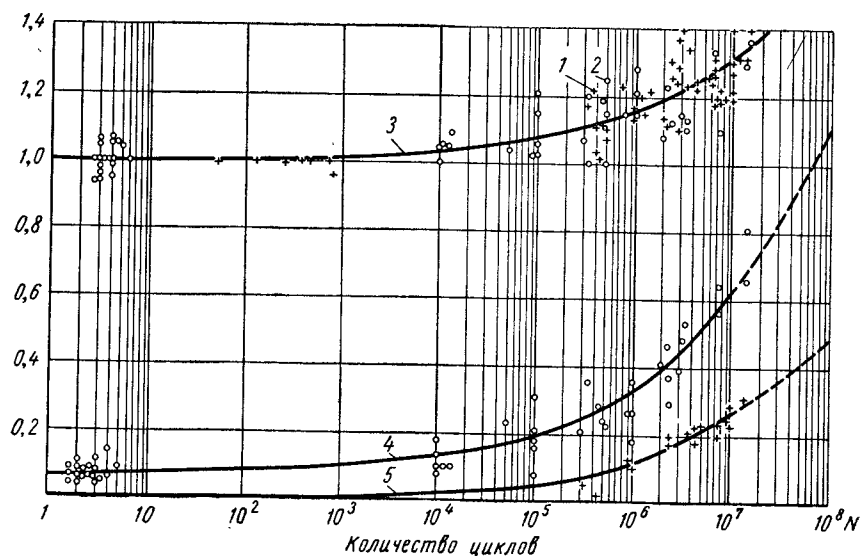
Приведенные данные показывают, что предварительное напряжение является фактором, резко уменьшающим величины остаточных деформаций, развивающихся за время действия многократно повторной нагрузки.

По результатам испытаний образцов этой группы видно, что предварительное напряжение не оказало никакого влияния на величину модуля упругости. Кривые зависимости $\sigma - \epsilon$ подобны как для напряженного, так и для ненапряженного бетона, причем к моменту окончания действий повторной нагрузки модуль упругости оказался одинаковым в обоих случаях.



Фиг. 7. Деформации бетона при воздействии многократно повторной нагрузки:

а — ненапряженный бетон; б — предварительно напряженный бетон (2 шт.); 1 и 5 — $N = 1$; 2 и 6 — $N = 3,2 \cdot 10^4$; 3 — $N = 7,2 \cdot 10^4$; 4 и 7 — $N = 1,4 \cdot 10^7$.

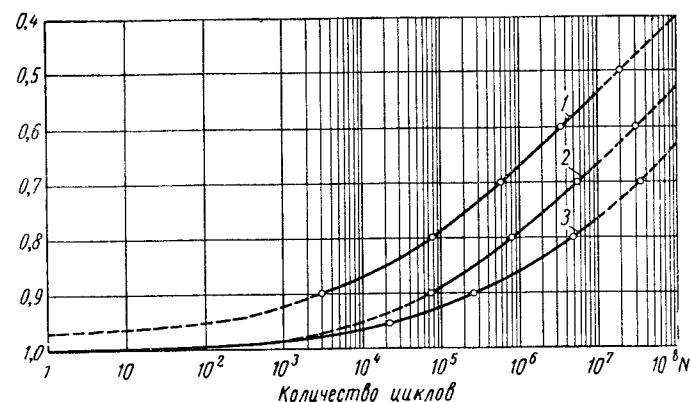


Фиг. 8. Зависимость упругих и остаточных деформаций бетона от количества циклов повторения нагрузки:

1 — предварительно напряженные призмы; 2 — ненапряженные призмы; 3 — изменение упругих деформаций бетона ($\epsilon'_y : \epsilon_y$); 4 — изменение остаточных деформаций ненапряженного бетона ($\epsilon'_0 : \epsilon_0$); 5 — изменение остаточных деформаций предварительно напряженного бетона ($\epsilon'_0 : \epsilon_0$); ϵ'_y — упругая деформация при $N > 1$; ϵ'_0 — остаточная деформация при $N > 1$; ϵ_y — упругая деформация при $N = 1$.

Развитие упругих и остаточных деформаций в зависимости от числа циклов повторной нагрузки по данным результатов испытания всех групп образцов показано на фиг. 8.

Все значения деформаций отнесены к величине первоначальных упругих деформаций ϵ_y . Из фиг. 8 видно, что нарастание остаточных деформаций для ненапряженных образцов с ростом числа циклов происходит примерно в два с лишним раза интенсивнее, чем для образцов, нагруженных предварительно длительной нагрузкой. Что же касается упругих деформаций, то предвари-



Фиг. 9. Зависимость модуля деформации и модуля упругости бетона от количества циклов повторения нагрузки:

1 — изменение модуля деформации ненапряженного бетона ($E'_6 : E_y$); 2 — изменение модуля деформации предварительно напряженного бетона ($E'_6 : E_y$); 3 — изменение модуля упругости бетона ($E'_y : E_y$); E'_6 — модуль деформации бетона при $N > 1$; E_y — модуль упругости бетона при $N > 1$; E_y — модуль упругости бетона при $N = 1$.

тельное нагружение, как уже упоминалось, не оказало никакого влияния на их рост с увеличением числа циклов.

Сводный график средних изменений модуля упругости и модуля деформации бетона с ростом числа циклов нагрузки, вычисленных по величинам деформаций, данных на фиг. 8, показан на фиг. 9. Для наглядности эти же данные приведены в табл. 2.

Кривые на фиг. 9 и данные табл. 2 показывают, что модуль деформации и модуль упругости бетона с ростом количества циклов повторения нагрузки непрерывно уменьшаются, причем это уменьшение носит затухающий характер, что хорошо видно, если по оси абсцисс количество циклов N откладывать в линейном масштабе, а не в логарифмическом, как это показано на фиг. 8. Однако, несмотря на затухающий характер снижения модулей, стабилизация их все же не наступает даже при очень большом количестве циклов.

Таблица 2

Изменение модулей деформации и упругости бетона с ростом количества циклов повторения нагрузки

Отношение модулей		Величина γ отношения модулей N								
		10	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	2·10 ⁶	10 ⁷	10 ⁸
$\frac{E'_b}{E_y}$	Бетон: ненапряженный	0,96	0,95	0,92	0,87	0,79	0,67	0,63	0,54	0,4*
	преднапряженный	1,00	0,99	0,98	0,95	0,89	0,79	0,75	0,67	0,53*
$\frac{E'_y}{E_y}$		1,00	0,99	0,98	0,96	0,92	0,86	0,83	0,76	0,63*

E'_b — модуль деформации бетона при $N > 1$;
 E'_y и E_y — модуль упругости бетона при $N > 1$ и $N = 1$.
 * Экстраполированные величины.

Характер полученных зависимостей позволил дать экстраполяцию изменения модулей до числа циклов повторения нагрузки 10⁸.

Пользуясь данными табл. 2, определяем изменение коэффициента приведения n' с ростом числа циклов приложений нагрузки для напряженного и ненапряженного бетона. Коэффициент n' представляет собой отношение модуля упругости арматуры к модулю деформации бетона после воздействия повторной нагрузки. Он используется при расчете конструкций на выносливость для приведения площади арматуры к площади бетона. Вычисленные с использованием данных табл. 2 значения n' сведены в табл. 3.

Для расчета на выносливость (при $N = 2 \cdot 10^6$) железобетонных конструкций из бетона марки «500» и выше коэффициент приведения принимается равным 10. Как видно, расхождение с данными табл. 3 составляет всего лишь 4%.

Таблица 3

Коэффициенты приведения n' для расчета на выносливость железобетонных конструкций из тяжелого бетона марки «500» и выше

Бетон	Значения коэффициента n' при количестве циклов N									
	10	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	2·10 ⁶	10 ⁷	10 ⁸	
Ненапряженный	6,8	6,9	7,1	7,5	8,3	9,8	10,4	12,2	16,4	*
Преднапряженный	6,5	6,6	6,7	6,9	7,4	8,3	8,8	9,8	12,4	*

* Экстраполированные величины.

Приведенные в табл. 3 величины n' вычислены при значении модуля упругости бетона $E_y = 3,2 \cdot 10^5$ кг/см² и модуля упругости арматуры $E_a = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см². При других значениях E_y (при той же прочности бетона) и E_a величины n' можно определять по уравнению

$$n' = \frac{E_a}{\gamma E_y};$$

значения γ принимаются по табл. 2 в зависимости от числа циклов N .

Полученные результаты позволяют уточнить рекомендации СНиП по выбору n' с учетом числа циклов свыше $2 \cdot 10^6$.

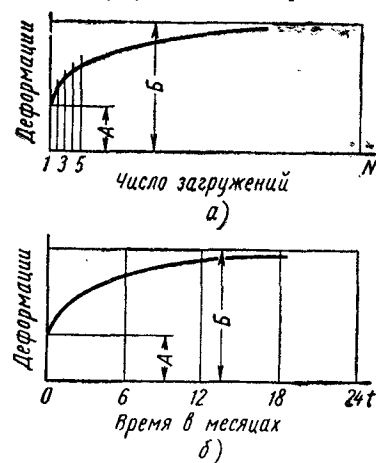
Изменение продолжительности предварительного нагружения перед началом действия повторной нагрузки от 31 до 170 дней не оказало влияния на величину прироста остаточной деформации, обусловленной воздействием повторной нагрузки. Это может быть объяснено тем, что образцы, даже первой группы, испытывались на воздействие повторной нагрузки в возрасте 65 дней, т. е. достаточно зрелыми, а как известно из работы [26], наиболее сильное влияние на деформацию бетона оказывает нагружение в раннем возрасте.

На деформацию ползучести возраст бетона к моменту нагружения оказал существенное влияние; так, например, деформации ползучести бетона, загруженного в возрасте 103 дней, были в 2 раза меньше деформаций ползучести бетона, загруженного в возрасте 34 дней, но тем не менее деформации виброползучести для обеих групп отличаются в меньшей степени.

Как уже упоминалось, образцы рассматриваемой серии испытывались на повторную нагрузку при трех уровнях напряжения: 0,185 R_{np} ; 0,37 R_{np} и 0,555 R_{np} , что соответствовало максимальным напряжениям в цикле 100; 200 и 300 кг/см². Подавляющее большинство образцов было испытано при напряжении 200 кг/см², т. е. при таком напряжении, которое наиболее вероятно будет действовать в конструкциях машин, сооружаемых из высокопрочных бетонов. При этом во всех случаях испытания проводились при $q = 0,1$. Данные по величинам деформаций, полученные на образцах при напряжениях 100; 200 и 300 кг/см², показали, что остаточные деформации изменялись линейно для всех трех уровней напряжения, т. е. мера виброползучести для этих уровней напряжения была одинакова. Следует отметить, что исследования деформаций велись при напряжениях ниже предела выносливости бетона, определенного как в опытах авторов, так и в других работах [3] и [6]. При высоких напряжениях (до 0,85 R_{np}), применявшихся при исследовании выносливости бетона, было обнаружено, что задолго до разрушения образца (за 10⁵—10⁶ циклов, в зависимости от уровня напряжения) с ростом числа повторений нагрузки прирост остаточной деформации

по отношению к первоначальной упругой деформации начинает резко возрастать, что свидетельствует о переходе деформаций ползучести в пластические деформации II рода, обусловленные развитием необратимых микротрещин в бетоне [11]. Причем эти деформации уже носят ярко выраженный нелинейный характер.

Проведенные исследования показали, что до определенного уровня напряжений кривые ползучести и виброползучести подобны друг другу, т. е. подкрепили ранее высказывавшиеся соображения



Фиг. 10. Изменение деформаций:

а — в зависимости от числа загрузок;
б — в зависимости от времени действия нагрузки; А — упругая деформация при первом нагружении; Б — предельная деформация.

о возможности оценки величины деформации виброползучести вычислением значения деформации простой ползучести. [11]. В своей работе Лермит Р. указывает на то, что предельная величина деформации виброползучести не может превысить предельную величину деформации ползучести под длительной нагрузкой (фиг. 10). Следовательно, если вычислить предельную остаточную деформацию при действии длительной нагрузки, то эта величина может быть принята за максимальную остаточную деформацию при действии повторной нагрузки. Для вычисления предельной остаточной деформации Улицким И. И. в работе [24] предложен простой практический метод, принятый в строительных нормах. Мера ползучести $\eta_{t=\infty}$, выражающая конечную величину относительной деформации ползучести на 1 кг/см^2 напряжения в бетоне, определяется по приведенным в нормах данным с учетом рода цемента, возраста бетона в момент нагружения, водоцементного отношения, размеров сечения элементов и относительной влажности воздуха. Характеристика ползучести $\varphi_{t=\infty}$ представляет собой отношение наибольшей (предельной) величины деформации ползучести к величине упругой деформации и определяется

$$\varphi_{t=\infty} = \eta_{t=\infty} E_y. \quad (13)$$

Кроме учтенных факторов, зависящих от свойств бетона и окружающей среды, на развитие остаточных деформаций будет влиять и характер нагрузки: режим напряжения, частота, амплитуды и т. д., но влияние их незначительно и изучено еще в слабой степени.

Для примера приведем расчет предельных деформаций ползучести для клетки прокатного стана «Кварто-200»*.

Расчетная величина меры ползучести $\eta_{t=\infty}$ определится как произведение исходной величины $\eta_{t=\infty}^0$ на коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Величины этих характеристик берем из работы [23, приложение 15]. Клеть изготавливалась из бетона без применения ускорителей твердения на цементе активностью выше «500», причем возраст в момент создания предварительного обжата составлял 28 дней. По табл. 1 приложения 15 [23] находим $\eta_{t=\infty}^0 \cdot 10^6 = 5,9 \text{ см}^2/\text{кг}$, В/Ц для примененного бетона было 0,35, следовательно, $\xi_1 = 0,52$; для фактического содержания цементного теста по весу 30% $\xi_2 = 1,5$. Так как клеть имеет со всех сторон гидроизоляцию, то $\xi_3 = 0,6$, а $\xi_4 = 1$, тогда

$$\eta_{t=\infty} = 5,9 \cdot 0,52 \cdot 1,5 \cdot 0,6 \cdot 1 = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{кг}.$$

По уравнению (13)

$$\varphi_{t=\infty} = 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot 4,0 \cdot 10^5 = 1,08.$$

Выносливость арматурных сталей

Сталь, из которой изготавливается арматура, так же как и бетон, обладает свойствами усталости при воздействии многократно повторяющейся нагрузки. С увеличением числа циклов повторения нагрузки максимальное напряжение, необходимое для разрушения образца, уменьшается. Относительные пределы выносливости K_{ya} различной стержневой арматуры на базе $2 \cdot 10^6$ циклов, полученные в работах [14], [19] и [20], приведены в табл. 4.

Таблица 4

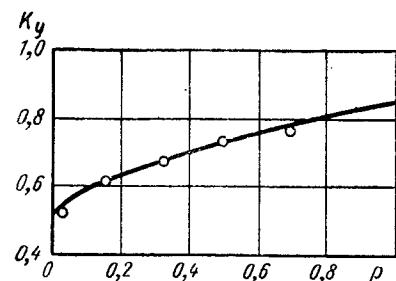
Выносливость арматурных сталей

Вид арматуры	Предел прочности в кг/см^2	q	Относительный предел выносливости $K_{ya} = \frac{R_{ya}}{\sigma_B}$
Горячекатаная, периодического профиля, из стали марки Ст. 5	5000	0,1	0,37
		0,6	0,70
То же, из стали 25Г2С . . .	6000	0,15	0,38
		0,6	0,60
То же, из стали 35ГС	6700	0,0	0,26
		0,2	0,30
		0,5	0,40

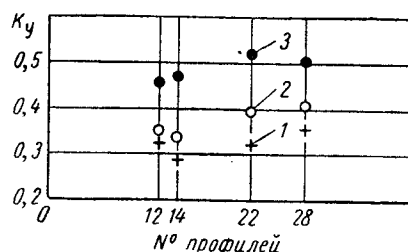
* См. статью Каранфилова Т. С.

В опытах [12] стержни из стали марки Ст. 3 выдержали $200 \cdot 10^6$ нагружений без разрушения при напряжениях всего на 8% меньших, чем предел выносливости на базе $2 \cdot 10^6$ циклов. Этот факт указывает на то, что с увеличением N снижение предела выносливости для стали происходит значительно слабее, чем для бетона. Следовательно, значения относительных пределов выносливости для арматурной стали, приведенные в табл. 4, можно с некоторой оговоркой принять и для баз 10^7 — 10^8 циклов.

Кроме того, большим количеством испытаний установлено, что предел выносливости арматуры зависит от ряда других факторов



Фиг. 11. Зависимость относительного предела выносливости бетона при растяжении ($K_y = R_y : R_p$) от характеристики цикла q .



Фиг. 12. Влияние диаметра стержней на относительный предел выносливости арматуры периодического профиля:

1 — в состоянии поставки при $q = 0,25$; 2 — с приваренными коротышами при $q = 0,25$; 3 — в состоянии поставки при $q = 0,5$.

(частоты приложения нагрузки, периодов отдыха и тренировки, диаметра арматуры, вида профиля и марки стали, сварки и нарезки, бетонного окружения и т. д.), влияние которых при повторной нагрузке сказывается значительно сильнее, чем при однократном статическом нагружении.

Одним из основных факторов, снижающих выносливость арматуры, является создание на ее поверхности периодического профиля для повышения сцепления с окружающим бетоном. Элементы профиля играют роль сильных концентраторов напряжений. Так, по данным работы [15] предел выносливости стержней из сталей Ст. 5 и 25Г2С, у которых выступы на поверхности были удалены токарной обработкой, оказался на 25—40% выше, чем у стержней в состоянии поставки.

По данным работы [20], предел выносливости гладкой арматуры из стали марки 35ГС при $q = 0,2$ оказался на 74% выше, чем у арматуры из той же стали, но периодического профиля.

При исследовании выносливости арматуры периодического профиля из сталей марок Ст. 5; 25Г2С и 35ГС изучалось влияние на выносливость масштабного фактора и приварки перекрестных стержней [19], а также химического состава стали, прочности

и некоторых других факторов [20]. Причем, было установлено, что влияние всех этих факторов перекрывается влиянием периодичности профиля.

Так, например в опытах, [19] приварка коротышей к стержням периодического профиля сказалась на их выносливости меньше, чем на выносливости гладких стержней с такими же коротышами, что авторы опытов объясняют разгружающим влиянием периодичности профиля.

При изучении выносливости на образцах диаметром 12; 14; 22 и 28 мм в состоянии поставки выяснилось, что влияние диаметра на выносливость сказывается незначительно; это также объясняется перекрывающим влиянием периодичности профиля (фиг. 12, поз. 1 и 2).

Однако при наличии бетонного окружения, т. е. в конструкции, благодаря лучшему сцеплению с бетоном, для арматуры периодического профиля обеспечивается хорошая совместная работа бетона и арматуры при воздействии многократно повторной нагрузки [15].

Предел выносливости арматурной стали периодического профиля в слабой степени зависит от прочности [19], [20]. Так как более прочные стали более чувствительны к концентрации напряжений, то относительные пределы выносливости образцов из таких сталей оказываются ниже, чем образцов из менее прочных сталей, и для разных марок $R_{ya} = K_y \sigma_B$ оказываются примерно одинаковыми.

В работе [20] изучалось влияние упрочнения вытяжкой стали марки 35ГС на ее предел выносливости. Было установлено, что если вытяжка до напряжения 5500 кг/см^2 увеличивает предел текучести на 45—47%, то предел выносливости увеличится лишь на 24% для образцов диаметром 28 мм и на 8% для образцов диаметром 14 мм. Перетяжка на 10%, т. е. до напряжения 6000 кг/см^2 , оказала такое же влияние на предел выносливости арматуры из стали 35ГС, как и упрочнение вытяжкой до напряжения 5500 кг/см^2 .

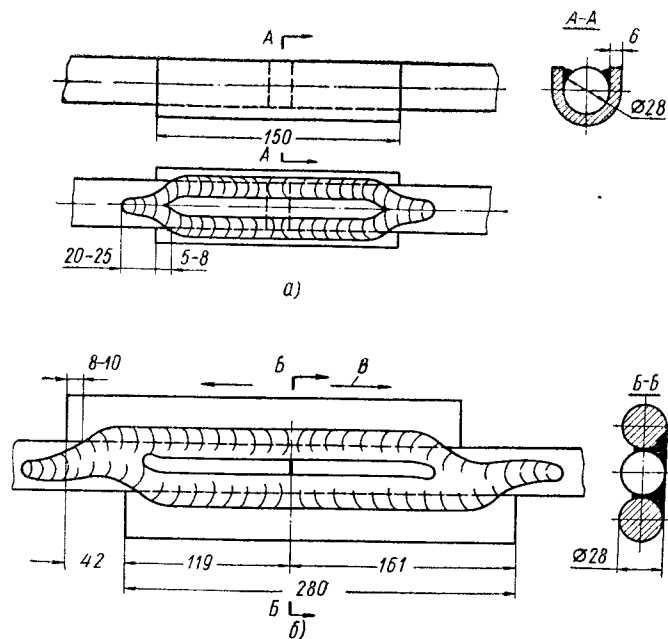
«Тренировка», т. е. предварительное нагружение образцов при максимальном напряжении ниже предела выносливости, увеличивает, правда незначительно, предел выносливости пластичных сталей и практически не влияет на предел выносливости сталей повышенной твердости [15].

Термическое упрочнение несколько снижает выносливость арматуры [20].

Значительно снижают выносливость арматуры такие концентраторы напряжений, как сварка, нарезка, различные царапины и надрезы.

Как уже упоминалось, влияние сварки на выносливость арматуры изучалось в работе [19]. После приварки коротышей выносливость арматурной стали снизилась для марки Ст. 5 на 13%,

а для марки 25Г2С на 16%; причем, диаметр привариваемых коротышей, так же как и диаметр основных стержней (фиг. 12, поз. 3), слабо влияет на изменение предела выносливости, основное влияние оказывает режим сварки. Авторы обнаружили, что большим выдержкам свариваемых узлов под током соответ-



Фиг. 13. Типы стыков:

а — ваный; б — с парными накладками; в — направление сварки.

ствует меньшее снижение предела выносливости с ростом числа повторений нагрузки.

В качестве конструктивных мероприятий для создания сварных стыков арматуры, равнопрочных с основным металлом, рекомендуется применять ваные стыки на удлиненной прокладке, как показано на фиг. 13, а, или применять контактные стыки. Зачистку подобных стыков необходимо производить вдоль оси стержня. При применении стыков с парными накладками и односторонними швами рекомендуется их делать, как показано на фиг. 13, б, где шов переведен на основной элемент в виде наплавки [14].

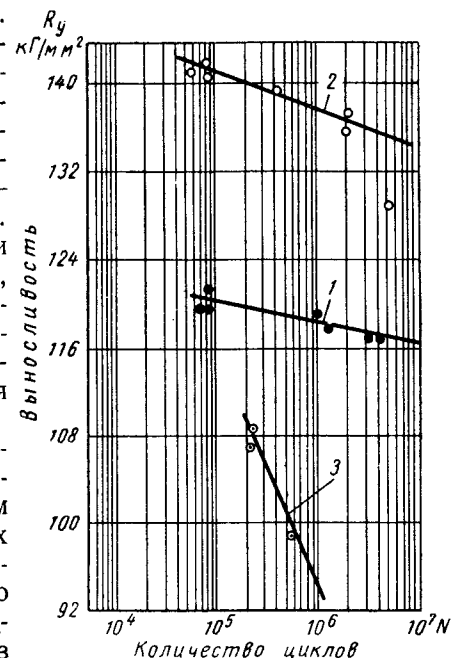
Наличие сварки учитывается при расчете конструкций на выносливость путем умножения расчетных сопротивлений арматуры на коэффициент k_c , принимаемый по строительным нормам.

Опыты [17] с высокопрочной проволокой гладкой (ГОСТ 7348-55) и периодического профиля (ГОСТ 8480-57) показали, что проволока диаметром 5 мм периодического профиля имела предел выносливости на 6—15% ниже, чем гладкая, а величина максимально допустимого перепада напряжений ($\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$) снизилась на 19—28% (табл. 5).

В то же время проволока периодического профиля в железобетонных балках в силу лучшего сцепления с бетоном показывает более высокие характеристики выносливости (на 8—10%), чем отдельные образцы.

При увеличении степени предварительного натяжения, т. е. при повышении минимального напряжения (при постоянном перепаде $\Delta\sigma$), выносливость проволоки увеличивается (фиг. 14).

Пучки и пряди из высокопрочной проволоки также являются перспективным видом арматуры для железобетонных конструкций машин. Исследования [25] показали высокую эффективность применения мощных арматурных пучков из высокопрочной проволоки для армирования изгибаемых элементов, работающих на многократно повторную нагрузку. Такие пучки из высокопрочной гладкой проволоки при напряжении $\sigma_0 = 0,66 \sigma_B$ и $q = 0,85$ могут не рассчитываться на выносливость [24].



Фиг. 14. Влияние степени постоянного напряжения на выносливость проволоочной арматуры:

1 — $\sigma_0 = 0,65 \sigma_B$; 2 — $\sigma_0 = 0,80 \sigma_B$; 3 — $\sigma_0 = 0,35 \sigma_B$.

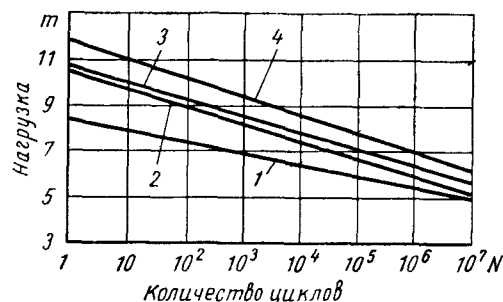
Таблица 5

Пределы выносливости высокопрочной проволоки

Вид проволоки	$K_{ya} = \frac{R_{ya}}{\sigma_B}$	$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ в кг/см²	$q = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$
Круглая, гладкая	0,64—0,73	2050—2350	0,78—0,83
То же, периодического профиля	0,64—0,71	1550—1900	0,82—0,86

Воздействие многократно повторной нагрузки на железобетонные конструкции

Обычные железобетонные конструкции. Влияние многократно повторной нагрузки на работу железобетонных конструкций изучалось в основном на балках. В многочисленных работах было установлено, что прочность железобетонных балок снижается при воздействии повторной нагрузки, причем снижение прочности происходит тем в большей степени, чем меньше характеристика цикла q и больше число повторений нагрузки N (фиг. 15). По-



Фиг. 15. Влияние числа нагружений и характеристики цикла на выносливость железобетонных балок:

1 — $q = 0,15$; 2 — $q = 0,33$; 3 — $q = 0,50$;
4 — $q = 0,70$.

прежнему N и q остаются важнейшими факторами при прочих равных условиях.

После воздействия повторной нагрузки на изгибаемые элементы в арматуре растянутой зоны возникают остаточные растягивающие напряжения, что, в свою очередь, вызывает деформации упругого сжатия на участке около нейтральной оси и деформации упругого растяжения в верхних волокнах балки [18]. Причем растя-

гивающие напряжения при определенных условиях могут превышать предел выносливости бетона на растяжение и вызывать образование трещин.

Разрушение балок при воздействии повторной нагрузки может происходить по одной из перечисленных ниже схем: разрушение сжатой зоны бетона, разрушение от главных растягивающих напряжений, разрушение вследствие нарушения сцепления между бетоном и арматурой, разрыв арматуры в зоне чистого изгиба.

На характер разрушения балки с арматурой только в растянутой зоне, как было установлено Кеслером и Чангом [28], может влиять при прочих равных условиях только величина повторной нагрузки (при $q = \text{const}$).

При приложении достаточно высокой повторной нагрузки ($0,8P_{\text{разр}}$) разрушение происходит от главных растягивающих напряжений при небольшом числе циклов; при приложении меньшей нагрузки (примерно $0,6P_{\text{разр}}$) разрушение балки происходит вследствие усталостного разрыва арматуры при большем числе циклов. В общем случае наиболее часто встречающийся характер разрушения — это усталостный разрыв арматуры, причем обрыв стержней носит хрупкий характер, без образования шейки.

Слабое развитие остаточных деформаций в арматуре приводит к недоиспользованию несущей способности сжатой зоны бетона, что и предопределяет этот вид разрушения.

Как указывается в работе [15], величина разрушающей нагрузки зависит от частоты приложения этой нагрузки, характеристики цикла q , прочностных и деформативных свойств стали и бетона.

В зависимости от преобладания тех или иных факторов величина разрушающей многократно повторной нагрузки может колебаться от 0,5 до 1,0 величины разрушающей статической нагрузки.

С ростом числа приложений нагрузки (вызывающей напряжения ниже предела выносливости) происходит снижение жесткости изгибаемых элементов [15] и [22], причем это снижение наиболее ощутимо при первых циклах нагрузки и имеет тенденцию к стабилизации при дальнейшем повторении нагрузки (фиг. 16).

Величины остаточных прогибов по отношению к упругим в опытах составляли для некоторых балок 100—120% [15].

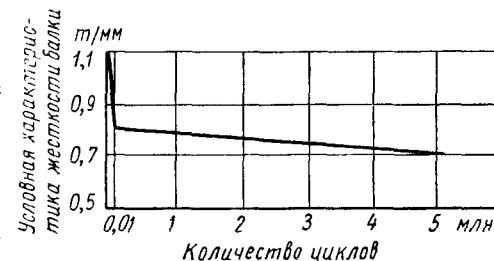
Ниже приводятся соображения по расчету обычных железобетонных конструкций с учетом специфики их работы в машиностроении.

Расчет на выносливость в действующих нормах ведется по упругой стадии с использованием треугольной эпюры напряжений в сжатой зоне и без учета работы растянутой зоны.

Как уже указывалось, расчетные характеристики материалов в нормах приняты, будучи определенными на базе $2 \cdot 10^6$ циклов.

Значительное развитие остаточных деформаций во время воздействия повторной нагрузки учитывается введением в расчет повышенных соотношений модулей упругости арматуры и модулей деформации бетона n' . Значения n' в нормах вычислены делением коэффициента приведения $n = \frac{E_a}{E_b}$ на отношение модуля деформации бетона после воздействия повторной нагрузки к модулю упругости при однократном загрузении, причем это отношение принято дифференцированным в зависимости от марки бетона.

Для бетонов марки «500» и выше коэффициенты приведения следует принимать с учетом числа циклов выше $2 \cdot 10^6$ по данным табл. 3.



Фиг. 16. Влияние числа циклов на развитие остаточных прогибов в железобетонных балках при $q = 0,23$ и $K = 0,52$.

Для марки ниже «500» до получения достоверных экспериментальных данных значения n' можно вычислять после определения величин предельных деформаций ползучести [23].

Как уже упоминалось выше, в настоящее время возможен подход [13] к оценке предельной величины остаточной деформации при повторной нагрузке путем вычисления предельной величины этой деформации при действии условной длительной нагрузки с напряжением, равным σ_{\max} (см. фиг. 10).

Следовательно, для предельных значений деформаций (для числа циклов, значительно больше $2 \cdot 10^6$) это отношение удобно вычислять в каждом конкретном случае после определения $\varphi_{t=\infty}$. Численное значение отношения полной деформации к первоначальной, т. е. $\varphi_{t=\infty} + 1$, и будет тем множителем, который надо ввести к n для получения значения n' ; тогда

$$n' = n(\varphi_{t=\infty} + 1). \quad (14)$$

Подставляя значение n' в расчетные уравнения, вычисляют действующие напряжения, которые затем сравниваются с расчетными сопротивлениями бетона и арматуры на выносливость; при этом расчетные сопротивления бетона вычисляются с учетом предполагаемого числа циклов нагрузки.

Предварительно напряженные железобетонные конструкции. Создание предварительного напряжения резко повышает выносливость и жесткость конструкций при воздействии повторной нагрузки. В результате предварительного напряжения снижается перепад напряжений в арматуре (т. е. она работает при значительно более высоком σ) и практически исключается появление растягивающих напряжений в бетоне растянутой зоны при эксплуатационных нагрузках.

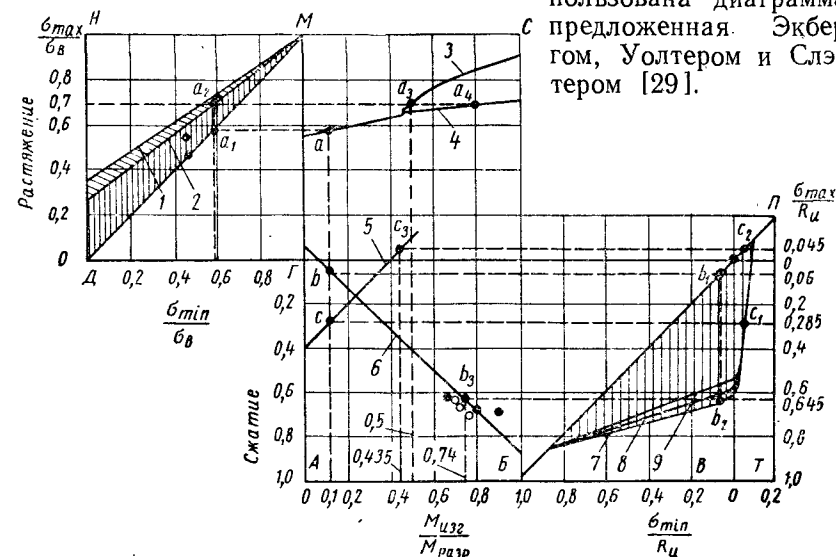
По данным Троицкого Е. А. [24], при равных нагрузках амплитуда деформаций бетона в сжатой зоне обычных ненапряженных балок была больше, чем в предварительно напряженных балках, примерно на 20%, а в растянутой зоне соответственно на 60%; амплитуда прогибов железобетонных балок в среднем была в 1,5 раза больше амплитуды прогибов предварительно напряженных балок. Кроме того, остаточные прогибы обычных железобетонных балок нарастали на всем периоде действия повторной нагрузки, в то время как для предварительно напряженных балок они быстро стабилизировались и составляли незначительную долю от упругого прогиба.

Характер разрушения предварительно напряженных конструкций при воздействии повторной нагрузки, как показывают многочисленные исследования, остается по существу таким же, как и для обычной железобетонной балки, т. е. балка может разрушаться вследствие: разрушения бетона в сжатой зоне или в зоне действия главных растягивающих напряжений; разрушения пред-

варительно напряженной арматуры; потери сцепления арматуры с бетоном.

Величина разрушающей нагрузки зависит от многих факторов, это, в первую очередь, степень предварительного напряжения, процент армирования, вид арматуры (гладкая или периодического профиля) и т. д.

Для иллюстрации работы предварительно напряженной конструкции на многократно повторную нагрузку может быть использована диаграмма, предложенная Экбергом, Уолтером и Слэттером [29].



Фиг. 17. Условная диаграмма работы предварительно напряженной конструкции на многократно повторную нагрузку:

1 — стержневая арматура; 2 — высокопрочная проволока; 3 — оптимальное армирование; 4 — излишняя арматура; 5 — бетон в растянутой зоне; 6 — бетон в сжатой зоне; 7 — $N = 2 \cdot 10^6$; 8 — $N = 10^7$; 9 — $N = 10^8$.

На фиг. 17 показаны хорошо известные диаграммы Гудмана-Джонсона для арматурной стали (в левом верхнем углу) и для бетона (в правом нижнем углу; для бетона она перевернута). Для бетона построены три кривые — экспериментальные для числа циклов 2 и 10 млн. и экстраполированная для 100 млн. циклов. Средняя часть рисунка занята условной диаграммой изменения напряжений в изгибаемом элементе арматуры и в крайних волокнах сжатого и растянутого бетона с ростом однократно прикладываемой внешней нагрузки. Величина нагрузки, отложенная по оси AB , выражена в относительных единицах и равна $\frac{M_{изг}}{M_{разр}}$; $M_{изг}$ — действующий изгибающий момент; $M_{разр}$ — разрушающий изгибающий момент при однократном нагружении.

Напряжения в бетоне и арматуре также отнесены к прочности бетона и арматуры. Помня об этом, ниже, объясняя эту диаграмму, мы позволим себе слово «относительный» применительно к нагрузкам и напряжениям в отдельных случаях опускать.

С ростом нагрузки происходит увеличение напряжений в арматуре; в бетоне происходит снижение сжимающих и появление растягивающих напряжений в крайних волокнах растянутой зоны, и увеличение сжимающих напряжений в крайних волокнах сжатой зоны. Когда напряжение превзойдет прочность бетона на растяжение, в растянутой зоне образуется трещина. В момент образования трещины происходит прирост напряжений в арматуре, после чего она некоторое время продолжает работать упруго, но при дальнейшем увеличении нагрузки до разрушающей напряжения в арматуре достигают предела текучести.

Такая картина изменения напряжений наблюдается при достаточно слабом, или, «оптимальном» армировании, когда несущая способность арматуры используется полностью.

При сильном насыщении элемента арматурой она работает упруго фактически до момента разрушения по сжатому бетону, и ее несущая способность остается значительно недоиспользованной.

Посмотрим, как будут изменяться напряжения в арматуре и в крайних волокнах бетона, если на этот элемент начнет многократно действовать изгибающий момент ($M_{изг}$), меняющий периодически свое значение от M_{min} до M_{max} (M_{min} и M_{max} — минимальный и максимальный изгибающие моменты в цикле). При рассмотрении работы конструкции на повторную нагрузку в стадии разрушения момент M_{max} является также и разрушающим моментом.

Откладываем относительную величину максимального изгибающего момента по оси нагрузок, т. е. по оси AB (зададимся, к примеру, величиной $M'_{min} = 0,1 M_{раз}$). Проводим вертикальную прямую до пересечения в точке a с линией, выражающей изменение напряжений в арматуре в верхнем среднем квадрате. Переносим величину этого напряжения на диаграмму выносливости арматуры, для чего из точки a проводим горизонтальную линию до пересечения с диагональю DM , которая представляет собой ни что иное, как линию постоянной минимальной нагрузки. На пересечении получаем точку a_1 . Опуская из точки a_1 перпендикуляр на $DГ$, найдем величину минимального напряжения $\sigma_{amin} = 0,58 \sigma_B$, действующего в арматуре при приложении $M_{min} = 0,1 M_{раз}$.

Когда несущая способность арматуры используется полностью при воздействии многократно повторной нагрузки, напряжение в ней σ_{amax} равно пределу выносливости.

При найденной величине минимального напряжения $\sigma_{amin} = 0,58 \sigma_B$ значение σ_{amax} легко будет найдено, если из точки a_2 опустим перпендикуляр на ось $ДН$; при этом найдем $\sigma_{amax} = 0,7 \sigma_B$. Точка a_2 получена в предположении, что конструкция армирована высокопрочной проволокой. При применении стержневой арматуры точка a_2 будет лежать соответственно на линии l — «стержневая арматура».

Посмотрим, какова будет величина изгибающего момента, когда максимальное напряжение в арматуре равно пределу выносливости. Для этого из точки a_2 проведем направо горизонтальную прямую до пересечения с линией арматуры и получим точку a_3 . Опуская из точки a_3 перпендикуляр на ось AB , находим величину разрушающего изгибающего момента $M'_{раз, a}$ при воздействии повторной нагрузки; его величина будет $M'_{раз, a} = 0,5 M_{раз}$.

Для переармированного сечения точка пересечения с линией арматуры попадет в a_4 , и разрушающий момент по арматуре значительно увеличится. В результате этого можно сделать вывод, что введение дополнительного количества арматуры будет улучшать работу предварительно-напряженной железобетонной конструкции на выносливость.

Посмотрим теперь, какой будет разрушающий момент по сжатому бетону при действии многократно повторной нагрузки.

Находим точку b пересечения вертикальной прямой, отстоящей от оси $АГМ$ на расстоянии $\frac{M'_{min}}{M_{раз}} = 0,1$, с линией, показывающей изменение напряжений в бетоне сжатой зоны. Из точки b проводим направо горизонтальную прямую до пересечения в точке b_1 с диагональю $БП$. Диагональ $БП$ также является линией постоянных, т. е. минимальных напряжений.

Опуская из точки b_1 перпендикуляр на ось $ТП$, найдем величину напряжения в сжатой зоне бетона $\sigma_{min} = 0,06 R_u$ при приложении момента $M'_{min} = 0,1 M_{раз}$.

При полном использовании несущей способности сжатой зоны бетона при воздействии многократно повторной нагрузки напряжения в крайних волокнах будут равны пределу выносливости бетона, величину которого при данном значении $\sigma_{b min}$ найдем, опустив перпендикуляр из точки b_2 на ось $ТП$; при этом получим $\sigma_{b max} = 0,645 R_u = R_y$.

Найдем теперь величину изгибающего момента, вызывающего в бетоне напряжение, равное R_y . Для этого из точки b_2 проводим налево горизонтальную прямую до пересечения с линией сжатого бетона в точке b_3 . Опуская из точки b_3 перпендикуляр на ось AB , найдем $M'_{раз, б} = 0,74 M_{раз}$. При армировании элемента применительно к работе на статическую нагрузку, т. е. при «оптимальном армировании», величина $M_{раз, б}$ оказывается существенно больше

величины $M'_{раз. а}$. Это указывает на то, что «оптимальное армирование» оказывается далеко не оптимальным при работе этого элемента на многократно повторную нагрузку, так как несущая способность сжатой зоны значительно недоиспользуется.

Обратимся теперь к растянутой зоне бетона. Хотя полное использование несущей способности бетона в растянутой зоне не явится причиной быстрого разрушения элемента, тем не менее оно вызовет образование трещин, которые для большинства конструкций машин будут нежелательны. Таким образом, определим величину изгибающего момента трещинообразования при воздействии многократно повторной нагрузки.

Находим точку C пересечения вертикальной прямой линии $\frac{M_{min}}{M_{раз}} = 0,1$ с линией, выражающей изменение напряжений в бетоне растянутой зоны с ростом нагрузки.

Поступая аналогично изложенному выше, находим точку c_1 , затем c_2 и, наконец, c_3 . Опуская из точек c_1 и c_2 перпендикуляры на ось $ТП$, найдем величины напряжений в бетоне растянутой зоны — растяжение $\sigma_{min} = 0,045R_u$ и сжатие $\sigma_{max} = 0,285R_u$. Опуская перпендикуляр из точки c_3 на ось $АВ$, найдем величину момента трещинообразования при действии повторной нагрузки — $M_T = 0,435 M_{раз}$. Естественно, что его величина оказалась меньше, чем разрушающие моменты по арматуре и бетону.

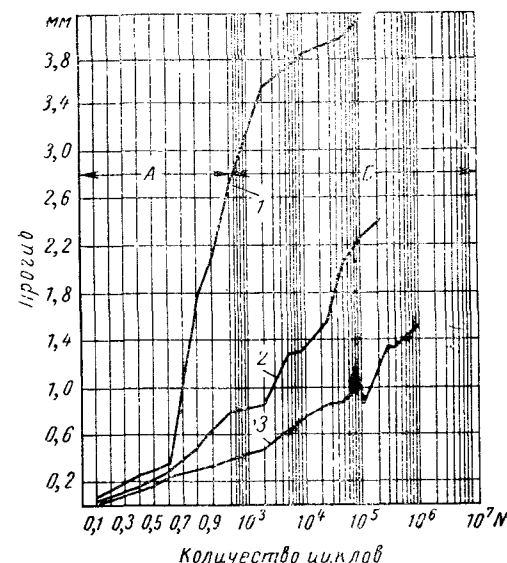
Анализируя описанную диаграмму, можно наметить мероприятия по повышению выносливости предварительно напряженных железобетонных конструкций. К ним относится, как уже указывалось, повышенное армирование растянутой зоны. Если мысленно перенесем линию работы арматуры выше, т. е. увеличим степень ее предварительного напряжения, то, очевидно, увеличится и разрушающий момент по арматуре при действии повторной нагрузки. Если увеличим обжатие растянутой зоны, т. е. на диаграмме (фиг. 17) линию 5 «бетон в растянутой зоне» опустим параллельно самой себе вниз, то пропорционально увеличится и M_T .

Влияние упомянутых мероприятий на выносливость предварительно напряженных железобетонных конструкций подтверждается и экспериментально. На этой же диаграмме нанесены данные по испытаниям образцов с напряженной спиральной обоймой, проведенные Астровой Т. И. и Брайловским М. И. (о — точки, полученные построением по диаграмме; ● — экспериментальные точки). Образцы имели сильное насыщение арматурой и разрушились по бетону. На диаграмме не показаны линии работы арматуры и бетона. От диагонали DM отложена амплитуда напряжений в арматуре, которая была меньше допустимой. Образец разрушился по бетону, причем величина разрушающей повторной нагрузки составляла 0,8 от статической.

При отсутствии предварительного напряжения линия изменения напряжения в арматуре будет исходить из нуля (из точки $Г$).

В этом случае максимальный воспринимаемый момент при работе на повторную нагрузку оказывается существенно меньше.

В опытах Ксеркавена П. [11] при увеличении степени предварительного натяжения проволоочной арматуры с $0,52\sigma_B$ до $0,78\sigma_B$ величина разрушающей повторной нагрузки при 10^6 циклах также увеличивалась с $0,53P_{раз. стат}$ до $0,8P_{раз. стат}$ (здесь $P_{раз. стат}$ — разрушающая статическая нагрузка). Повыше-



Фиг. 18. Влияние степени предварительного напряжения арматуры на развитие остаточных прогибов (f) железобетонных балок с ростом количества циклов (N) повторения нагрузки:

1 — $\sigma_0 = 0,35\sigma_B$; 2 — $\sigma_0 = 0,65\sigma_B$; 3 — $\sigma_0 = 0,8\sigma_B$; А — статические загрузки до P_{max} ; Б — пульсирующее действие нагрузки.

ние выносливости предварительно напряженных железобетонных конструкций подтверждается и экспериментально. На фиг. 18 видно, что прогибы балок с $\sigma_0 = 0,86\sigma_B$ после 10^6 циклов были в три с лишним раза меньше, чем у балок с $\sigma_0 = 0,65\sigma_B$.

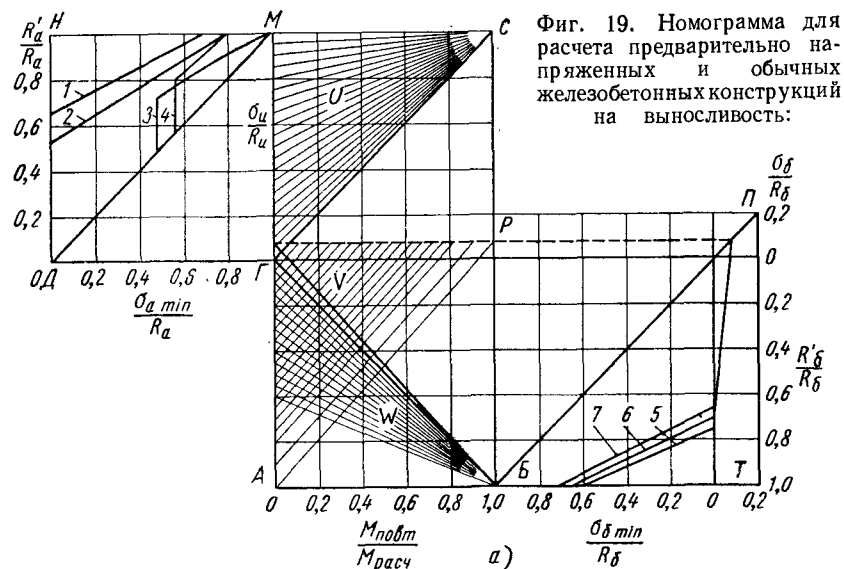
В качестве других мер, направленных на увеличение выносливости конструкций, является применение арматуры периодического профиля при натяжении ее в стадии изготовления на упоры. При натяжении арматуры на бетон, что имеет место при сооружении большинства железобетонных машин, рекомендуется применять все-таки гладкую проволоку, как обладающую лучшими показателями по выносливости, чем проволока периодического профиля. Другой важной мерой для повышения выносливости

и жесткости конструкций является инъекция каналов, в которых расположена напрягаемая арматура при натяжении ее на бетон. При отсутствии инъекции рекомендуется принимать в расчетах пониженное на 15% значение модуля упругости бетона [24].

При расчете предварительно напряженных железобетонных конструкций машин с применением высокопрочного бетона значения n' следует принимать по данным табл. 3; для прочностей, меньших 500 кг/см^2 , следует руководствоваться теми же соображениями, что и при вычислении n' для ненапряженных железобетонных конструкций, т. е. вычисляя предельную величину остаточной деформации ползучести по [23]. Очевидно, величина n' , определенная таким путем, будет содержать в себе некоторый запас. Для проверки железобетонных конструкций на выносливость авторы предлагают номограмму, которая позволяет для случая центрального сжатия и изгиба расчет на выносливость не производить, а ограничиваться расчетом только на прочность, на приведенные нагрузки.

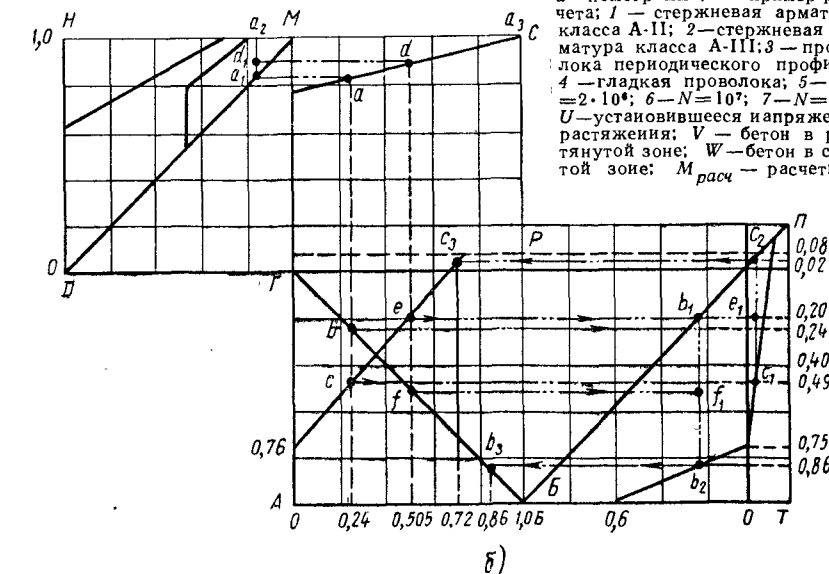
Номограмма для проверки конструкций из обычного и предварительно напряженного железобетона на выносливость при изгибе и центральном сжатии. В действующих нормах [21] и [23] расчет на выносливость обычных железобетонных конструкций ведется по уравнениям сопротивления упругих материалов, т. е. принимается, что напряжения в сжатом бетоне и растянутой арматуре изменяются линейно при изменении нагрузки от M_{\min} до M_{\max} . Работа растянутого бетона при этом не учитывается. Расчет производится на нормативные нагрузки (с использованием в необходимых случаях коэффициента динамичности). Следовательно, по абсолютной величине максимальная повторная нагрузка не может превысить статическую расчетную нагрузку. Это положение также относится и к величинам напряжений, т. е. напряжение от максимальной повторной нагрузки не может превысить напряжение от расчетной статической нагрузки и не должно превышать расчетного сопротивления бетона. Но, так как расчет на повторную нагрузку выполняется с использованием треугольной эпюры распределения напряжения, а сами величины расчетных сопротивлений бетона и арматуры на выносливость меньше, чем при расчете на однократную нагрузку, то сечение, подобранное по расчетной статической нагрузке, может не удовлетворять требованиям по выносливости.

Все изложенные нормативные положения позволяют предложить номограмму для расчета на выносливость конструкций из обычного и предварительно напряженного железобетона (фиг. 19, а). Средняя часть номограммы представляет собой условные графики изменения напряжений в арматуре (U) и бетоне (V и W). Увеличение напряжений с ростом нагрузки принято по прямым, согласно изложенному выше. Когда нагрузка равна нулю, напряжения для предварительно напряженных конструкций в арматуре



Фиг. 19. Номограмма для расчета предварительно напряженных и обычных железобетонных конструкций на выносливость:

а — номограмма; б — пример расчета; 1 — стержневая арматура класса А-II; 2 — стержневая арматура класса А-III; 3 — проволока периодического профиля; 4 — гладкая проволока; 5 — $N=2 \cdot 10^6$; 6 — $N=10^7$; 7 — $N=10^8$; U — установившееся напряжение растяжения; V — бетон в растянутой зоне; W — бетон в сжатой зоне; $M_{\text{расч}}$ — расчетный



момент внутренних сил; $M_{\text{повт}}$ — минимальный или максимальный момент при расчете конструкций на выносливость; R_a — расчетное сопротивление арматуры при расчете на прочность; R_a' — то же, при расчете на выносливость; $\sigma_a \min$, $\sigma_b \min$ — минимальные напряжения в арматуре и бетоне от повторной нагрузки; R_δ — расчетное сопротивление бетона при расчете конструкций на прочность (в зависимости от вида напряженного состояния R_{np} или R_u); R_δ — то же, при расчете конструкций на выносливость (R_{np} , R_u).

и бетоне равны установившемуся напряжению. Для ненапряженных железобетонных конструкций это будут нули или напряжения от собственного веса. По оси AB отложено отношение величины повторного момента к расчетному моменту внутренних сил (правая часть любой формулы расчета на прочность).

При построении номограммы принимается, что момент внешних сил при расчете на прочность равен моменту внутренних сил. Превышение второго над первым, естественно, идет в запас прочности. От нуля по оси AGM отложены относительные единицы напряжений, равные отношению действующего напряжения в арматуре и бетоне к расчетному сопротивлению арматуры и бетона.

Данная номограмма построена по тому же принципу, что и диаграмма на фиг. 17, с той лишь разницей, что по осям отложены расчетные относительные напряжения и нагрузки. Кроме того, поскольку трещины в предварительно напряженных конструкциях, работающих на повторную нагрузку, недопустимы, линии работы арматуры даны без всяких переломов.

Зная минимальную нагрузку, откладываем ее относительное значение по оси нагрузок AB и находим линии изменения напряжений в арматуре и бетоне, соответствующие нашему случаю.

Для ненапряженного железобетона работе арматуры соответствует на диаграмме линия $ГС$, а для сжатого бетона — $ГБ$; растянутый бетон не учитывается. Заметим, что расчет ненапряженного железобетона на выносливость не уступает по трудоемкости расчету на прочность; на номограмме же это самый простой случай, так как линии изменения напряжений $ГС$ и $ГБ$ известны заранее.

Для предварительно напряженных конструкций потребуется вычисление установившихся напряжений в арматуре и бетоне, а также вычисление отношения этих напряжений к расчетным сопротивлениям.

Как правило, вычисление установившихся напряжений в арматуре и бетоне производится при вычислении потерь предварительного напряжения в арматуре. Эти данные следует использовать при вычислении отношений $\frac{\sigma_a}{R_a}$ и $\frac{\sigma_b}{R_b}$.

По данным этих отношений находим соответствующие наклонные линии для сжатого и растянутого бетона по оси $ГА$ и арматуры по оси $ГМ$.

Проведя вертикальную прямую из значения минимальной относительной нагрузки на пересечении с найденными линиями, получаем соответствующие относительные напряжения в арматуре и бетоне для этой нагрузки. Переносим значения относительных минимальных напряжений на номограммы расчетных характеристик бетона и арматуры по выносливости и получаем величину допустимой расчетной амплитуды, максимальное значение которой сносим на среднюю часть.

Если действующая максимальная нагрузка будет меньше полученной, то сечение удовлетворяет требованиям по выносливости; в противном случае требуется пересчет.

Для иллюстрации пользования номограммой проверим выносливость преднапряженной балки, пример расчета которой содержится в работе [5]. Пользование номограммой пояснено на фиг. 19, б.

По данным указанного примера $M_{расч} = 1210 \text{ тм}$, $M'_{min} = 288,4 \text{ тм}$, $M_{max} = 610,7 \text{ тм}$.

Расчетное сопротивление арматуры из гладкой высокопрочной проволоки диаметром 5 мм $R_a = 9500 \text{ кг/см}^2$.

Установившееся напряжение в арматуре $\sigma_a = 7415 \text{ кг/см}^2$.

Установившееся напряжение сжатия в бетоне: верхней грани $\sigma'_b = 0,2 \text{ кг/см}^2$, нижней — $\sigma''_b = 164 \text{ кг/см}^2$.

Расчетное сопротивление бетона марки «400» на сжатие при изгибе $R_b = 215 \text{ кг/см}^2$.

Находим линии, по которым будет происходить изменение напряжений с ростом нагрузки, для чего вычисляем относительное напряжение сжатия бетона верхней и нижней грани:

$$K'_b = \frac{164}{215} = 0,76; \quad K''_b = \frac{0,2}{215} = 0,00093.$$

В данном примере линия изменения напряжения в крайнем волокне сжатой нижней грани практически совпадает с диагональю $ГБ$. Это совпадение, конечно, случайное. Для верхней грани эта линия расположена параллельно $АР$ и исходит из ординаты со значением 0,76 на оси $АГ$.

Относительное напряжение в арматуре

$$K_a = \frac{7415}{9500} = 0,78.$$

Находим также отношения

$$K'_{min} = \frac{288,4}{1210} = 0,24$$

и

$$K'_{max} = \frac{610,7}{1210} = 0,505.$$

Для арматуры линия изменения напряжения будет исходить из ординаты со значением 0,78 на оси $ГМ$. Затем откладываем величину 0,24 по оси AB и проводим вертикальную линию до пересечения с линией для растянутого бетона (точка c) с линией для сжатого бетона (точка b) и с линией для арматуры (точка a). Сносим полученные значения на диаграммы выносливости арматуры и бетона по прямым bb_1 , aa_1 , cc_1 . Расстояния между точками a_1 и a_2 , b_1 и b_2 , c_1 и c_2 показывают максимально допустимые амплитуды относительных напряжений в бетоне и арматуре при изменении

момента от минимума до максимума. Если снести величины полученных напряжений на исходные линии, то можно получить относительное допустимое значение максимальных моментов: по растянутому бетону $\frac{[M'_m]}{M_{расч}} = 0,72$, по сжатому бетону $\frac{[M'_b]}{M_{расч}} = 0,85$. По арматуре это отношение равно единице, так как точка a_3 совпадает с точкой c .

Условие трещиностойкости по нормальному сечению при воздействии повторной нагрузки запишется так:

$$\frac{M'_{max}}{M_{расч}} < \frac{[M'_m]}{M_{расч}},$$

условия прочности по сжатому бетону и растянутой арматуре соответственно

$$\frac{M'_{max}}{M_{расч}} < \frac{M'_b}{M_{расч}} \text{ и } \frac{M'_{max}}{M_{расч}} < \frac{M'_a}{M_{расч}}.$$

Для нашего случая сечение, рассчитанное на статическую нагрузку, удовлетворяет требованиям по выносливости арматуры и бетона и трещиностойкости растянутой зоны.

Для проверки выносливости можно обойтись и без определения отношений моментов. Для этого надо отложить по оси нагрузок (ось AB) относительное значение максимального момента (в нашем случае величину 0,505), а затем перенести точки пересечения вертикальной прямой с соответствующими наклонными линиями изменения напряжений (точки c , f и d) на правую и левую часть номограммы и убедиться, лежат ли действующие относительные амплитуды внутри максимально допустимых амплитуд или, иными словами, лежит ли отрезок b_1f_1 внутри отрезка b_1b_2 , отрезок c_1e_1 внутри c_1c_2 и отрезок a_1d_1 внутри a_1a_2 . Если действующая относительная амплитуда не превышает допустимую, то сечение удовлетворяет требованиям по выносливости.

Для иллюстрации случая, когда сечение не удовлетворяет требованиям на выносливость после статического расчета, воспользуемся примером из той же работы [5]. По данным примера

$$M_{расч} = 141,7 \text{ тм}; M'_{min} = 18,13 \text{ тм}; M'_{max} = 111,56 \text{ тм}.$$

Конструкция из обычного железобетона с арматурой из стали марки Ст. 5 (класс А-III). Сечение было подобрано по расчетному моменту 141,7 тм, процент армирования ($\mu = 1,43\%$). Проверим его на выносливость по номограмме. Фактические соотношения моментов будут

$$K'_{min} = \frac{18,13}{141,7} = 0,13; K'_{max} = \frac{111,56}{141,7} = 0,79.$$

Линий, соответствующих этому примеру, на номограмме нет, но читатель легко может провести их самостоятельно. По номо-

грамме находим, что сечение не проходит по выносливости арматуры. Аналогично это было установлено путем вычислений и в данном примере. После пересчета процент армирования по выносливости оказался равным 1,59%, расчетный момент внешних сил остался тем же, т. е. равным 141,7 тм, а расчетный момент внутренних сил увеличился до 158 тм.

Находим новые значения K :

$$K'_{min} = \frac{18,13}{158} = 0,115; K'_{max} = \frac{111,56}{158} = 0,71.$$

Смотрим по номограмме: сечение проходит по величине действующей амплитуды моментов. Следует отметить, что величина необходимого момента внутренних сил может быть найдена делением величины максимального момента (111,56 тм) на полученное по номограмме отношение допустимого максимального момента к расчетному, т. е. на 0,72.

При этом получим

$$\frac{111,56}{0,72} = 155 \text{ тм}.$$

По полученному расчетному моменту подбираем сечение статическим расчетом, увеличив соответственно количество арматуры.

Из сказанного вытекает, что проверка выносливости по номограмме должна предшествовать расчету на прочность для ненапряженных железобетонных конструкций. Зная расчетные моменты статической нагрузки $M_{расч}$ и моменты по выносливости M'_{min} и M'_{max} , находим их соотношение и проверяем по номограмме, не превышает ли полученная амплитуда допускаемую. Если действующая относительная амплитуда меньше допускаемой (по бетону и арматуре), то сечение подбирается по $M_{расч}$. Если же фактическая относительная амплитуда больше допускаемой, то вычисляется необходимый момент внутренних сил, по которому и ведется подбор сечения при статическом расчете. Полученное сечение будет удовлетворять и требованиям по выносливости.

Для предварительного напряженных конструкций, однако, потребуется сначала определить установившиеся напряжения в бетоне и арматуре, найти соответствующие им линии изменения напряжений и затем поступать, как было сделано в примере.

Для случая центрального сжатия ход рассуждений остается таким же, но вместо величин моментов надо брать соответствующие величины продольных сил.

Номограмма не охватывает проверку по выносливости внецентренно сжатых и внецентренно растянутых элементов, а также проверку по выносливости по главным растягивающим напряжениям для всех элементов.

По номограмме также не предусмотрена проверка по выносливости при действии знакопеременной нагрузки. Однако это не трудно сделать, если построить диаграмму Гудмана для арматуры и при значениях $\rho < 0$.

Выводы

1. Анализ результатов, полученных различными авторами, исследовавшими работу бетона на выносливость, позволил предложить приближенное уравнение для вычисления коэффициента $k_{об}$ с учетом числа циклов свыше $2 \cdot 10^6$, который служит для определения расчетных сопротивлений бетона при расчете конструкций на выносливость.

2. Исследования, проведенные по изучению деформаций бетона при воздействии многократно повторной нагрузки, показали, что предварительное нагружение бетона снижает его деформативность при действии повторной нагрузки. На основании полученных результатов сделаны некоторые рекомендации, учитывающие число циклов нагрузки свыше $2 \cdot 10^6$ при вычислении коэффициента n' .

3. Анализ данных, полученных при исследовании железобетонных конструкций, показал, что эти конструкции при определенных условиях могут полностью удовлетворять заданным требованиям по выносливости и деформациям.

4. Данные по характеру разрушения и величине разрушающей нагрузки при приложении повторной нагрузки к изгибающим элементам свидетельствуют о том, что элементы, армированные применительно к работе на статическую нагрузку, разрушаются, как правило, по арматуре, а не по сжатому бетону. Следовательно, воздействия повторной нагрузки требуют повышенного армирования растянутой зоны.

5. Важнейшим фактором, увеличивающим выносливость железобетонных конструкций, является создание предварительного напряжения арматуры, причем достаточно высокого — до $0,75 \sigma_B$. Поэтому конструкции, работающие на повторную нагрузку, должны быть предварительно напряженными.

6. Анализ существующего метода расчета конструкций из обычного и предварительно напряженного железобетона позволил предложить номограмму для проверки соотношения между величинами внешних повторных нагрузок и внутренних усилий.

Предлагаемый метод позволяет отказаться от расчета на выносливость для случая центрального сжатия и изгиба и ограничиться расчетом на статическую нагрузку, величина которой определяется по соотношениям, полученным из номограммы. Подбранное таким путем сечение по прочности автоматически удовлетворяется и по выносливости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берг О. Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. Госстройиздат, 1961.
2. Берг О. Я. Исследование прочности железобетонных конструкций при воздействии на них многократно повторяющейся нагрузки. Труды ЦНИИС, Вып. 19, Трансжелдориздат, 1956.
3. Берг О. Я. О выносливости железобетонных конструкций. Труды ЦНИИС, Вып. 36, Трансжелдориздат, 1960.
4. Беченев Г. В. Прочность бетона при немногочисленных повторных нагружениях. Сб. трудов ЦНИИСК, Вып. 6, Госстройиздат, 1961.
5. Евграфов Г. К. и Лялин Н. Б. Расчеты мостов по предельным состояниям. Трансжелдориздат, 1962.
6. Евграфов Г. К. и Малько М. Н. Деформации высокопрочных бетонов при многократно повторной нагрузке. — «Бетон и железобетон», 1961, № 11.
7. Карпухин Н. С. Исследование выносливости бетона в связи с расчетом мостовых конструкций по предельным состояниям. Труды МИИТ, Вып. 152, Трансжелдориздат, 1962.
8. Карпухин Н. С. Исследование выносливости железобетонных балок под воздействием многократно приложенной нагрузки. Труды МИИТ, Вып. 152, Трансжелдориздат, 1962.
9. Карпухин Н. С. Исследование выносливости бетона под воздействием многократно приложенной растягивающей нагрузки. Труды МИИТ, Вып. 152, Трансжелдориздат, 1963.
10. Каранфилов Т. С. и Волков Ю. С. Обзор исследований по прочности и деформативности бетона при многократном приложении нагрузки. Труды Гидропроекта, Сб. 10, 1963.
11. Ксеркавен П. Исследование оптимальной величины натяжения арматуры напряженно-армированных конструкций. Сб. «Применение напряженно-армированного железобетона». Изд. Министерства строительства СССР. М., 1957.
12. Петрашень Р. Н., Борисов С. И. и Кириллов А. П. Некоторые вопросы расчета облегченных сооружений на вибрационные воздействия. Труды Гидропроекта, Сб. 7, 1962.
13. Лермит Р. Проблемы технологии бетона. Госстройиздат, 1959.
14. Матаров И. А., Прокопович А. Г. и Кедров А. И. Исследование арматуры из стали марки 25Г2С (25ГС) под действием статических и многократно повторных нагрузок. Труды ЦНИИС, Вып. 37, Трансжелдориздат, 1960.
15. Матаров И. А. Исследование работы железобетонных изгибаемых элементов под многократно повторными нагрузками. Труды Всесоюзного научно-исследовательского института транспортного строительства (ЦНИИС), Вып. 21, Трансжелдориздат, 1956.
16. Миколович Б. Ф. К вопросу о повышении усталостной прочности бетона для сборных гидротехнических сооружений. Труды Гидропроекта, Сб. 7, 1962.
17. Михайлов К. В. и Городницкий Ф. М. Исследование выносливости арматуры из высокопрочной холоднотянутой проволоки. Труды НИИЖБ, Вып. 23, Госстройиздат, 1961.
18. Михайлов К. В. и Селюков В. М. О напряженном состоянии железобетонных балок при многократно повторяющихся нагрузках. — «Бетон и железобетон», 1963, № 8.
19. Михайлов К. В. и Сверчков А. Г. Выносливость арматуры в состоянии поставки и с крестовыми сварными соединениями. В книге «Экспериментально-теоретические исследования железобетонных конструкций», Госстройиздат, 1963.
20. Михайлов К. В. и Терехова Г. Б. Исследование выносливости арматурной стали марки 35 ГС. В книге «Новые виды арматуры» НИИЖБ, Госстройиздат, 1964.

21. Строительные нормы и правила. Ч. II, раздел В, гл. 1, Бетонные и железобетонные конструкции. Госстройиздат, 1962.

22. Стреляев М. И. Исследование прочности железобетонных балок под воздействием многократно повторяющихся нагрузок. — «Бетон и железобетон», 1958, № 9.

23. Технические условия проектирования железнодорожных автодорожных и городских мостов и труб (СН-200-62), Трансжелдориздат, 1962.

24. Троицкий Е. А. Исследование под пульсирующей нагрузкой работы предварительно напряженных железобетонных конструкций с мощными арматурными пучками. Труды ЦНИИС, Вып. 3, Трансжелдориздат, 1951.

25. Троицкий Е. А. Исследование вибрационной прочности мощных арматурных пучков из высокопрочной проволоки. Труды ЦНИИС, Вып. 37, Трансжелдориздат, 1960.

26. Улицкий И. И. Практический метод расчетного определения деформаций ползучести и усадки бетона. — «Бетон и железобетон», 1962, № 4.

27. Antrim J. C., McLaughlin J. F. Fatigue Study of Air — Entrained Concrete. Journal of ACI, v. 30, No 11, 1959.

28. Chang T. S., Kesler C. E. Fatigue Behavior of Reinforced Concrete Beams. Journal of ACI, v. 30, No 2, 1958.

29. Ekberg C. E., Walther R. E., Slutter R. G. Fatigue Resistance of Prestressed Concrete Beams in Bending. Journal of Structural Division. Proceedings of ASCE, v. 83, No ST4, July 1957.

30. Graf O., Brenner E. Versuche zur Ermittlung der Widerstandsfähigkeit von Beton gegen oftmals wiederholte Druck-belastung. Deutscher Ausschuss für Eisenbeton. Heft 76, 1934. Heft 83, 1936.

31. Kesler C. E. Effect of Speed of Testing on Flexural Fatigue Strength of Plain Concrete. Proceeding of Highway Research Board, v. 32, 1953.

32. Kesler C. E., Murdoc J. W. Effect of Range of Stress on Fatigue Strength of Plain Concrete Beams, Journal of ACI, v. 30, No 2, 1958.

33. Kučera K. Prispěvek k resei unavy prostehé betonu v ohybu. Inženýrské Stavby, 1960, N 4.

Инж. ГОХБАУМ Ф. А.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ К РАСЧЕТУ ТОЛСТОСТЕННЫХ И СПЛОШНЫХ ЦИЛИНДРОВ

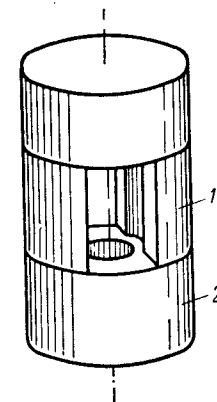
Расчет элементов в виде полых цилиндров

Применение железобетона для изготовления станин мощных гидропрессов привело к необходимости расчета массивных элементов, представляющих собой полые цилиндры, а также части полых цилиндров.

Элементы станин такой формы имеют примерно одинаковые размеры по всем направлениям (фиг. 1) и это затрудняет использование при расчете приближенных методов и гипотез, которые обычно применяются при построении технических теорий расчета оболочек, пластин и других тонкостенных конструкций.

Отмеченные обстоятельства и диктуют выбор метода расчета станин в виде полых цилиндров; метод расчета должен быть основан на использовании точных решений соответствующих задач теории упругости.

Применение методов теории упругости к расчету элементов железобетонных станин гидропрессов обосновано экспериментальными и теоретическими исследованиями. Эти исследования позволили установить, что при всестороннем предварительном обжатии, которое устраняет трещинообразование в бетоне при эксплуатационных нагрузках, зона упругой работы бетона может значительно превышать его марочную прочность. Фактические напряжения в бетоне элементов станин назначаются в большинстве случаев гораздо ниже зоны упругой работы, так как конструкции работают при многократно повторных нагрузках, и основными требованиями к конструкциям являются требования по их деформативности.

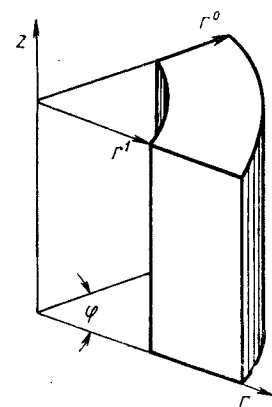


Фиг. 1. Элементы цилиндрической станины гидропресса:

1 — стенка станины;
2 — цилиндрический архитрав.

Даже при использовании методов линейной теории упругости задача расчета полых цилиндров на неосесимметричную нагрузку очень сложна, но при наличии электронных вычислительных машин имеется возможность продвинуть решение задачи до непосредственного расчета цилиндров.

При расчете массивных элементов такой формы целесообразно использовать метод начальных функций [1]—[3]. В осесимметричной задаче теории упругости метод использован в работах [4] и [5]. Сущность метода состоит в том, что в теле выбирается начальная поверхность и все напряжения и перемещения в любой точке тела выражаются через напряжения и перемещения начальной поверхности при помощи дифференциальных операторов, которые на этой поверхности образуют единичную матрицу.



Фиг. 2. К расчету полого цилиндра.

Система функций, обладающая свойством единичной матрицы, применялась в задачах теории упругости и теплопроводности для уравнений с переменными коэффициентами, образованных повторным применением бесселевых операторов, в работе [6].

В данном случае, при расчете полого цилиндра, за начальную поверхность примем боковую поверхность цилиндра $r = r^0$ (фиг. 2). Все величины, относящиеся к начальной поверхности, будем в дальнейшем называть начальными и отмечать верхним индексом 0 .

На начальной поверхности действуют три перемещения u_r^0 , u_ϕ^0 и u_z^0 , которые являются составляющими начального вектора перемещений

$$\bar{t}_u^0 = u_r^0 \bar{e}_r + u_\phi^0 \bar{e}_\phi + u_z^0 \bar{e}_z, \quad (1)$$

и три напряжения σ_r^0 , $\tau_{r\phi}^0$ и τ_{rz}^0 , которые являются составляющими начального вектора напряжений

$$\bar{t}_r^0 = \sigma_r^0 \bar{e}_r + \tau_{r\phi}^0 \bar{e}_\phi + \tau_{rz}^0 \bar{e}_z; \quad (2)$$

здесь \bar{e}_r , \bar{e}_ϕ , \bar{e}_z обозначают единичные векторы координатных осей.

Внутри тела, кроме векторов \bar{t}_u и \bar{t}_r , действуют еще два вектора напряжений

$$\begin{aligned} \bar{t}_\phi &= \tau_{\phi r} \bar{e}_r + \sigma_\phi \bar{e}_\phi + \tau_{\phi z} \bar{e}_z; \\ \bar{t}_z &= \tau_{zr} \bar{e}_r + \tau_{z\phi} \bar{e}_\phi + \sigma_z \bar{e}_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Задача заключается в построении операторов, которые бы осуществляли преобразование начальных векторов \bar{t}_u^0 и \bar{t}_r^0 в искомые

векторы \bar{t}_u , \bar{t}_r , \bar{t}_ϕ и \bar{t}_z :

$$\begin{aligned} \bar{t}_u &= T_u(\bar{t}_u^0) + T_u(\bar{t}_r^0); \quad \bar{t}_\phi = T_\phi(\bar{t}_u^0) + T_\phi(\bar{t}_r^0); \\ \bar{t}_r &= T_r(\bar{t}_u^0) + T_r(\bar{t}_r^0); \quad \bar{t}_z = T_z(\bar{t}_u^0) + T_z(\bar{t}_r^0), \end{aligned} \quad (4)$$

где T_u — матрица операторов перемещений;

T_r , T_ϕ и T_z — матрицы операторов напряжений.

Для построения операторов, во-первых, необходимо найти систему частных решений пространственной задачи теории упругости в цилиндрических координатах, т. е. перемещения и напряжения, соответствующие какому-либо напряженному состоянию цилиндра. Эта система частных решений должна обладать определенными свойствами, которые будут указаны в дальнейшем.

Во-вторых, необходимо подчинить найденную систему частных решений граничным условиям на выбранной начальной поверхности цилиндра.

Построение системы частных решений уравнений Ляме. Прежде, чем приступить к решению задачи, введем для удобства выкладок и сокращения записи новые функции и обозначения:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{E}{(1+\nu)r^0} u_r; \quad u_2 = \frac{E}{(1+\nu)r^0} u_\phi; \quad u_3 = \frac{E}{(1+\nu)r^0} u_z; \quad u_4 = \sigma_r; \\ u_5 &= \tau_{r\phi}; \quad u_6 = \tau_{rz}; \quad u_7 = \sigma_\phi; \quad u_8 = \tau_{\phi z}; \quad u_9 = \sigma_z; \\ \frac{r}{r^0} &= \varrho; \quad \frac{r'}{r^0} = \kappa; \quad \frac{z}{r^0} = \zeta; \quad \frac{\partial^n}{\partial \varrho^n} = \alpha^n; \quad \frac{\partial^n}{\partial \phi^n} = \beta^n; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} = \gamma^n; \quad \alpha^2 + \frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\beta^2}{\varrho^2} + \gamma^2 = \Delta;$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\varrho} \right) u_1 + \frac{\beta}{\varrho} u_2 + \gamma u_3 = \vartheta.$$

При решении задачи будем исходить из уравнений равновесия в перемещениях пространственной задачи теории упругости в цилиндрических координатах, которые при отсутствии массовых сил, в принятых обозначениях будут иметь вид

$$\begin{aligned} m\varrho^2\alpha\vartheta + \varrho^2\Delta u_1 - u_1 - 2\beta u_2 &= 0; \\ m\varrho\beta\vartheta + \varrho^2\Delta u_2 - u_2 + 2\beta u_1 &= 0; \\ m\varrho^2\gamma\vartheta + \varrho^2\Delta u_3 &= 0 \quad \left(m = \frac{1}{1-2\nu} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где ϑ — объемное расширение.

На боковой начальной поверхности цилиндра действуют два вектора t_u^0 и t_r^0 , имеющие шесть составляющих; поэтому для точного удовлетворения граничных условий на этой поверхности цилиндра необходимо иметь шесть линейно независимых частных решений уравнений Ляме (6).

Эти частные решения подберем таким образом, чтобы выражения напряжений и перемещений содержали переменную ξ только в показателе степени функции e^{ξ} . Такой выбор частных решений упростит операторы и расчетные формулы.

Четыре частных решения построим, используя известное решение уравнений Ляме в форме Галеркина Б. Г.

$$\begin{aligned} u_x &= 2(1-\nu) \Delta \Phi_x - \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \bar{\Phi}; \\ u_y &= 2(1-\nu) \Delta \Phi_y - \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \bar{\Phi}; \\ u_z &= 2(1-\nu) \Delta \Phi_z - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \bar{\Phi}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из трех, входящих в это решение бигармонических функций, выберем Φ_z , так как при переходе к цилиндрическим координатам она остается бигармонической.

Остальные два частных решения построим, используя решение уравнений Ляме, выраженное через три произвольные гармонические функции [7]

$$\begin{aligned} u_x &= 4(1-\nu) G_x - x \operatorname{div} \bar{G} + \bar{R} \operatorname{grad} G_x; \\ u_y &= 4(1-\nu) G_y - y \operatorname{div} \bar{G} + \bar{R} \operatorname{grad} G_y; \\ u_z &= 4(1-\nu) G_z - z \operatorname{div} \bar{G} + \bar{R} \operatorname{grad} G_z. \end{aligned} \quad (8)$$

Из этих функций также выберем одну функцию G_z , которая в цилиндрических координатах остается гармонической.

Переходя к цилиндрическим координатам, получим в принятых обозначениях

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha \gamma \Phi_z - \varrho \gamma G_z; \\ u_2 &= -\frac{\beta}{\varrho} \gamma \Phi_z; \\ u_3 &= [2(1-\nu) \Delta - \gamma^2] \Phi_z + [4(1-\nu) + \varrho \alpha] G_z. \end{aligned} \quad (9)$$

Бигармоническая функция Φ_z и гармоническая функция G_z могут быть, как указывалось выше, произвольными. Но от выбора функций зависит, насколько простыми или сложными будут все последующие этапы решения задачи и непосредственного расчета конструкции.

Известны несколько форм построения точного решения задачи о равновесии полого цилиндра в общем случае нагружения; укажем, например, работу Галеркина Б. Г. [8].

Основная трудность при решении пространственной задачи теории упругости состоит в удовлетворении условий на поверхностях тела. Ввиду того, что используемые функции являются пространственными, в общем случае расчет может привести к громоздким вычислениям, связанным с необходимостью одновремен-

ного удовлетворения условий на боковых поверхностях и на торцах цилиндра.

Эти трудности можно уменьшить, если заранее ограничить класс используемых функций и применить функции Ляме, которые являются решениями гармонического уравнения и представляют собой произведения трех функций, каждая из которых зависит от одной переменной. Задача также упрощается, если, кроме того, граничные условия на боковых поверхностях и на торцах цилиндра удовлетворяют поочередно.

В данном случае как функцию Φ_z , так и функцию G_z целесообразно применять в виде произведений двух функций: одна из них $e^{in\varphi}$ является одномерной и зависит от угловой координаты φ , а другая является двумерной, зависящей от координат ϱ и ξ . Это даст возможность использовать для решения задачи метод начальных функций.

Таким образом, функции Φ_z и G_z будут иметь вид

$$\Phi_z = e^{in\varphi} \Phi(\varrho, \gamma, n); \quad G_z = e^{in\varphi} G(\varrho, \gamma, n), \quad (10)$$

где n — произвольный параметр;

$\Phi(\varrho, \gamma, n)$ и $G(\varrho, \gamma, n)$, согласно методу символического интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных [2], являются соответственно решениями обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого и второго порядков

$$\begin{aligned} D^2 \Phi &= \left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} + \gamma^2 \right)^2 \Phi = 0; \\ DG &= \left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} + \gamma^2 \right) G = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

в которых γ рассматривается как постоянная величина.

Рассмотрим более общий случай. Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения, представляющего собой κ -ю степень оператора D ,

$$D^\kappa \Phi_\kappa = 0. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (12) удовлетворяется при подстановке функции

$$\Phi_\kappa = \sum_{m=0}^{\kappa-1} \varrho^m [C_{2m+1} J_{n+m}(\varrho\gamma) + C_{2m+2} N_{n+m}(\varrho\gamma)], \quad (13)$$

где J_{n+m} — функция Неймана; N_{n+m} — функция Бесселя.

Например,

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= C_1 J_n(\varrho\gamma) + C_2 N_n(\varrho\gamma) + \varrho [C_3 J_{n+1}(\varrho\gamma) + C_4 N_{n+1}(\varrho\gamma)] + \\ &\quad + \varrho^2 [C_5 J_{n+2}(\varrho\gamma) + C_6 N_{n+2}(\varrho\gamma)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Действительно,

$$D^3\Phi_3 = 0. \quad (15)$$

Функция (13) содержит $2k$ произвольных постоянных, соответствующих $2k$ линейно-независимым частным решениям дифференциального уравнения $2k$ порядка.

В частном случае, при k , равном двум, решение дифференциального уравнения (12) содержит четыре линейно-независимых частных решения в виде функций, зависящих от $q\gamma$,

$$qJ_{n+1}(q\gamma); \quad qN_{n+1}(q\gamma); \quad J_n(q\gamma); \quad N_n(q\gamma). \quad (16)$$

Функция $G(q, \gamma, n)$ содержит только две линейно-независимые функции

$$J_n(q\gamma); \quad N_n(q\gamma). \quad (17)$$

Любая линейная комбинация этих функций также является частным решением уравнения (12). Это позволяет подобрать также комбинации частных решений, которые приведут к наиболее простым выражениям перемещений и напряжений. В качестве таких комбинаций примем функции Ψ_i :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= J_n(q\gamma) N_n(\gamma) - N_n(q\gamma) J_n(\gamma); \\ \Psi_2 &= J_n(q\gamma) N_{n+1}(\gamma) - N_n(q\gamma) J_{n+1}(\gamma); \\ \Psi_3 &= J_{n+1}(q\gamma) N_n(\gamma) - N_{n+1}(q\gamma) J_n(\gamma); \\ \Psi_4 &= J_{n+1}(q\gamma) N_{n+1}(\gamma) - N_{n+1}(q\gamma) J_{n+1}(\gamma). \end{aligned} \quad (18)$$

Функции Ψ_i обладают важным свойством: на начальной поверхности при $q = 1$

$$\Psi_1 = \Psi_4 = 0; \quad -\gamma\Psi_2 = \gamma\Psi_3 = 1 \quad (19)$$

и это существенно облегчает удовлетворение граничных условий.

В дальнейшем потребуются формулы дифференцирования функций Ψ_i :

$$\begin{aligned} \alpha\Psi_1 &= \frac{n}{q} \Psi_1 - \gamma\Psi_3; \quad \alpha\Psi_3 = \gamma\Psi_1 - \frac{n+1}{q} \Psi_3; \\ \alpha\Psi_2 &= \frac{n}{q} \Psi_2 - \gamma\Psi_4; \quad \alpha\Psi_4 = \gamma\Psi_2 - \frac{n+1}{q} \Psi_4. \end{aligned} \quad (20)$$

Окончательно систему частных решений уравнений Ляме запишем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{q} (qn\Psi_4C_1 + n^2\Psi_2C_3 - q^2\gamma\Psi_2C_5 + *); \\ u_2 &= \frac{\beta}{q} [-q\Psi_4C_1 + (n\Psi_2 - q\gamma\Psi_4)C_3 + *]; \\ u_3 &= -n\Psi_2C_1 + \{[4(1-\nu) + n]\Psi_2 - q\gamma\Psi_4\}C_5 + *. \end{aligned} \quad (21)$$

Звездочкой обозначены «сопряженные» выражения, в которых вместо Ψ_2 и Ψ_4 следует поставить Ψ_1 и Ψ_3 , и вместо C_1, C_3, C_5 поставить C_2, C_4, C_6 , где C_1, \dots, C_6 — функции, зависящие от n, γ .

При подстановке в уравнения Ляме полученные выражения должны быть умножены на $e^{in\varphi}$.

Формулы напряжений получим, используя уравнения закона Гука. Формулы приведены в табл. 1, причем, как и в формулах перемещений, к ним должны быть добавлены «сопряженные» выражения.

Выражение решения через одну разрешающую функцию. Во многих случаях оказывается удобнее иметь выражения всех перемещений и напряжений через одну разрешающую функцию. Например, при решении плоской задачи теории упругости часто используется бигармоническая функция Эри; при решении осесимметричной задачи в цилиндрических координатах — бигармоническая функция Лява. Это дает определенные преимущества при решении задачи методом конечных разностей или при помощи электро моделирования. Кроме того, исследование самой разрешающей функции может дать представление о характере напряженного состояния конструкции.

Если использовать при решении пространственной задачи теории упругости в цилиндрических координатах одну бигармоническую функцию, то в общем случае нельзя точно удовлетворить граничные условия на боковых поверхностях и на торцах цилиндра, так как бигармоническая функция представляет на каждую пару поверхностей любого направления по четыре произвольные функции, в то время как для точного удовлетворения граничных условий их нужно иметь шесть.

Полученная система из шести линейно-независимых частных решений пространственной задачи теории упругости в цилиндрических координатах может быть выражена через одну разрешающую тригармоническую функцию Φ , т. е. функцию, удовлетворяющую уравнению $\Delta^3\Phi = 0$ [9].

Прежде, чем перейти к выражению решений через одну тригармоническую функцию, остановимся на некоторых свойствах полигармонических функций. Один из способов построения полигармонических функций для цилиндрических координат указывался выше. Теперь рассмотрим пример их использования. Для упрощения выкладок перейдем к декартовым координатам.

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \beta = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (22)$$

Порядок гармоничности функции будем отмечать нижним индексом. Например, Φ_1 — гармоническая функция; Φ_2 — бигармоническая; Φ_n — n гармоническая, т. е. $\Delta^n\Phi_n = 0$.

Уравнения Ляме в декартовых координатах запишем в виде

$$\begin{aligned} m\alpha\Phi + \Delta u_1 &= 0; \\ m\beta\Phi + \Delta u_2 &= 0; \\ m\gamma\Phi + \Delta u_3 &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

Функция	Коэффициент	C_1	C_3	C_5
u_1	$\frac{1}{Q}$	$Qn\varphi_4$	$n^2\varphi_2$	$-Q^2\gamma\varphi_2$
u_2	$\frac{\beta}{Q}$	$-Q\varphi_4$	$n\varphi_2 - Q\gamma\varphi_4$	0
u_3	1	$-n\varphi_2$	0	$[4(1-\nu) + n]\varphi_2 - Q\gamma\varphi_4$
u_4	$\frac{1}{Q^2}$	$nQ[Q\gamma\varphi_2 - (n+1)\varphi_4]$	$n^2[(n-1)\varphi_2 - Q\gamma\varphi_4]$	$Q^2\gamma\{-[n+1-2\nu]\varphi_2 + Q\gamma\varphi_4\}$
u_5	$\frac{\beta}{2Q^2}$	$-Q[Q\gamma\varphi_2 - 2(n+1)\varphi_4]$	$[2n(n-1) - Q^2\gamma^2]\varphi_2 + 2Q\gamma\varphi_4$	$-Q^2\gamma\varphi_2$
u_6	$\frac{1}{2Q}$	$-n(n\varphi_2 - 2Q\gamma\varphi_4)$	$\gamma n^2\varphi_2$	$\{[n+4(1-\nu)]n - 2Q^2\gamma^2\}\varphi_2 - 4(1-\nu)Q\gamma\varphi_4$
u_7	$\frac{1}{Q^2}$	$n(n+1)Q\varphi_4$	$-n^2[(n-1)\varphi_2 - Q\gamma\varphi_4]$	$-(1-2\nu)Q^2\gamma\varphi_2$
u_8	$\frac{\beta}{2Q}$	$-(n\varphi_2 + Q\gamma\varphi_4)$	$\gamma(n\varphi_2 - Q\gamma\varphi_4)$	$n+4(1-\nu)\varphi_2 - Q\gamma\varphi_4$
u_9	γ	$-n\varphi_2$	0	$[n+2(2-\nu)]\varphi_2 - Q\gamma\varphi_4$

Обозначение: $\varphi_i = \Psi_i e^{in\varphi}$

Предположим, что нам известно какое-либо частное решение системы уравнений (23). Пусть это будет решение, выраженное через одну скалярную гармоническую функцию,

$$u_1 = \alpha\Phi_1; \quad u_2 = \beta\Phi_1; \quad u_3 = \gamma\Phi_1; \\ \vartheta = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \Delta\Phi_1. \quad (24)$$

Подставляя (24) в уравнения (23), получим

$$(m+1)\alpha\Delta\Phi_1 = 0; \\ (m+1)\beta\Delta\Phi_1 = 0; \\ (m+1)\gamma\Delta\Phi_1 = 0. \quad (25)$$

Теперь предположим, что необходимо использовать при решении уравнений (23) бигармоническую функцию Φ_2 .

Положим,

$$\Phi_1 = (2\gamma^2 - z\gamma\Delta)\Phi_2. \quad (26)$$

В этом случае

$$u_1 = \alpha(2\gamma^2 - z\gamma\Delta)\Phi_2; \\ u_2 = \beta(2\gamma^2 - z\gamma\Delta)\Phi_2; \\ u_3 = \gamma(2\gamma^2 - z\gamma\Delta)\Phi_2. \quad (27)$$

Объемное расширение

$$\vartheta = \Delta(2\gamma^2 - z\gamma\Delta)\Phi_2 = -z\gamma\Delta^2\Phi_2. \quad (28)$$

Подставляя (27) и (28) в уравнения (23), будем иметь

$$-(m+1)\alpha z\gamma\Delta^2\Phi_2 = 0; \\ -(m+1)\beta z\gamma\Delta^2\Phi_2 = 0; \\ -(m+1)\gamma z\gamma\Delta^2\Phi_2 = 0, \quad (29)$$

где Φ_2 — бигармоническая функция; поэтому все уравнения тождественно удовлетворяются.

Следовательно, оператор

$$(2\gamma^2 - z\gamma\Delta) \quad (30)$$

позволил применить бигармоническую функцию вместо гармонической. В рассмотренном примере можно было применить другие операторы:

$$(2\alpha^2 - x\alpha\Delta); \quad (2\beta^2 - y\beta\Delta). \quad (31)$$

Оператор, составленный из суммы трех введенных выше операторов, уже не позволяет применить бигармоническую функцию вместо гармонической.

Действительно, сумма операторов будет

$$(2 - \bar{R} \text{ grad}) \Delta. \quad (32)$$

Оператор Δ просто понижает гармоничность функции на один порядок, а $\Delta^n (\bar{R} \text{ grad } \Phi_n) = 0$, где \bar{R} — радиус-вектор точки.

Если любой из операторов применить два раза, то вместо гармонической можно поставить тригармоническую функцию. Многократное применение оператора обозначим как символическое произведение; тогда можно записать операторы в виде

$$\begin{aligned} \prod_{k=m}^n (\chi \alpha \Delta - 2k \alpha^2); \quad \prod_{k=m}^n (y \beta \Delta - 2k \beta^2); \\ \prod_{k=m}^n (z \gamma \Delta - 2k \gamma^2) \quad (m, n = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (33)$$

Если $\Delta^{n+1} \Phi_{n+1} = 0$, то

$$\begin{aligned} \Delta^n \left[\prod_{k=m}^n (\chi \alpha \Delta - 2k \alpha^2) \Phi_{n+1} \right] &= 0; \\ \Delta^m \left[\prod_{k=m}^n (y \beta \Delta - 2k \beta^2) \Phi_{n+1} \right] &= 0; \\ \Delta^m \left[\prod_{k=m}^n (z \gamma \Delta - 2k \gamma^2) \Phi_{n+1} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Операторы предоставляют возможность использовать при решении уравнений Ляме функции любого порядка гармоничности. Если решение уравнений Ляме первоначально выражено через гармонические функции, то принимаем $m = 1$, если через бигармонические, то принимаем $m = 2$ и т. д.

В цилиндрических координатах получим два оператора и соответственно будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta^m \left\{ \prod_{k=m}^n [(\rho \alpha - 2k) \Delta + 2k \gamma^2] \Phi_{n+1} \right\} &= 0; \\ \Delta^m \left\{ \prod_{k=m}^n (z \gamma \Delta - 2k \gamma^2) \Phi_{n+1} \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Проделав эти предварительные вычисления, нетрудно выразить решение уравнений Ляме через одну тригармоническую функцию.

Тригармоническую функцию перемещений Φ удобно ввести через две вспомогательные бигармонические функции ξ и η :

$$\xi = [\rho \alpha + 2(1 - 2\nu)] \Delta + 4\gamma^2 \Phi; \quad \eta = 2(1 - \nu) \Delta \Phi. \quad (36)$$

Вектор перемещений, при выражении его через две скалярные бигармонические функции ξ и η , может быть записан

$$\bar{U} = \text{grad } \xi - \bar{Z}. \quad (37)$$

Бигармонический вектор \bar{Z} в цилиндрических координатах имеет вид

$$\bar{Z} = \rho \Delta \eta \bar{e}_r + 2\gamma \eta \bar{e}_z. \quad (38)$$

Угловая составляющая вектора \bar{Z} равна нулю, следовательно, вектор расположен в вертикальной плоскости r, z .

В проекциях на оси цилиндрических координат получаем следующую запись вектора перемещений:

$$u_1 = \alpha \xi - \rho \Delta \eta; \quad u_2 = \frac{\beta}{\rho} \xi; \quad u_3 = \gamma (\xi - 2\eta). \quad (39)$$

При подстановке выражений (39) в уравнения равновесия (6) последние переходят в одно тригармоническое уравнение для функции Φ .

Объемное расширение ϑ выражается через функции ξ и η следующим образом:

$$\vartheta = -(1 - 2\nu) \Delta (\xi - 2\eta). \quad (40)$$

Имея выражения перемещений (39), нетрудно получить формулы напряжений, воспользовавшись уравнениями закона Гука. Напряжения также удобно записать через функции ξ и η :

$$\begin{aligned} u_4 &= -\nu \vartheta + \alpha^2 \xi - (1 + \rho \alpha) \Delta \eta; \\ u_5 &= \frac{\beta}{\rho^2} \left[(\rho \alpha - 1) \xi - \frac{\rho^2}{2} \Delta \eta \right]; \\ u_7 &= -\nu \vartheta + \frac{1}{\rho^2} [(\gamma^2 + \rho \alpha) \xi - \rho^2 \Delta \eta]; \\ u_8 &= \frac{\beta \gamma}{\rho} (\xi - \eta); \quad u_9 = -\nu \vartheta + \gamma^2 (\xi - 2\eta); \\ u_6 &= \gamma \left[\alpha (\xi - \eta) - \frac{\rho}{2} \Delta \eta \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Нетрудно заметить, что выражения (39) и (41) подчиняются дифференциальным соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta^4 \rho^2 u_4 &= 0; \quad \Delta^3 \rho^2 u_7 = \Delta^3 \rho^2 u_5 = \Delta^3 \rho u_1 = \Delta^3 \rho u_6 = 0; \\ \Delta^2 \rho u_2 &= \Delta^2 \rho u_8 = \Delta^2 u_3 = \Delta^2 u_9 = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Следовательно, из всех перемещений и напряжений только две функции (u_z — вертикальное перемещение и σ_z — нормальное напряжение по оси z) являются бигармоническими. Среднее

арифметическое трех нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{1}{3} (u_4 + u_7 + u_9) = -\frac{1+\nu}{3} \Delta (\xi - 2\eta) \quad (43)$$

и объемное расширение Φ [уравнение (40)] являются гармоническими функциями.

Тригармоническую функцию Φ запишем в виде

$$\Phi = \sum_1^{\infty} A_n \Phi_n e^{in\varphi}, \quad (44)$$

где A_n — произвольные постоянные.

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_n = & \frac{1}{16(1-\nu)\gamma^3} [C_1 (\{\varrho^2\gamma^2 - n[n+2(1-2\nu)]\} \Psi_2 - 2\varrho\gamma\Psi_4) + \\ & + C_3\gamma (\{\varrho^2\gamma^2 - n(n-2)\} \Psi_2 - 2\varrho\gamma\Psi_4) - C_5 (\{\varrho^2\gamma^2 - \\ & - [n^2 + 2(3-4\nu)n + 8(1-\nu)(1-2\nu)]\} \Psi_2 + \\ & + 2(3-4\nu)\varrho\gamma\Psi_4 + *]. \end{aligned} \quad (45)$$

Зная функцию Φ_n , нетрудно вычислить две бигармонические функции ξ и η , через которые выражаются перемещения и напряжения

$$\begin{aligned} \xi = & -\varrho (C_1\Psi_4 + C_2\Psi_3 - C_3\alpha\Psi_3 - C_4\alpha\Psi_1); \\ \eta = & \frac{1}{2\gamma} \{(C_1 + \gamma C_3)\varrho\alpha\Psi_2 + (C_2 + \gamma C_4)\varrho\alpha\Psi_1 - \\ & - [\varrho\alpha + 4(1-\nu)](C_5\Psi_2 + C_6\Psi_1)\}. \end{aligned} \quad (46)$$

По выражениям (39) и (41) через функции ξ и η можно получить формулы перемещений (21) и напряжений (табл. 1).

Построение дифференциальных операторов метода начальных функций в цилиндрических координатах. Формулы перемещений и напряжений содержат шесть функций C_i (γ, n), которые должны быть определены из граничных условий на начальной поверхности цилиндра, при $\varrho = 1$:

$$\begin{aligned} u_1 = u_1^0; \quad u_2 = u_2^0; \quad u_3 = u_3^0; \\ u_4 = u_4^0; \quad u_5 = u_5^0; \quad u_6 = u_6^0. \end{aligned} \quad (47)$$

Приравняв ϱ единице в выражениях составляющих векторов перемещений и напряжений на начальной поверхности, получим для определения шести функций C_i систему из шести линейных алгебраических уравнений. Систему запишем в виде матрицы.

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	Свободные члены
0	n	$-n^2$	0	γ	0	γu_1^0
0	-1	$-n$	$-\gamma$	0	0	$\frac{\gamma}{\beta} u_2^0$
n	0	0	0	$-4(1-\nu) - n$	$-\gamma$	γu_3^0
$-n\gamma$	$-n(n+1)$	$-n^2(n-1)$	$-\gamma n^2$	$\gamma[n+(1-2\nu)]$	γ^2	γu_4^0
γ	$2(n+1)$	$-2n(n-1) + \gamma^2$	2γ	γ	0	$\frac{2\gamma}{\beta} u_5^0$
n^2	$2n\gamma$	$-\gamma n^2$	0	$-n^2 - 4(1-\nu)n + 2\gamma^2$	$-4(1-\nu)\gamma$	$2\gamma u_6^0$

Матрица имеет простой вид, что явилось следствием отмеченных выше свойств функций Ψ_i на начальной поверхности. Определитель системы

$$D = 8(1-\nu)^2 n^2 \gamma^5. \quad (48)$$

Выражения C_i приведены в табл. 2.

Подставив выражения C_i из табл. 2 в систему частных решений пространственной задачи теории упругости в цилиндрических

Таблица 2

Выражения произвольных функций, найденных из граничных условий на начальной поверхности цилиндра

Функ- ции	u_1^0	$\frac{1}{\beta} u_2^0$	γu_3^0	u_4^0	$\frac{1}{2\beta} u_5^0$	$\frac{\gamma}{2} u_6^0$
DC_1	$-[m + n(1+n) - \gamma^2]\gamma^2$	$(m+n+1)n^2\gamma^2$	$-(l+n)\gamma^2$	$-(m+n)\gamma^3$	$n^2\gamma^2$	$-\gamma^2$
DC_2	$[m(1-n)n + (l+1)\gamma^2]\gamma$	$[m(1-n) - \gamma^2]n^2\gamma$	$(nl + \gamma^2)\gamma$	$(nm + \gamma^2)\gamma$	$mn^2\gamma$	$n\gamma$
DC_3	$[m(1-n) - \gamma^2]\gamma$	$m(1-n)n\gamma$	$l\gamma$	$m\gamma$	$mn\gamma$	γ
$-DC_4$	$2m(1-n)n + (l+1-n)\gamma^2$	$[2nm(1-n) + l\gamma^2]n$	$2nl + \gamma^2$	$2nm + \gamma^2$	$2mn^2$	$2n$
DC_5	$-n\gamma^2$	$n^3\gamma^2$	$-n\gamma^2$	$-n\gamma^2$	0	0
DC_6	$-(n^2 - \gamma^2 - n)n\gamma$	$(1-n)n^3\gamma$	$n^2\gamma$	$n^2\gamma$	$n^3\gamma$	$-n\gamma$
$D = 2(1-\nu)n\gamma^3; \quad l = 2(1-\nu) - n; \quad m = 2l + n$						

координатах, приведенную в табл. 1, запишем выражения перемещений и напряжений

$$u_n = \sum_{k=1}^6 L_{nk} u_k^0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots, 9). \quad (49)$$

Здесь через L_{nk} обозначены дифференциальные операторы метода начальных функций в цилиндрических координатах. Выражения операторов приведены в табл. 3—10 в виде матриц.

Аналогичную форму записи можно принять и для выражений ϑ , σ и тригармонической функции Φ :

$$\vartheta = \sum_{k=1}^6 L_{\vartheta k} u_k^0; \quad \sigma = \sum_{k=1}^6 L_{\sigma k} u_k^0; \quad \Phi = \sum_{k=1}^6 L_{\Phi k} u_k^0. \quad (50)$$

Операторы, которые входят в матрицы T_u и T_r , названы основными; операторы, входящие в матрицы T_φ и T_z , названы дополнительными. Остальные операторы названы вспомогательными (табл. 11).

На начальной поверхности основные операторы образуют единичную матрицу. Матрица дополнительных операторов на начальной поверхности приведена в табл. 12.

При $n = 0$ матрица основных операторов распадается на две. Первая представляет собой матрицу операторов при симметричном относительно оси распределении напряжений без кручения, вторая относится к случаю чистого кручения цилиндра, находящегося под воздействием осесимметричной нагрузки $\tau_{r\varphi}$, или осесимметричного перемещения u_φ .

Операторы устанавливают однозначное соответствие между шестью начальными функциями $u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0, u_5^0, u_6^0$, относящимися к начальной боковой поверхности цилиндра $\varrho = 1$, и девятью искомыми функциями внутри тела при произвольно выбранном $\varrho = \text{const}$, а также шестью искомыми функциями, относящимися к конечной боковой поверхности цилиндра $\varrho = k$.

Операторы образуют систему из шести линейно независимых частных решений пространственной задачи теории упругости в цилиндрических координатах и тождественно удовлетворяют как уравнения равновесия (в перемещениях или в напряжениях), так и уравнения совместности деформаций при каждой из шести начальных функций.

Операторы, приведенные в табл. 3—10, представляют собой линейные комбинации функций Ψ_i , каждая из которых умножена на полином, зависящий от ϱ, γ, n . Можно показать, что $\Psi_1, \Psi_4, \gamma\Psi_2, \gamma\Psi_3$ являются целыми функциями от γ^2 ; причем Ψ_1 и Ψ_4 являются четными функциями, а Ψ_2 и Ψ_3 — нечетными. Все полиномы, на которые умножаются функции Ψ_i , также являются целыми функциями от γ^2 , поэтому все $2(1 - \nu)\gamma^2$ -кратные операторы метода начальных функций в цилиндрических координатах — целые

Таблица 3

Матрица основных $(l + n)\gamma^2$ -кратных операторов перемещений $T_u(u^0)$

L	Коэффи- циент	u_r^0	1	u_φ^0	2	u_z^0	3
u_r	$\frac{\varphi_1}{\varrho}$ $\frac{\gamma\varphi_2}{\varrho}$ $\frac{\gamma\varphi_3}{\gamma^2\varphi_4}$	$n(n-1)[2mn + (1 + \varrho^2)\gamma^2] - \gamma^2(nl + \varrho^2\gamma^2)$ $-n[m(n-1) + \gamma^2] + \varrho^2\gamma^2$ $-mn(n-1) + (l+1)\gamma^2$ $-m-n(n+1) + \gamma^2$	$- \beta[(n-1)(2mn + \varrho^2\gamma^2) - l\gamma^2]$ $\beta[m(n-1) + \varrho^2\gamma^2]$ $\beta[m(n-1) + \gamma^2]$ $-\beta(m+n+1)$	$-\gamma n[2ln + \gamma^2(1 + \varrho^2)]$ $\gamma(ln + \varrho^2\gamma^2)$ $\gamma(nl + \gamma^2)$ $-\gamma(l+n)$			
1							
u_φ	$\frac{\varphi_1}{\varrho}$ $\frac{\gamma\varphi_2}{\varrho}$ $\frac{\gamma\varphi_3}{\gamma^2\varphi_4}$	$\beta[(n-1)(2mn + \gamma^2) - l\gamma^2]$ $-\beta[(n-1)m + \gamma^2]$ $-\beta[(n-1)m + \gamma^2]$ $\beta[m+n+1]$	$n[2mn(n-1) - l\gamma^2]$ $-mn(n-1)$ $-mn(n-1) + (l+n)\gamma^2$ $-m-n(n+1)$	$-\beta\gamma(2ln + \gamma^2)$ $\beta\gamma l$ $\beta\gamma l$ $\beta\gamma$			
2							
u_z	$\gamma\varphi_1$ $\gamma^2\varphi_2$ $\varrho\gamma^2\varphi_3$ $\varrho\gamma^2\varphi_4$	$-(n-1)(2n^2 - \gamma^2) + (l+2n)\gamma^2$ $n(n-1) - \gamma^2$ $n(n-1) - \gamma^2$ 1	$\beta[2n(n-1) - \gamma^2]$ $-\beta(n-1)$ $-\beta(n-1)$ β	$\gamma[n(l+3n) - \gamma^2]$ $-\gamma(l+2n)$ $-\gamma n$ γ			
3							

Обозначение: $\varphi_i = \Psi e^{in\varphi}$

Обозначение: $\varphi_i = \Psi_i \varrho^{in\varphi}$

Матрица основных $(l+n) \gamma^2$ -кратных операторов напряжений $T_r (l^0_u)$

L	Коэффициент	u_r^0	1	u_ϕ^0	2	u_z^0	3
4	$\frac{\varphi_1}{Q^2}$	$(n-1)[2mn^2(n-1) - (l+1-n) \times (1+Q^2)n\gamma^2 - 2Q^2\gamma^4]$	$-\beta \{ (n-1)[2mn(n-1) - l\gamma^2 - (l+1-n)Q^2\gamma^4] \}$	$-\beta \{ (n-1)[2mn(n-1) - l\gamma^2 - (l+1-n)Q^2\gamma^4] \}$	$-\gamma \{ n(n-1)(2ln + \gamma^2) + [n(2n-1) - \gamma^2]Q^2\gamma^2 \}$		
	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q^2}$	$-\{ n(n-1)[m(n-1) + \gamma^2] + [l+n^2+1-\gamma^2]Q^2\gamma^2 \}$	$\beta [m(n-1)^2 - (l+n+1)\gamma^2 + (n-1)Q^2\gamma^2]$	$\beta [m(n-1)^2 - (l+n+1)\gamma^2 + (n-1)Q^2\gamma^2]$	$\gamma (n-1)(ln + Q^2\gamma^2)$		
	$\frac{\gamma\varphi_3}{Q}$	$-\{ n(n-1)[m(n-1) + Q^2\gamma^2] + [l+n^2+1-Q^2\gamma^2]\gamma^2 \}$	$\beta [m(n-1)^2 - (l+n+1)\gamma^2 + (n-1)Q^2\gamma^2]$	$\beta [m(n-1)^2 - (l+n+1)\gamma^2 + (n-1)Q^2\gamma^2]$	$\gamma [n(n-1)l - (1-nQ^2)\gamma^2]$		
	$\frac{\gamma^2\varphi_4}{Q}$	$m(n^2+1) + n(n+1)^2 - (1+Q^2)\gamma^2$	$\beta [2m + (1+n)^2 - Q^2\gamma^2]$	$\beta [2m + (1+n)^2 - Q^2\gamma^2]$	$\gamma [l + n(n+1) - Q^2\gamma^2]$		
5	$\frac{\varphi_1}{Q^2}$	$\beta \{ (n-1)[2mn(n-1) - (l-n+1)\gamma^2 - lQ^2\gamma^2] - Q^2\gamma^4 \}$	$n(n-1)[2mn(n-1) - (1+Q^2)\gamma^2] + \frac{l-n}{2}Q^2\gamma^4$	$\beta \gamma \left[-(n-1)(2ln + \gamma^2) + \frac{l-n}{2}Q^2\gamma^2 \right]$			

Продолжение табл. 4

L	Коэффициент	u_r^0	1	u_ϕ^0	2	u_z^0	3
$\tau_{r\phi}$	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q^2}$	$-\beta [m(n-1)^2 + (n-1)\gamma^2 - (l+n+1)Q^2\gamma^2]$	$-mn(n-1)^2 - (l+n^2+n)Q^2\gamma^2$	$\beta \gamma [l(n-1) + Q^2\gamma^2]$			
	$\frac{\gamma\varphi_3}{Q}$	$-\beta [m(n-1)^2 - (l+2)\gamma^2]$	$-mn(n-1)^2 - (l+n^2+n)\gamma^2$	$\beta \gamma [l(n-1) + \gamma^2]$			
	$\frac{\gamma^2\varphi_4}{Q}$	$-\beta [2m + (n+1)^2 - \gamma^2]$	$m(n^2+1) + n(n+1)^2$	$-\beta \gamma (l + n + 1)$			
6	$\frac{\gamma\varphi_1}{Q}$	$n(n-1)(2ln + Q^2\gamma^2) + [n(2n-1) - Q^2\gamma^2]\gamma^2$	$-\beta \left[(n-1)(2ln + Q^2\gamma^2) - \frac{l-n}{2}\gamma^2 \right]$	$-\gamma n \left[n \frac{l-3n}{2} + (1+Q^2)\gamma^2 \right]$			
	$\frac{\gamma^2\varphi_2}{Q}$	$-n(n-1)l - (n-Q^2)\gamma^2$	$\beta [l(n-1) + Q^2\gamma^2]$	$-\gamma [n^2 - Q^2\gamma^2]$			
	$\gamma^2\varphi_3$	$-n(n-1)l - (n-1)\gamma^2$	$\beta [l(n-1) + \gamma^2]$	$-\gamma [n^2 - \gamma^2]$			
	$\gamma^3\varphi_4$	$-l - n(n+1) + \gamma^2$	$-\beta [l + n + 1]$	0			

Обозначение: $\varphi_i = \Psi_i e^{in\phi}$

Матрица дополнительных $(l+n)$ γ^2 -кратных операторов напряжений $T_\varphi(l^0_u)$

L	Коэффициент	u_r^0	u_φ^0	u_z^0
$\tau_{\varphi r}$	$\frac{\varphi_1}{Q^2}$	$\beta \{ (n-1) [2mn(n-1) - (l-n+1)\gamma^2 - lQ^2\gamma^2] - Q^2\gamma^4 \}$	$n(n-1) [2mn(n-1) - (1+Q^2)\gamma^2] + \frac{l+n}{2} Q^2\gamma^4$	$-\beta\gamma \left[(n-1)(2ln+\gamma^2) - \frac{l-n}{2} Q^2\gamma^2 \right]$
	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q^2}$	$-\beta [m(n-1)^2 + (n-1)\gamma^2 - (l+n+1)Q^2\gamma^2]$	$-mn(n-1)^2 - (l+n^2+n)Q^2\gamma^2$	$\beta\gamma [l(n-1) + Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma\varphi_3}{Q}$	$-\beta [m(n-1)^2 - (l+2)\gamma^2]$	$-mn(n-1)^2 - (l+n^2+n)\gamma^2$	$\beta\gamma [l(n-1) + \gamma^2]$
	$\frac{\gamma^2\varphi_4}{Q}$	$-\beta [2m + (n+1)^2 - \gamma^2]$	$m(n^2+1) + n(n+1)^2$	$-\beta\gamma (l+n+1)$
σ_φ	$\frac{\varphi_1}{Q^2}$	$-n(n-1) [2mn(n-1) - (l-n+1)\gamma^2] + (l+n-1) \times [n(n-1) - \gamma^2] Q^2\gamma^2$	$\beta(n-1) [2mn(n-1) - (l+n-1)Q^2\gamma^2]$	$\gamma n [2ln + \gamma^2(n-1) - (l+n-1)Q^2\gamma^2]$

Продолжение табл. 5

L	Коэффициент	u_r^0	u_φ^0	u_z^0
σ_φ	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q^2}$	$(n-1)n [m(n-1) + \gamma^2] + (l+n-1)Q^2\gamma^2$	$-\beta [m(n-1)^2 - (l+n-1)Q^2\gamma^2]$	$-\gamma [ln(n-1) - (l+n-1)Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma\varphi_3}{Q}$	$mn(n-1)^2 + (l+n^2+1)\gamma^2$	$-\beta [m(n-1)^2 - (l+n+1)\gamma^2]$	$-\gamma [ln(n-1) - \gamma^2]$
	$\frac{\gamma^2\varphi_4}{Q}$	$-m(n^2+1) - n(n+1)^2 + \gamma^2$	$-\beta [(n+1)^2 + 2m]$	$-\gamma [l + n^2 + n]$
$\tau_{\varphi z}$	$\frac{\gamma\varphi_1}{Q}$	$\beta [2ln(n-1) + (2n-1)\gamma^2]$	$n \left[2ln(n-1) - \frac{l-n}{2} \gamma^2 \right]$	$-\beta\gamma \left[\frac{3}{2} n^2 \left(\frac{l}{3n} - 1 \right) + \gamma^2 \right]$
	$\frac{\gamma^2\varphi_2}{Q}$	$-\beta [l(n-1) + \gamma^2]$	$-ln(n-1)$	$-\beta\gamma n$
	$\gamma^2\varphi_3$	$-\beta [l(n-1) + \gamma^2]$	$-ln(n-1) + \frac{l+n}{2} \gamma^2$	$\beta\gamma \frac{l-n}{2}$
	$\gamma^3\varphi_4$	$\beta (l+n+1)$	$-(l+n^2+n)$	$\beta\gamma$
Обозначения: $\varphi_i = \Psi_i e^{in\varphi}$				

Матрица дополнительных $(l+n)$ γ^2 -кратных операторов напряжений $T_z (i_u^0)$

L	Коэффициент	u_r^0	u_φ^0	u_z^0
τ_{zr}	$\frac{\gamma\varphi_1}{Q}$ $\frac{\gamma^2\varphi_2}{Q}$ $\gamma^3\varphi_3$ $\gamma^3\varphi_4$	$n(n-1)(2nl + Q^2\gamma^2) + \gamma^2[n(2n-1) - Q^2\gamma^2]$ $-n(n-1)l - (n-Q^2)\gamma^2$ $-n(n-1)l - (n-1)\gamma^2$ $-l - n(n+1) + \gamma^2$	$-\beta[(n-1)(2ln + Q^2\gamma^2) - \frac{l-n}{2}\gamma^2]$ $\beta[l(n-1) + Q^2\gamma^2]$ $\beta[l(n-1) + \gamma^2]$ $-\beta(l+n+1)$	$-\gamma n \left[n \frac{l-3n}{2} + (1+Q^2)\gamma^2 \right]$ $-\gamma(n^2 - Q^2\gamma^2)$ $-\gamma(n^2 - \gamma^2)$ 0
$\tau_{z\varphi}$	$\frac{\gamma\varphi_1}{Q}$ $\frac{\gamma^2\varphi_2}{Q}$ $\gamma^2\varphi_3$ $\gamma^3\varphi_4$	$\beta[2nl(n-1) + (2n-1)\gamma^2]$ $-\beta[l(n-1) + \gamma^2]$ $-\beta[l(n-1) + \gamma^2]$ $\beta(l+n+1)$	$n \left[2nl(n-1) - \frac{l-n}{2}\gamma^2 \right]$ $-nl(n-1)$ $-nl(n-1) + \frac{l+n}{2}\gamma^2$ $-(l+n^2+n)$	$-\beta\gamma \left[\frac{3}{2}n^2 \left(\frac{l}{3n} - 1 \right) + \gamma^2 \right]$ $-\beta\gamma n$ $\beta\gamma \frac{l-n}{2}$ $\beta\gamma$
σ_z	$\gamma^2\varphi_1$ $\gamma^3\varphi_2$ $Q\gamma^3\varphi_3$ $Q\gamma^4\varphi_4$	$n(n-1)(l-n-2) + (2n+1)\gamma^2$ $l+n^2-2-\gamma^2$ $n(n-1)-\gamma^2$ 1	$-\beta[(n-1)(l-n-2) + \gamma^2]$ $\beta(l-1)$ $-\beta(n-1)$ β	$\gamma[2n(n+1) - \gamma^2]$ $-\gamma(n+2)$ $-\gamma n$ γ

Обозначение: $\varphi_i = \Psi_i e^{in\varphi}$ Матрица основных $(l+n)$ γ^2 -кратных операторов перемещений $T_u (i_r^0)$

L	Коэффициент	σ_r^0	$\tau_{r\varphi}^0$	τ_{rz}^0
u_r	$\frac{\varphi_1}{Q}$ $\frac{\gamma\varphi_2}{Q}$ $\gamma\varphi_3$ $\gamma^2\varphi_4$	$-n[2mn + (1+Q^2)\gamma^2]$ $mn + Q^2\gamma^2$ $mn + \gamma^2$ $-m-n$	$\beta(2mn + Q^2\gamma^2)$ $-\beta m$ $-\beta m$ $-\beta$	$-\gamma(2n^2 - Q^2\gamma^2)$ γn γn $-\gamma$
u_φ	$\frac{\varphi_1}{Q}$ $\frac{\gamma\varphi_2}{Q}$ $\gamma\varphi_3$ $\gamma^2\varphi_4$	$-\beta(2mn + \gamma^2)$ βm βm β	$-2mn^2$ mn mn $-(m+n)$	$-2\beta\gamma n$ $\beta\gamma$ $\beta\gamma$ 0
u_z	$\gamma\varphi_1$ $\gamma^2\varphi_2$ $Q\gamma^2\varphi_3$ $Q\gamma^3\varphi_4$	$2n^2 - \gamma^2$ $-n$ $-n$ 1	$-2\beta n$ β β 0	$-\gamma(m+3n)$ γ γ 0

Обозначение: $\varphi_i = \Psi_i e^{in\varphi}$

Матрица основных $(l+n)$ γ^2 -кратных операторов напряжений $T_r \begin{pmatrix} l \\ n \end{pmatrix}$

L	Коэффици- циент	σ_r^0	τ_{rz}^0	τ_{φ}^0
σ_r	$\frac{\varphi_1}{Q^2}$	$-n(n-1)[2mn+(1+Q^2)\gamma^2]+$ $+(ln+\gamma^2)Q^2\gamma^2$	$-\gamma[2n^2(n-1)-(l+3n-1)Q^2\gamma^2]$	$\beta[2mn(n-1)-$ $-(l-n+1)Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q^2}$	$mn(n-1)-(l+1)Q^2\gamma^2$	$\gamma[n(n-1)-Q^2\gamma^2]$	$-\beta[m(n-1)+Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma\varphi_3}{Q}$	$mn(n-1)-(1-Q^2n)\gamma^2$	$\gamma[n(n-1)-Q^2\gamma^2]$	$-\beta[m(n-1)+Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma^2\varphi_4}{Q}$	$m+n(n+1)-Q^2\gamma^2$	γ	$\beta(m+n+1)$
$\tau_{r\varphi}$	$\frac{\varphi_1}{Q^2}$	$-\beta[(n-1)(2mn+\gamma^2)-lQ^2\gamma^2]$	$-\beta\gamma[2n(n-1)-Q^2\gamma^2]$	$-n[2mn(n-1)-lQ^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q^2}$	$\beta[m(n-1)+Q^2\gamma^2]$	$\beta\gamma(n-1)$	$[mn(n-1)-(l+n)Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma\varphi_3}{Q}$	$\beta[m(n-1)+\gamma^2]$	$\beta\gamma(n-1)$	$mn(n-1)$
	$\frac{\gamma^2\varphi_4}{Q}$	$-\beta[m+n+1]$	$-\beta\gamma$	$m+n(n+1)$
τ_{rz}	$\frac{\gamma\varphi_1}{Q}$	$-n[2nl+(1+Q^2)\gamma^2]$	$-\gamma[n(l+3n)-Q^2\gamma^2]$	$\beta(2nl+Q^2\gamma^2)$
	$\frac{\gamma^2\varphi_2}{Q}$	$nl+Q^2\gamma^2$	γn	$-\beta l$
	$\frac{\gamma^2\varphi_3}{Q}$	$nl+\gamma^2$	$\gamma(l+2n)$	$-\beta l$
	$\frac{\gamma^3\varphi_4}{Q}$	$-(l+n)$	$-\gamma$	$-\beta$

Обозначение: $\varphi_l = \Psi e^{ln\varphi}$ Матрица дополнительных $(l+n)$ γ^2 -кратных операторов напряжений $T_{\varphi} \begin{pmatrix} l \\ n \end{pmatrix}$

L	Коэффици- циент	σ_r^0	$\tau_{r\varphi}^0$	τ_{rz}^0
$\tau_{\varphi r}$	$\frac{\varphi_1}{Q^2}$	$-\beta[(n-1)(2mn+\gamma^2)-lQ^2\gamma^2]$	$-n[2mn(n-1)-lQ^2\gamma^2]$	$-\beta\gamma[2n(n-1)-Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q^2}$	$\beta[m(n-1)+Q^2\gamma^2]$	$mn(n-1)-(l+n)Q^2\gamma^2$	$\beta\gamma(n-1)$
	$\frac{\gamma\varphi_3}{Q}$	$\beta[m(n-1)+\gamma^2]$	$mn(n-1)$	$\beta\gamma(n-1)$
	$\frac{\gamma^2\varphi_4}{Q}$	$-\beta[m+n+1]$	$m+n(n+1)$	$-\beta\gamma$
σ_{φ}	$\frac{\varphi_1}{Q^2}$	$n[(n-1)(2mn+\gamma^2)-(l+n-1)Q^2\gamma^2]$	$-\beta[2mn(n-1)-(l+n-1)Q^2\gamma^2]$	$\gamma[2n^2(n-1)+(l+n-1)Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q^2}$	$-mn(n-1)+(l+n-1)Q^2\gamma^2$	$\beta m(n-1)$	$-\gamma n(n-1)$
	$\frac{\gamma\varphi_3}{Q}$	$-mn(n-1)+\gamma^2$	$\beta m(n-1)$	$-\gamma n(n-1)$
	$\frac{\gamma^2\varphi_4}{Q}$	$-(m+n^2+n)$	$-\beta(m+n+1)$	$-\gamma$
$\tau_{\varphi z}$	$\frac{\gamma\varphi_1}{Q}$	$-\beta(2nl+\gamma^2)$	$-2ln^2$	$-\beta\gamma(l+3n)$
	$\frac{\gamma^2\varphi_2}{Q}$	βl	nl	$\beta\gamma$
	$\frac{\gamma^2\varphi_3}{Q}$	βl	nl	$\beta\gamma$
	$\frac{\gamma^3\varphi_4}{Q}$	β	$-(l+n)$	0

Обозначение: $\varphi_l = \Psi e^{ln\varphi}$

Таблица 10
Матрица дополнительных $(l+n)$ γ^2 -кратных операторов напряжений
 $T_z \begin{pmatrix} l^0 \\ r \end{pmatrix}$

L	Коэффициент	σ_r^0	$\tau_{r\varphi}^0$	τ_{rz}^0
τ_{2r}	$\frac{\gamma\varphi_1}{\varrho}$	$-n[2nl + (1+\varrho^2)\gamma^2]$	$\beta(2nl + \varrho^2\gamma^2)$	$-\gamma[n(l+3n) - \varrho^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma^2\varphi_2}{\varrho}$	$nl + \varrho^2\gamma^2$	$-\beta l$	γn
	$\gamma^2\varphi_3$	$nl + \gamma^2$	$-\beta l$	$\gamma(l+2n)$
	$\gamma^3\varphi_4$	$-(l+n)$	$-\beta$	$-\gamma$
$\tau_{2\varphi}$	$\frac{\gamma\varphi_1}{\varrho}$	$-\beta(2nl + \gamma^2)$	$-2n^2l$	$-\beta\gamma(l+3n)$
	$\frac{\gamma^2\varphi_2}{\varrho}$	βl	nl	$\beta\gamma$
	$\gamma^2\varphi_3$	βl	nl	$\beta\gamma$
	$\gamma^2\varphi_4$	β	$-(l+n)$	0
σ_z	$\gamma^2\varphi_1$	$-[n(l-n-2) + \gamma^2]$	$\beta(l-n-2)$	$-\gamma(l+3n+2)$
	$\gamma^3\varphi_2$	$l-2$	β	γ
	$\varrho\gamma^3\varphi_3$	$-n$	β	γ
	$\varrho\gamma^4\varphi_4$	1	0	0
Обозначение: $\varphi_l = \Psi_l e^{in\varphi}$				

Таблица 11
Вспомогательные операторы: $T_\varphi, T_\sigma, T_\varphi = (l+n) \gamma^2$ -кратные

L	Коэффициент	u_r^0	u_φ^0	u_z^0	σ_r^0	$\tau_{r\varphi}^0$	τ_{rz}^0
Φ	$\frac{\varphi_1}{\beta\gamma}$	$2\beta[2n(n-1) \times (l-n) - (l-2n-1)\gamma^2 + (n-1)\varrho^2\gamma^2]$	$-[8n^2(n-1)^2 - n(3n-2)\gamma^2 - 2n(n-1) \times \varrho^2\gamma^2 + \varrho^2\gamma^4]$	$\beta\gamma[n(n-6n-2) - 2\gamma^2 - \varrho^2\gamma^2]$	$2\beta[4n(n-1) - \gamma^2 - \varrho^2\gamma^2]$	$n[4n(n-1) - \varrho^2\gamma^2]$	$-\beta\gamma \times (m+4n-2)$
	$\frac{\varphi_2}{\beta}$	$2\beta[2(n-1)^2 - \gamma^2 - \varrho^2\gamma^2]$	$2[2n(n-1)^2 + \varrho^2\gamma^2]$	$-2\beta\gamma(l+3n-2)$	$-4\beta(n-1)$	$-[2n(n-1) - \varrho^2\gamma^2]$	$\beta\gamma$
	$\frac{\varrho\varphi_3}{\beta}$	$4\beta[(n-1)^2 - \gamma^2]$	$2[2n(n-1)^2 + \gamma^2]$	$-2\beta\gamma(2n-1)$	$-4\beta(n-1)$	$-2n(n-1)$	$2\beta\gamma$
	$\frac{\varrho\gamma}{\beta} \varphi_4$	8β	$-4n(n^2+1)$	$4\beta\gamma n$	4β	-2	0
Φ	$2\gamma^2\varphi_1$	$-(l+n-1) \times [n(n-1) - \gamma^2]$	$\beta(l+n-1) \times (n-1)$	$\gamma(l+n-1)n$	$(l+n-1)n$	$-(l+n-1)\beta$	$-(l+n-1)\gamma$
	$2\gamma^3\varphi_2$	$-(l+n-1)$	$-\beta(l+n-1)$	$-\gamma(l+n-1)$	$-(l+n-1)$	0	0
σ	$\gamma^2\varphi_1$	$(l+n-4) \times [n(n-1) - \gamma^2]$	$-\beta(l+n-4) \times (n-1)$	$-\gamma(l+n-4)n$	$-(l+n-4)n$	$(l+n-4)\beta$	$(l+n-4)\gamma$
	$\gamma^3\varphi_2$	$l+n-4$	$\beta(l+n-4)$	$\gamma(l+n-4)$	$(l+n-4)$	0	0
Обозначение: $\varphi_l = \Psi_l e^{in\varphi}$							

Таблица 12

Матрица $(l+n)$ γ^2 -кратных дополнительных операторов на начальной поверхности

L	u_r^0	u_ϕ^0	u_z^0	σ_r^0	$\tau_{\phi r}^0$	τ_{zr}^0
σ_ϕ	2	2β	$-\gamma(l+n-2)$	$-(l+n-2)$	0	0
σ_z	$-(l+n-2)$	$-\beta(l+n-2)$	2γ	$-(l+n-2)$	0	0
$\tau_{\phi z}$	0	$\gamma \frac{l+n}{2}$	$\beta \frac{l+n}{2}$	0	0	0
Φ	0	0	$2(l+n-1)$	0	$-\frac{\gamma}{\beta}$	1
θ	$2(l+n-1)$	$2\beta(l+n-1)$	$2\gamma(l+n-1)$	$2(l+n-1)$	0	0
σ	$-(l+n-4)$	$\beta(l+n-4)$	$-\gamma(l+n-4)$	$-(l+n-4)$	0	0

функции от γ^2 . Нечетные операторы относятся к перемещению u_z и к касательным напряжениям τ_{rz} и $\tau_{\phi z}$; остальные операторы — четные.

Очень важно, что операторы, представляющие собой бесконечные операционные ряды, содержат возрастающие производные по ζ , но не содержат переменных ζ ; содержат возрастающие степени q , но не содержат производных по q . Этим объясняются некоторые ценные свойства операторов, которые будут рассмотрены ниже.

Все операторы действуют на начальные функции u_α^0 , не зависящие от q , но вид начальных функций определяется структурой функций Ляме в цилиндрических координатах. Поэтому части функций, зависящие от ζ , представляют собой показательные функции $e^{t_m \zeta}$, где t_m могут быть любыми комплексными числами.

Рассматривая свойства операторов, следует иметь в виду, что оператор берется от показательной функции $e^{t_m \zeta}$.

Основные свойства операторов удобнее всего проследить на простейших примерах. Прежде всего возьмем оператор бесконечно высокого порядка $J_0(q\gamma)$ от функции $e^{t\zeta}$. Для этого представим функцию $J_0(q\gamma)$ в виде разложения в степенной ряд:

$$J_0(q\gamma) e^{t\zeta} = \left(1 - \frac{q^2 \gamma^2}{2^2 1!^2} + \frac{q^4 \gamma^4}{2^4 2!^2} - \dots\right) e^{t\zeta} \quad (51)$$

и затем почленно возьмем операцию, записанную в скобках, от $e^{t\zeta}$. В результате этого вместо γ^n в круглых скобках появятся степени t^n , а оператор $J_0(q\gamma)$ перейдет в функцию Бесселя от (qt) :

$$J_0(q\gamma) e^{t\zeta} = e^{t\zeta} J_0(qt). \quad (52)$$

Теперь возьмем оператор $J_0(q\gamma)$ от произведения $\lambda e^{t\zeta}$, где λ — число или любая функция, не зависящая от ζ :

$$J_0(q\gamma) \lambda e^{t\zeta} = e^{t\zeta} \left(\lambda - \lambda \frac{q^2 \gamma^2}{2^2 1!^2} + \lambda \frac{q^4 \gamma^4}{2^4 2!^2} - \dots \right). \quad (53)$$

Вынося λ за скобки, получим

$$J_0(q\gamma) \lambda e^{t\zeta} = \lambda e^{t\zeta} J_0(qt). \quad (54)$$

Значит оператор $J_0(q\gamma)$ обладает свойством однородности.

Аналогичным способом докажем, что оператор $J_0(q\gamma)$ обладает свойством аддитивности. Для этого возьмем оператор от суммы двух функций $e^{t\zeta} + e^{s\zeta}$

$$J_0(q\gamma) (e^{t\zeta} + e^{s\zeta}) = \left(e^{t\zeta} + e^{s\zeta} - e^{t\zeta} \frac{q^2 \gamma^2}{2^2 1!^2} - e^{s\zeta} \frac{q^2 \gamma^2}{2^2 1!^2} + e^{t\zeta} \frac{q^4 \gamma^4}{2^4 2!^2} + e^{s\zeta} \frac{q^4 \gamma^4}{2^4 2!^2} - \dots \right). \quad (55)$$

Разобьем стоящий в скобках степенной ряд на два ряда, один из которых содержит общий множитель $e^{t\zeta}$, а другой $e^{s\zeta}$, и вынесем из каждого общие множители. В результате получим

$$e^{t\zeta} \left(1 - \frac{q^2 \gamma^2}{2^2 1!^2} + \frac{q^4 \gamma^4}{2^4 2!^2} - \dots \right) + e^{s\zeta} \left(1 - \frac{q^2 \gamma^2}{2^2 1!^2} + \frac{q^4 \gamma^4}{2^4 2!^2} - \dots \right) = e^{t\zeta} J_0(qt) + e^{s\zeta} J_0(qs). \quad (56)$$

Следовательно,

$$J_0(q\gamma) (e^{t\zeta} + e^{s\zeta}) = e^{t\zeta} J_0(qt) + e^{s\zeta} J_0(qs), \quad (57)$$

что и требовалось доказать. Значит $J_0(q\gamma)$ — линейный дифференциальный оператор.

Перечисленными свойствами обладают также операторы

$$J_n(q\gamma); \quad N_n(q\gamma); \quad \sin q\gamma; \quad \cos q\gamma.$$

Рассмотрим теперь свойства произведения операторов. Например, возьмем оператор $J_1(q\gamma) N_0(\gamma)$ от той же функции $e^{t\zeta}$. Для этого не нужно представлять каждый из операторов в виде степенного ряда и производить перемножение рядов. Возьмем сначала оператор $N_0(\gamma)$ от $e^{t\zeta}$, а затем оператор $J_1(q\gamma)$ от полученного выражения

$$J_1(q\gamma) [N_0(\gamma) e^{t\zeta}] = J_1(q\gamma) e^{t\zeta} N_0(t). \quad (58)$$

В силу однородности оператора $J_1(q\gamma)$ выносим функцию $N_0(t)$ за знак оператора и окончательно получим

$$J_1(q\gamma) N_0(\gamma) e^{t\zeta} = e^{t\zeta} J_1(qt) N_0(t). \quad (59)$$

Нетрудно видеть, что результат будет аналогичным, если изменить порядок взятия операторов от функции $e^{t\zeta}$:

$$N_0(\gamma) [J_1(q\gamma) e^{t\zeta}] = N_0(\gamma) [e^{t\zeta} J_1(qt)] = e^{t\zeta} J_1(qt) N_0(t). \quad (60)$$

Следовательно, произведение операторов коммутативно:

$$J_1(\gamma) N_0(\gamma) e^{t\zeta} = N_0(\gamma) J_1(\gamma) e^{t\zeta}. \quad (61)$$

Приведем без доказательства другие свойства произведения операторов. Произведение ассоциативно, т. е.

$$[J_0(\gamma) N_0(\gamma)] N_1(\gamma) e^{t\zeta} = J_0(\gamma) [N_0(\gamma) N_1(\gamma)] e^{t\zeta}. \quad (62)$$

Произведение дистрибутивно относительно сложения

$$\begin{aligned} J_0(\gamma) [N_1(\gamma) + J_1(\gamma)] e^{t\zeta} = \\ = J_0(\gamma) N_1(\gamma) e^{t\zeta} + J_0(\gamma) J_1(\gamma) e^{t\zeta}. \end{aligned} \quad (63)$$

Отмеченные свойства операторов полностью относятся к функциям Ψ_i и операторам L_{nk} из табл. 3—10. Поэтому в дальнейшем будем иметь в виду, что

$$\begin{aligned} \Psi_i(q, \gamma, n) e^{t\zeta} &= e^{t\zeta} \Psi_i(q, t, n); \\ L_{nk}(q, \gamma, n) e^{t\zeta} &= e^{t\zeta} L_{nk}(q, t, n). \end{aligned} \quad (64)$$

Если рассматривать совокупность операторов L_{nk} как множество и учесть, что произведение операторов принадлежит к этому же множеству, то можно сказать, что операторы образуют коммутативное кольцо относительно операций сложения и умножения.

Хотя всюду в дальнейшем эти операторы мы будем применять только к функциям вида $e^{t\zeta}$ или их линейным комбинациям, заметим, что их можно применять и к функциям более общего вида, допускающим определенные оценки на производные. Эти оценки должны быть такими, чтобы обеспечить сходимость возникающих рядов. На всем этом классе функций операторы будут, очевидно, однородными и аддитивными (т. е. линейными).

Перечисленные свойства операторов будут использованы в дальнейшем при построении расчетных формул. Эти свойства позволяют обращаться с операторами как с алгебраическими величинами, производя сложение их, умножение и другие алгебраические действия, что и даст нам возможность в дальнейшем находить частные решения некоторых уравнений. Такой вид операторов был обусловлен выбором функции Φ , удовлетворяющей уравнению $\Delta^2 \Phi = 0$. Между тем, решение этого уравнения можно представить и в другом виде.

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах может быть записано в виде:

$$(d^2 + \gamma^2) \Phi_1 = 0; \quad d^2 = \left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \right). \quad (65)$$

В этом случае символическое решение уравнения (65) будет

$$\Phi_1 = (C_1 \sin d\zeta + C_2 \cos d\zeta) e^{in\varphi}. \quad (66)$$

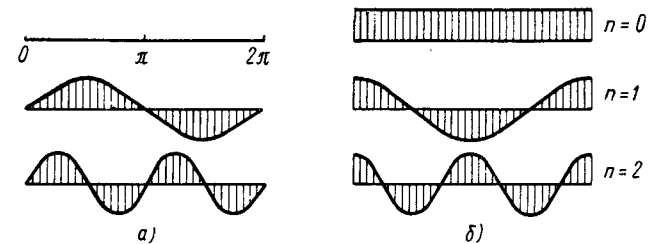
Тригармоническая функция может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & \left[(C_1 \zeta^2 + C_3 \zeta + C_5) \frac{1}{d} \sin d\zeta + \right. \\ & \left. + (C_2 \zeta^2 + C_4 \zeta + C_6) \cos d\zeta \right] e^{in\varphi}. \end{aligned} \quad (67)$$

Из выражения (67) видно, что операторы, построенные при помощи такой функции, не обладали бы свойством коммутативности, так как

$$d \sin d\zeta \neq \sin d\zeta d. \quad (68)$$

Ниже будет показано, что выбранная ранее тригармоническая функция Φ позволяет построить класс однородных решений для



Фиг. 3. Графики функции $e^{in\varphi}$ (при $n = 0; 1$ и 2):

$a - \text{Im} e^{in\varphi}; \quad б - \text{Re} e^{in\varphi}.$

цилиндров с ненагруженной боковой поверхностью. Но эта функция уже не может быть использована при построении однородных решений для цилиндров с ненагруженными торцами. Для такой задачи пришлось бы использовать тригармоническую функцию в форме (67).

Однако использование функции приведет к чрезвычайно громоздким выкладкам и поэтому удобнее с самого начала перейти к декартовым координатам, к задаче о равновесии упругого слоя, ограниченного круговой цилиндрической поверхностью [2].

В этом случае дифференциальные операторы будут обладать всеми перечисленными выше свойствами.

В заключение остановимся на некоторых свойствах операторов при различных значениях параметра n .

Начнем с простейшего случая, когда n принимает целые положительные значения чисел натурального ряда:

$$n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (69)$$

Каждый столбец матриц операторов определяет некоторое напряженное состояние при любом n . Характер изменения напряжений и перемещений в цилиндре в зависимости от угла φ дает показательная функция $e^{in\varphi}$. Графики функции при различных n показаны на фиг. 3 в виде развертки по координате φ .

2(1 - ν)-кратные операторы при n = 0 (осесимметричный случай)

L	Коэффициент	u_r^0	u_z^0	σ_r^0	τ_{rz}^0
u_r	$\gamma \varphi_1$	$-\gamma$	0	0	1
	$\gamma \varphi_2$	1	γ	1	0
	$\gamma \varphi_3$	$3 - 2\nu$	γ	1	0
	φ_4	$-4(1 - \nu) + \gamma^2$	$-\gamma \cdot 2(1 - \nu)$	$-4(1 - \nu)$	$-\gamma$
u_z	φ_1	$\gamma(1 - 2\nu)$	$-\gamma^2$	$-\gamma$	$-4(1 - \nu)$
	$\gamma \varphi_2$	$-\gamma$	$-2(1 - \nu)$	0	1
	$\gamma \varphi_3$	$-\gamma$	0	0	1
	$\gamma \varphi_4$	1	γ	1	0
σ_r	$\gamma \varphi_1$	2γ	γ^2	γ	$1 - 2\nu$
	$\gamma \varphi_2$	$-(3 - 2\nu) + \gamma^2$	$-\gamma$	$-(3 - 2\nu)$	$-\gamma$
	$\frac{\gamma \varphi_3}{\varrho}$	$-(3 - 2\nu) + \gamma^2 \varrho^2$	$-\gamma$	-1	$-\varrho^2 \gamma$
	$\frac{\varphi_4}{\varrho}$	$4(1 - \nu) - (1 + \varrho^2) \gamma^2$	$\gamma[2(1 - \nu) - \gamma^2 \varrho^2]$	$4(1 - \nu) - \gamma^2 \varrho^2$	γ
τ_{rz}	$\gamma^2 \varphi_1$	$-\gamma$	0	0	1
	$\gamma \varphi_2$	γ	γ^2	γ	0
	$\gamma \varphi_3$	γ	γ^2	γ	$2(1 - \nu)$
	$\gamma \varphi_4$	$-2(1 - \nu) + \gamma^2$	0	$-2(1 - \nu)$	$-\gamma$
σ_φ	$\gamma \varphi_1$	$-\gamma(1 - 2\nu)$	0	0	$1 - 2\nu$
	$\gamma \varphi_2$	$1 - 2\nu$	$\gamma(1 - 2\nu)$	$1 - 2\nu$	0
	$\frac{\gamma \varphi_3}{\varrho}$	$3 - 2\nu$	γ	1	0
	$\frac{\varphi_4}{\varrho}$	$-4(1 - \nu) + \gamma^2$	$-\gamma \cdot 2(1 - \nu)$	$-4(1 - \nu)$	$-\gamma$
σ_z	$\gamma \varphi_1$	γ	$-\gamma^2$	$-\gamma$	$-2(2 - \nu)$
	$\gamma \varphi_2$	$-2\nu - \gamma^2$	-2γ	-2ν	γ
	$\gamma^2 \varphi_3$	$-\gamma$	0	0	1
	$\gamma^2 \varphi_4$	1	γ	1	0
Обозначение: $\varphi_i = \Psi_i$					

При $n = 0$, как отмечалось выше, получаем осесимметричную задачу для полого цилиндра. Матрицы операторов приведены в табл. 13. В табл. 14 приведены матрицы операторов при $n = 1$. Они представляют интерес при расчете цилиндрических элементов прессов на несамоуравновешенную нагрузку. Случай, когда $n = 2$, важен, например, для расчета цилиндрической станины пресса с двумя проемами в стенах, расположенных по оси симметрии (см. фиг. 1).

При выборе тригармонической функции мы ограничились значениями параметра n числами натурального ряда, но если снова просмотреть все выкладки, нетрудно заметить, что это ограничение можно было бы и не делать. Решение задачи остается в силе для более общего случая, при любом конечном действительном или комплексном n . Однако, при нецелом n все цилиндрические функции второго рода в решении следует заменить цилиндрическими функциями первого рода отрицательного индекса.

Ввиду того, что при нецелом n нарушаются условия цикличности функции $e^{in\varphi}$, решения задачи имеют смысл лишь для сектора полого цилиндра (фиг. 1, б).

При $n = 1/2$, или целому числу с половиной, входящие в решение цилиндрические функции переходят в тригонометрические.

Введение разрешающих функций. Формулы (49) позволяют определить напряжения и перемещения в любой точке цилиндра при известных начальных функциях u_k^0 .

Предположим сначала, что напряжения на начальной поверхности, при $\varrho = 1$, равны нулю:

$$u_4^0 = u_5^0 = u_6^0 = 0, \quad (70)$$

а перемещения мы задали в виде рядов Фурье по переменной ζ , с неопределенными коэффициентами. Тогда при каждом n получим на конечной поверхности $\varrho = \kappa$ распределение напряжений и перемещений, определяемое формулами (49), причем все функции также будут выражаться рядами Фурье.

Разложив нагрузку, приложенную к поверхности $\varrho = \kappa$, в двойной ряд Фурье по переменным φ и ζ , можно найти неопределенные коэффициенты в разложениях для перемещений и решить краевую задачу для цилиндра с одной нагруженной и другой не-нагруженной боковой поверхностью.

Ввиду того, что начальной поверхностью может быть как внутренняя, так и наружная боковая поверхность цилиндра, можно рассмотреть напряженное состояние полого цилиндра, нагруженного произвольной нормальной и касательной нагрузками на обеих боковых поверхностях.

Рассмотренный метод решения задачи о равновесии полого цилиндра имеет существенный недостаток: мы не можем распоряжаться граничными условиями на торцах цилиндра. Поэтому этот

(l + n)-кратные операторы при n = 1

L	Коэффициент	u_r^0	u_φ^0	u_z^0	σ_r^0	τ_{rz}^0	$\tau_{r\varphi}^0$
u_r	$\frac{\varphi_1}{Q}$	$-\gamma^2[(1-2v)+Q^2\gamma^2]$	$\beta\gamma^2(1-2v)$	$-\gamma[2(1-2v)+\gamma^2(1+Q^2)]$	$-[2(3-4v)+\gamma^2(1+Q^2)]$	$-\gamma(2-Q^2\gamma^2)$	$\beta[2(3-4v)+Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q}$	$-\gamma^2(1-Q^2)$	$\beta\gamma^2Q^2$	$\gamma[(1-2v)+Q^2\gamma^2]$	$(3-4v)+Q^2\gamma^2$	γ	$-\beta(3-4v)$
	$\frac{\gamma\varphi_3}{\gamma^2\varphi_4}$	$\gamma^2(1-v)$	$\beta\gamma^2$	$\gamma[(1-2v)+\gamma^2]$	$(3-4v)+\gamma^2$	γ	$-\beta(3-4v)$
	$\gamma^2\varphi_4$	$-[(5-4v)-\gamma^2]$	$-\beta(5-4v)$	$-\gamma^2(1-v)$	$-4(1-v)$	$-\gamma$	$-\beta$
u_φ	$\frac{\varphi_1}{Q}$	$-\beta\gamma^2(1-2v)$	$-\gamma^2(1-2v)$	$-\beta\gamma[2(1-2v)+\gamma^2]$	$-\beta[2(3-4v)+\gamma^2]$	$-2\beta\gamma$	$-2(3-4v)$
	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q}$	$-\beta\gamma^2$	0	$\beta\gamma(1-2v)$	$\beta(3-4v)$	$\beta\gamma$	$3-4v$
	$\frac{\gamma\varphi_3}{\gamma^2\varphi_4}$	$-\beta\gamma^2$	$\gamma^2(1-v)$	$\beta\gamma(1-2v)$	$\beta(3-4v)$	$\beta\gamma$	$3-4v$
	$\gamma^2\varphi_4$	$\beta(5-4v)$	$-(5-4v)$	$\beta\gamma$	β	0	$-4(1-v)$
u_z	$\frac{\gamma\varphi_1}{\gamma\varphi_2}$	$\gamma^2(3-2v)$	$-\beta\gamma^2$	$\gamma[2(2-v)-\gamma^2]$	$2-\gamma^2$	$-2\gamma(3-2v)$	-2β
	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q\gamma^2\varphi_3}$	$-\gamma^2$	0	$-\gamma(3-2v)$	-1	γ	β
	$\frac{Q\gamma^2\varphi_3}{Q\gamma^3\varphi_4}$	$-\gamma^2$	0	$-\gamma$	-1	γ	β
	$Q\gamma^3\varphi_4$	1	β	γ	1	0	0

Продолжение табл. 14

L	Коэффициент	u_r^0	u_φ^0	u_z^0	σ_r^0	τ_{rz}^0	$\tau_{r\varphi}^0$
σ_r	$\frac{\varphi_1}{Q^2}$	0	$\beta\gamma^4Q^2$	$-\gamma^3Q^2(1-v)$	$\gamma^2Q^2[(1-2v)+\gamma^2]$	$\gamma^3Q^2(3-2v)$	$-\beta\gamma^3Q^2(1-2v)$
	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q^2}$	$Q^2\gamma^2(\gamma^2-(3-2v))$	$-\beta\gamma^2Q^2(3-2v)$	0	$-\gamma^2Q^2(1-v)$	$-\gamma^3Q^2$	$-\beta\gamma^2Q^2$
	$\frac{\gamma\varphi_3}{Q}$	$\gamma^2[Q^2\gamma^2-(3-2v)]$	$-\beta\gamma^2(3-2v)$	$-\gamma^3(1-Q^2)$	$-\gamma^2(1-Q^2)$	$-\gamma^3Q^2$	$-\beta\gamma^2Q^2$
	$\frac{\gamma^2\varphi_4}{Q}$	$[2(5-4v)-\gamma^2(1+Q^2)\gamma^2]$	$\beta[2(5-4v)-Q^2\gamma^2]$	$\gamma[(3-2v)-Q^2\gamma^2]$	$(5-4v)-Q^2\gamma^2$	γ	$\beta(5-4v)$
τ_{rz}	$\frac{\gamma\varphi_1}{Q}$	$\gamma^2(1-Q^2\gamma^2)$	$-\beta\gamma^2v$	$\gamma[(1+v)-(1+Q^2)\gamma^2]$	$-[2(1-2v)+\gamma^2(1+Q^2)]$	$-\gamma[2(2-2v)-Q^2\gamma^2]$	$\beta[2(1-2v)+Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma^2\varphi_2}{Q}$	$-\gamma^2(1-Q^2)$	$\beta\gamma^2Q^2$	$-\gamma(1-Q^2\gamma^2)$	$[(1-2v)+Q^2\gamma^2]$	γ	$-\beta(1-2v)$
	$\frac{\gamma^2\varphi_3}{\gamma^3\varphi_4}$	0	$\beta\gamma^2$	$-\gamma(1-\gamma^2)$	$[(1-2v)+\gamma^2]$	$\gamma(3-2v)$	$-\beta(1-2v)$
	$\gamma^3\varphi_4$	$-[(3-2v)-\gamma^2]$	$-\beta(3-2v)$	0	$-2(1-v)$	$-\gamma$	$-\beta$
$\tau_{r\varphi}$	$\frac{\varphi_1}{Q^2}$	$-\beta\gamma^4Q^2$	$\gamma^4Q^2(1-v)$	$-\beta\gamma^3Q^2v$	$\beta\gamma^2Q^2(1-2v)$	$\beta\gamma^3Q^2$	$\gamma^2Q^2(1-2v)$
	$\frac{\gamma\varphi_2}{Q^2}$	$\beta\gamma^2(3-2v)Q^2$	$-\gamma^2Q^2(3-2v)$	$\beta\gamma^3Q^2$	$\beta\gamma^2Q^2$	0	$-\gamma^2Q^2(1-v)$

L	Коэффициент	u_r^0	u_ϕ^0	u_z^0	σ_r^0	τ_{rz}^0	$\tau_{r\phi}^0$
$\tau_{r\phi}$	$\frac{\gamma\varphi_3}{Q}$ $\frac{\gamma^2\varphi_4}{Q}$	$\beta\gamma^2(3-2\nu)$ $-\beta[2(5-4\nu)-\gamma^2]$	$-\gamma^2(3-2\nu)$ $2(5-4\nu)$	$\beta\gamma^3$ $-\beta\gamma(3-2\nu)$	$\beta\gamma^2$ $-\beta(5-4\nu)$	0 $-\beta\gamma$	0 $5-4\nu$
σ_ϕ	$\frac{\varphi_1}{Q^2}$ $\frac{\gamma\varphi_2}{Q^2}$ $\frac{\gamma\varphi_3}{Q}$ $\frac{\gamma^2\varphi_4}{Q}$	$-\gamma^4Q^2(1-2\nu)$ $\gamma^2Q^2(1-2\nu)$ $\gamma^2(3-2\nu)$ $-2(5-4\nu)+\gamma^2$	0 $\beta\gamma^2Q^2(1-2\nu)$ $\beta\gamma^2(3-2\nu)$ $-2\beta(5-4\nu)$	$-\gamma^3Q^2(1-2\nu)$ $\gamma^3Q^2(1-2\nu)$ γ^3 $-\gamma(3-2\nu)$	$-\gamma^2Q^2(1-2\nu)$ $\gamma^2Q^2(1-2\nu)$ γ^2 $-(5-4\nu)$	$\gamma^3Q^2(1-2\nu)$ 0 0 $-\gamma$	$\beta\gamma^2Q^2(1-2\nu)$ 0 0 $-\beta(5-4\nu)$
σ_z	$\frac{\gamma^2\varphi_1}{\gamma^3\varphi_2}$ $\frac{Q\gamma^3\varphi_3}{Q\gamma^4\varphi_4}$	$3\gamma^2$ $-2\nu-\gamma^2$ $-\gamma^2$ 1	$-\beta\gamma^2$ $-\beta\cdot 2\nu$ 0 β	$\gamma(4-\gamma^2)$ $-\gamma\cdot 3$ $-\gamma$ γ	$[2(1+\nu)-\gamma^2]$ $-(1+2\nu)$ -1 1	$-2\gamma(3-\nu)$ γ γ 0	$-\beta 2(1+\nu)$ β β 0

L	Коэффициент	u_r^0	u_ϕ^0	u_z^0	σ_r^0	τ_{rz}^0	$\tau_{r\phi}^0$
$\tau_{\phi z}$	$\frac{\gamma\varphi_1}{Q}$ $\frac{\gamma^2\varphi_2}{Q}$ $\frac{\gamma^2\varphi_3}{\gamma^3\varphi_4}$	$\beta\gamma^2$ $-\beta\gamma^2$ $-\beta\gamma^2$ $\beta(3-2\nu)$	$\gamma^2\nu$ 0 $\gamma^2(1-\nu)$ $-(3-2\nu)$	$\beta\gamma[(1+\nu)-\gamma^2]$ $-\beta\gamma$ $-\beta\gamma\nu$ $\beta\gamma$	$-\beta[2(1-2\nu)+\gamma^2]$ $\beta(1-2\nu)$ $\beta(1-2\nu)$ β	$-\beta\gamma^2(2-\nu)$ $\beta\gamma$ $\beta\gamma$ 0	$-2(1-2\nu)$ $1-2\nu$ $1-2\nu$ $-2(1-\nu)$
θ	$\frac{2\gamma^2\varphi_1}{2\gamma^3\varphi_2}$	$+ \gamma^2(1-2\nu)$ $-(1-2\nu)$	0 $-\beta(1-2\nu)$	$\gamma(1-2\nu)$ $-\gamma(1-2\nu)$	$1-2\nu$ $-(1-2\nu)$	$-\gamma(1-2\nu)$ 0	$-\beta(1-2\nu)$ 0
σ	$\frac{\gamma^2\varphi_1}{\gamma^3\varphi_2}$	$\gamma^2(1+\nu)$ $-2(1+\nu)$	0 $-\beta 2(1+\nu)$	$+ \gamma^2(1+\nu)$ $-\gamma^2(1+\nu)$	$2(1+\nu)$ $-2(1+\nu)$	$-2(1+\nu)$ 0	$-\beta 2(1+\nu)$ 0
Обозначение: $\varphi_i = \Psi_i e^{i\phi}$							

метод может найти применение лишь при расчете бесконечного цилиндра, нагруженного по боковым поверхностям произвольной нагрузкой.

Цилиндрические элементы железобетонных станин бывают нагружены и по боковым поверхностям и по торцам, поэтому целесообразно избрать другой метод решения задачи, при котором начальные функции не задаются заранее, а разыскиваются из граничных условий на боковых поверхностях и на торцах цилиндра.

Рассмотрим сначала несколько вариантов граничных условий на боковых поверхностях полого цилиндра.

Статические граничные условия на обеих боковых поверхностях цилиндра. Пусть на начальной поверхности все напряжения равны нулю, а на конечной поверхности напряжения принимают заданные значения: при $q = 1$ и $q = \kappa$

$$\begin{aligned} u_4^0 &= 0; \quad u_5^0 = 0; \quad u_6^0 = 0; \\ u_4^\kappa &= Q(\varphi, \zeta); \quad u_5^\kappa = S(\varphi, \zeta); \quad u_6^\kappa = T(\varphi, \zeta). \end{aligned} \quad (71)$$

Подставляя в граничные условия (71) формулы (49), получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} L_{41}^\kappa u_1^0 + L_{42}^\kappa u_2^0 + L_{43}^\kappa u_3^0 &= Q(\varphi, \zeta); \\ L_{51}^\kappa u_1^0 + L_{52}^\kappa u_2^0 + L_{53}^\kappa u_3^0 &= S(\varphi, \zeta); \\ L_{61}^\kappa u_1^0 + L_{62}^\kappa u_2^0 + L_{63}^\kappa u_3^0 &= T(\varphi, \zeta). \end{aligned} \quad (72)$$

Верхний индекс у операторов означает, что они должны быть взяты при $q = \kappa$.

Выражения (72) представляют собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечно высокого порядка относительно неизвестных функций u_1^0 , u_2^0 и u_3^0 . Задача отыскания этих функций из системы (72) кажется на первый взгляд невыполнимой, однако свойства операторов, отмеченные на стр. 108, позволяют решить ее сравнительно простым приемом.

Прежде всего введем вместо трех неизвестных функций u_1^0 , u_2^0 и u_3^0 три новые неизвестные функции напряжений:

$$\begin{aligned} u_1^0 &= (L_{52}^\kappa L_{63}^\kappa - L_{53}^\kappa L_{62}^\kappa) \chi_1 - (L_{42}^\kappa L_{63}^\kappa - L_{43}^\kappa L_{62}^\kappa) \chi_2 + \\ &\quad + (L_{42}^\kappa L_{53}^\kappa - L_{43}^\kappa L_{52}^\kappa) \chi_3; \\ u_2^0 &= -(L_{51}^\kappa L_{63}^\kappa - L_{53}^\kappa L_{61}^\kappa) \chi_1 + (L_{41}^\kappa L_{63}^\kappa - L_{43}^\kappa L_{61}^\kappa) \chi_2 - \\ &\quad - (L_{41}^\kappa L_{53}^\kappa - L_{43}^\kappa L_{51}^\kappa) \chi_3; \\ u_3^0 &= (L_{51}^\kappa L_{62}^\kappa - L_{52}^\kappa L_{61}^\kappa) \chi_1 - (L_{41}^\kappa L_{62}^\kappa - L_{42}^\kappa L_{61}^\kappa) \chi_2 + \\ &\quad + (L_{41}^\kappa L_{52}^\kappa - L_{42}^\kappa L_{51}^\kappa) \chi_3. \end{aligned} \quad (73)$$

Подставив выражения (73) в (72), можно убедиться в том, что система распадается на три независимых дифференциальных уравнения для каждой из функций напряжений:

$$D_1 \chi_1 = Q(\varphi, \zeta); \quad D_1 \chi_2 = S(\varphi, \zeta); \quad D_1 \chi_3 = T(\varphi, \zeta), \quad (74)$$

где D_1 — оператор — определитель системы (72);

$$\begin{aligned} D_1 &= L_{41}^\kappa (L_{52}^\kappa L_{63}^\kappa - L_{53}^\kappa L_{62}^\kappa) - L_{42}^\kappa (L_{51}^\kappa L_{63}^\kappa - L_{53}^\kappa L_{61}^\kappa) + \\ &\quad + L_{43}^\kappa (L_{51}^\kappa L_{62}^\kappa - L_{52}^\kappa L_{61}^\kappa). \end{aligned} \quad (75)$$

Уравнения (74) — это обыкновенные дифференциальные уравнения бесконечно высокого порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение однородного уравнения, соответствующего любому из уравнений (74), может быть представлено в виде

$$\tilde{\chi} = \sum_1^\infty C_m e^{t_m \zeta}, \quad (76)$$

где C_m — произвольные постоянные.

Подставляя выражение (76) в левую часть любого из уравнений (74), получим для определения t_m трансцендентное уравнение

$$D_1(t_m) = 0. \quad (77)$$

Для этого в выражениях операторов, входящих в определитель D_1 , достаточно заменить символ дифференцирования γ на t_m . Решив трансцендентное уравнение, найдем значения корней для построения решений, удовлетворяющих однородным статическим граничным условиям на боковых поверхностях цилиндра.

Для построения частных интегралов уравнений (74) целесообразно представить нагрузки на боковой поверхности цилиндра в виде разложений в двойные ряды Фурье по переменным ζ и φ . Тогда частные интегралы уравнений (74) также могут быть найдены в виде рядов Фурье, так как оператор D_1 представляет собой целую функцию от γ^2 .

Геометрические граничные условия на боковых поверхностях цилиндра. Предположим, что на начальной поверхности смещения точек равны нулю, а на конечной поверхности равны заданной величине: при $q = 1$ и $q = \kappa$:

$$\begin{aligned} u_1^0 &= 0; \quad u_2^0 = 0; \quad u_3^0 = 0; \quad u_1^\kappa = U(\varphi, \zeta); \\ u_2^\kappa &= V(\varphi, \zeta); \quad u_3^\kappa = W(\zeta, \varphi). \end{aligned} \quad (78)$$

На этот раз неизвестными являются и начальные функции u_1^0 , u_2^0 , u_3^0 . Аналогично предыдущему, воспользовавшись формулами

(49), запишем для неизвестных функций систему уравнений

$$\begin{aligned} L_{14}^{\kappa} u_4^0 + L_{15}^{\kappa} u_5^0 + L_{16}^{\kappa} u_6^0 &= U(\varphi, \zeta); \\ L_{24}^{\kappa} u_4^0 + L_{25}^{\kappa} u_5^0 + L_{26}^{\kappa} u_6^0 &= V(\varphi, \zeta); \\ L_{34}^{\kappa} u_4^0 + L_{35}^{\kappa} u_5^0 + L_{36}^{\kappa} u_6^0 &= W(\varphi, \zeta). \end{aligned} \quad (79)$$

На этот раз введем вместо неизвестных начальных функций три новые неизвестные функции перемещений:

$$\begin{aligned} u_4^0 &= (L_{25}^{\kappa} L_{36}^{\kappa} - L_{26}^{\kappa} L_{35}^{\kappa}) \Omega_1 - (L_{15}^{\kappa} L_{36}^{\kappa} - L_{16}^{\kappa} L_{35}^{\kappa}) \Omega_2 + \\ &\quad + (L_{15}^{\kappa} L_{26}^{\kappa} - L_{16}^{\kappa} L_{25}^{\kappa}) \Omega_3; \\ u_5^0 &= - (L_{24}^{\kappa} L_{36}^{\kappa} - L_{26}^{\kappa} L_{34}^{\kappa}) \Omega_1 + (L_{14}^{\kappa} L_{36}^{\kappa} - L_{16}^{\kappa} L_{34}^{\kappa}) \Omega_2 - \\ &\quad - (L_{14}^{\kappa} L_{26}^{\kappa} - L_{16}^{\kappa} L_{24}^{\kappa}) \Omega_3; \\ u_6^0 &= (L_{24}^{\kappa} L_{35}^{\kappa} - L_{25}^{\kappa} L_{34}^{\kappa}) \Omega_1 - (L_{14}^{\kappa} L_{35}^{\kappa} - L_{15}^{\kappa} L_{34}^{\kappa}) \Omega_2 + \\ &\quad + (L_{14}^{\kappa} L_{25}^{\kappa} - L_{15}^{\kappa} L_{24}^{\kappa}) \Omega_3. \end{aligned} \quad (80)$$

Разрешающие уравнения для функций перемещений будут

$$D_2 \Omega_1 = U(\varphi, \zeta); \quad D_2 \Omega_2 = V(\varphi, \zeta); \quad D_2 \Omega_3 = W(\varphi, \zeta), \quad (81)$$

где D_2 — оператор — определитель системы (79);

$$\begin{aligned} D_2 &= L_{14}^{\kappa} (L_{25}^{\kappa} L_{36}^{\kappa} - L_{26}^{\kappa} L_{35}^{\kappa}) - L_{15}^{\kappa} (L_{24}^{\kappa} L_{36}^{\kappa} - L_{26}^{\kappa} L_{34}^{\kappa}) + \\ &\quad + L_{16}^{\kappa} (L_{24}^{\kappa} L_{35}^{\kappa} - L_{25}^{\kappa} L_{34}^{\kappa}). \end{aligned} \quad (82)$$

Статические граничные условия на одной поверхности и геометрические на другой. Здесь могут быть два случая. Предположим, что на начальной поверхности напряжения равны нулю, а на конечной поверхности заданы перемещения:

при $q = 1$ и $q = \kappa$

$$\begin{aligned} u_4^0 &= 0; \quad u_5^0 = 0; \quad u_6^0 = 0; \quad u_1^{\kappa} = U(\varphi, \zeta); \\ u_2^{\kappa} &= V(\varphi, \zeta); \quad u_3^{\kappa} = W(\varphi, \zeta). \end{aligned} \quad (83)$$

Уравнения для определения неизвестных начальных функций при $q = \kappa$ получим в виде

$$\begin{aligned} L_{11}^{\kappa} u_1^0 + L_{12}^{\kappa} u_2^0 + L_{13}^{\kappa} u_3^0 &= U(\varphi, \zeta); \\ L_{21}^{\kappa} u_1^0 + L_{22}^{\kappa} u_2^0 + L_{23}^{\kappa} u_3^0 &= V(\varphi, \zeta); \\ L_{31}^{\kappa} u_1^0 + L_{32}^{\kappa} u_2^0 + L_{33}^{\kappa} u_3^0 &= W(\varphi, \zeta). \end{aligned} \quad (84)$$

Введем функции перемещений по формулам

$$\begin{aligned} u_1^0 &= (L_{22}^{\kappa} L_{33}^{\kappa} - L_{23}^{\kappa} L_{32}^{\kappa}) \Omega_4 - (L_{12}^{\kappa} L_{33}^{\kappa} - L_{13}^{\kappa} L_{32}^{\kappa}) \Omega_5 + \\ &\quad + (L_{12}^{\kappa} L_{23}^{\kappa} - L_{13}^{\kappa} L_{22}^{\kappa}) \Omega_6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2^0 &= - (L_{21}^{\kappa} L_{33}^{\kappa} - L_{23}^{\kappa} L_{31}^{\kappa}) \Omega_4 + (L_{11}^{\kappa} L_{33}^{\kappa} - L_{13}^{\kappa} L_{31}^{\kappa}) \Omega_5 - \\ &\quad - (L_{11}^{\kappa} L_{23}^{\kappa} - L_{13}^{\kappa} L_{21}^{\kappa}) \Omega_6; \\ u_3^0 &= (L_{21}^{\kappa} L_{32}^{\kappa} - L_{22}^{\kappa} L_{31}^{\kappa}) \Omega_4 - (L_{11}^{\kappa} L_{32}^{\kappa} - L_{12}^{\kappa} L_{31}^{\kappa}) \Omega_5 + \\ &\quad + (L_{11}^{\kappa} L_{22}^{\kappa} - L_{12}^{\kappa} L_{21}^{\kappa}) \Omega_6 \end{aligned} \quad (85)$$

и запишем разрешающие уравнения для их определения:

$$D_3 \Omega_4 = U(\varphi, \zeta); \quad D_3 \Omega_5 = V(\varphi, \zeta); \quad D_3 \Omega_6 = W(\varphi, \zeta). \quad (86)$$

При этом определитель системы (84) равен

$$\begin{aligned} D_3 &= L_{11}^{\kappa} (L_{22}^{\kappa} L_{33}^{\kappa} - L_{23}^{\kappa} L_{32}^{\kappa}) - L_{12}^{\kappa} (L_{21}^{\kappa} L_{33}^{\kappa} - L_{23}^{\kappa} L_{31}^{\kappa}) + \\ &\quad + L_{13}^{\kappa} (L_{21}^{\kappa} L_{32}^{\kappa} - L_{22}^{\kappa} L_{31}^{\kappa}). \end{aligned} \quad (87)$$

Теперь предположим, что на начальной поверхности смещения равны нулю, а на конечной поверхности заданы напряжения:

при $q = 1$ и $q = \kappa$

$$\begin{aligned} u_1^0 &= 0; \quad u_2^0 = 0; \quad u_3^0 = 0; \quad u_4^{\kappa} = Q(\varphi, \zeta); \\ u_5^{\kappa} &= S(\varphi, \zeta); \quad u_6^{\kappa} = T(\varphi, \zeta). \end{aligned} \quad (88)$$

В этом случае система уравнений для определения неизвестных начальных функций будет

$$\begin{aligned} L_{44}^{\kappa} u_4^0 + L_{45}^{\kappa} u_5^0 + L_{46}^{\kappa} u_6^0 &= Q(\varphi, \zeta); \\ L_{54}^{\kappa} u_4^0 + L_{55}^{\kappa} u_5^0 + L_{56}^{\kappa} u_6^0 &= S(\varphi, \zeta); \\ L_{64}^{\kappa} u_4^0 + L_{65}^{\kappa} u_5^0 + L_{66}^{\kappa} u_6^0 &= T(\varphi, \zeta). \end{aligned} \quad (89)$$

Функции напряжений выводим по формулам

$$\begin{aligned} u_4^0 &= (L_{55}^{\kappa} L_{66}^{\kappa} - L_{56}^{\kappa} L_{65}^{\kappa}) \chi_4 - (L_{45}^{\kappa} L_{66}^{\kappa} - L_{46}^{\kappa} L_{65}^{\kappa}) \chi_5 + \\ &\quad + (L_{45}^{\kappa} L_{56}^{\kappa} - L_{46}^{\kappa} L_{55}^{\kappa}) \chi_6; \\ u_5^0 &= - (L_{54}^{\kappa} L_{66}^{\kappa} - L_{56}^{\kappa} L_{64}^{\kappa}) \chi_4 + (L_{44}^{\kappa} L_{66}^{\kappa} - L_{46}^{\kappa} L_{64}^{\kappa}) \chi_5 - \\ &\quad - (L_{44}^{\kappa} L_{56}^{\kappa} - L_{46}^{\kappa} L_{54}^{\kappa}) \chi_6; \\ u_6^0 &= (L_{54}^{\kappa} L_{65}^{\kappa} - L_{55}^{\kappa} L_{64}^{\kappa}) \chi_4 - (L_{44}^{\kappa} L_{65}^{\kappa} - L_{45}^{\kappa} L_{64}^{\kappa}) \chi_5 + \\ &\quad + (L_{44}^{\kappa} L_{55}^{\kappa} - L_{45}^{\kappa} L_{54}^{\kappa}) \chi_6. \end{aligned} \quad (90)$$

Разрешающие уравнения для их определения будут

$$D_4 \chi_4 = Q(\varphi, \zeta); \quad D_4 \chi_5 = S(\varphi, \zeta); \quad D_4 \chi_6 = T(\varphi, \zeta). \quad (91)$$

Определитель системы (89) равен

$$\begin{aligned} D_4 &= L_{44}^{\kappa} (L_{55}^{\kappa} L_{66}^{\kappa} - L_{56}^{\kappa} L_{65}^{\kappa}) - L_{45}^{\kappa} (L_{54}^{\kappa} L_{66}^{\kappa} - L_{56}^{\kappa} L_{64}^{\kappa}) + \\ &\quad + L_{46}^{\kappa} (L_{54}^{\kappa} L_{65}^{\kappa} - L_{55}^{\kappa} L_{64}^{\kappa}). \end{aligned} \quad (92)$$

Кроме разобранных вариантов граничных условий, могут быть заданы смешанные граничные условия на каждой из боковых поверхностей цилиндра. Всего можно задать 64 варианта различных граничных условий на боковых поверхностях цилиндра, причем методика введения разрешающих функций во всех случаях аналогична разобранным выше.

Цилиндрические элементы гидропрессов обычно бывают нагружены по боковым поверхностям равномерно распределенной нагрузкой от внутреннего давления, или от давления преднапряженной оплетки высокопрочной проволокой. Расчет на такую нагрузку не представляет трудностей.

Большой интерес представляет расчет элементов на нагрузку, приложенную к торцам. Такой нагрузкой может быть, например, давление от анкеров предварительно напряженной арматуры.

При расчете элементов на нагрузку, приложенную к торцам, целесообразно использовать класс решений, удовлетворяющих однородным статическим граничным условиям на боковых поверхностях цилиндра. Эти однородные решения определяются значениями корней трансцендентного уравнения (77).

Вид трансцендентного уравнения зависит от принятого значения параметра n в выражении (31). Придавая параметру n значения чисел натурального ряда, будем иметь при каждом n распределение напряжений в цилиндре, определяемое формулами (49) и функцией $e^{in\varphi}$.

Решив трансцендентное уравнение при каждом значении параметра n , получим корни однородных решений t_m . При подстановке значений t_m в формулы перемещений и напряжений будем иметь совокупность решений или напряженных состояний полого цилиндра, нагруженного только по торцам нормальной и касательной нагрузкой по законам, определяемым формулами σ_z и $\tau_{\varphi z}$.

Дальнейший расчет цилиндра должен состоять в следующем: нагрузку, приложенную к торцам цилиндра, и найденные однородные решения разложим в двойные ряды Фурье-Бесселя по переменным φ и z ; приравнявая ряды почленно, получим бесконечную систему алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных, соответствующих каждому значению параметра n и каждому значению корня однородного решения t_m . Обрывая систему, можно приближенно рассчитать цилиндр, нагруженный по торцам произвольной нормальной и касательной нагрузками.

Осесимметричная задача для полого цилиндра. Остановимся на случае, когда из девяти искомым функций три функции: u_2 , u_3 и u_8 тождественно равны нулю, т. е. осесимметричное чистое кручение рассматривать не будем.

В этом случае рассмотрим 16 вариантов различных граничных условий на боковых поверхностях цилиндра. Для упрощения

исследования целесообразно поставить однородные граничные условия на одной поверхности, например на поверхности $\varphi = 1$. Это не снижает общности, так как можно принять за эту поверхность сначала наружную боковую поверхность цилиндра, затем внутреннюю.

Вводя функции перемещений и напряжений, получим 16 операторов — определителей, к которым приводят все рассматриваемые варианты граничных условий на боковых поверхностях цилиндра. Раскрывая определители, найдем разрешающие обыкновенные дифференциальные уравнения бесконечно высокого порядка, описывающие напряженное и деформированное состояние цилиндра при соответствующих граничных условиях на боковых поверхностях. Эти уравнения записаны в замкнутой трансцендентной символической форме в табл. 15. Уравнения выписаны в виде матрицы.

Отметим одно интересное свойство этой матрицы, которое выявляется при перенесении начальной поверхности с наружной на внутреннюю боковую поверхность цилиндра, или наоборот. Перенесение начальной поверхности может быть осуществлено путем замены наружного радиуса r^0 на внутренний радиус r' во всех функциях и выражениях. Это приводит к следующей замене переменных и операторов, условно обозначенной стрелкой:

$$\varphi \rightarrow \frac{\varphi}{\kappa}; \quad \gamma \rightarrow \kappa\gamma; \quad \kappa\gamma \rightarrow \gamma; \quad \kappa \rightarrow \frac{1}{\kappa};$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^\kappa &\rightarrow -\Psi_3^\kappa; & \Psi_3^\kappa &\rightarrow -\Psi_2^\kappa; & \Psi_4^\kappa &\rightarrow -\Psi_4^\kappa; \\ \Psi_1^\kappa &\rightarrow -\Psi_1^\kappa; & r^0 &\rightarrow r'. \end{aligned} \quad (93)$$

Из выражений (18) видно, что функции Ψ_i при $n = 0$ содержат цилиндрические функции лишь нулевого и первого порядка

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= J_0(\varphi\gamma) N_0(\gamma) - N_0(\varphi\gamma) J_0(\gamma); \\ \Psi_2 &= J_0(\varphi\gamma) N_1(\gamma) - N_0(\varphi\gamma) J_1(\gamma); \\ \Psi_3 &= J_1(\varphi\gamma) N_0(\gamma) - N_1(\varphi\gamma) J_0(\gamma); \\ \Psi_4 &= J_1(\varphi\gamma) N_1(\gamma) - N_1(\varphi\gamma) J_1(\gamma). \end{aligned} \quad (94)$$

Прделав указанную замену в выражениях, можно убедиться в том, что главная диагональ матрицы остается без изменения, а элементы матрицы, симметричные относительно главной диагонали, меняются местами.

Наибольший интерес при расчете осесимметричных цилиндров представляет случай статических граничных условий на боковых поверхностях цилиндра. Этот случай разберем подробнее.

Целесообразно рассматривать отдельно нагружение цилиндра одной лишь нормальной нагрузкой $q(\xi)$, приложенной к поверхности $\varphi = \kappa$, а затем касательной нагрузкой $p(\xi)$, приложенной

Разрешающие уравнения

Заданы ↓	Заданы	$u_r^0 = u_z^0 = 0$	$u_r^0 = \tau_{rz}^0 = 0$	
	Искомые	$\sigma_r^0 \tau_{rz}^0$	$\sigma_r^0 u_z^0$	
u_r^κ u_z^κ	φ_1^2	$\kappa \gamma^2$	—	γ
	$\varphi_1 \varphi_2$	$-4(1 - \nu) \kappa \gamma$	—	
	$\varphi_1 \varphi_3$	$-4(1 - \nu) \gamma$	—	
	$\varphi_1 \varphi_4$	$16(1 - \nu)^2 - \gamma^2 - \kappa^2 \gamma^2$	$-2(1 - \nu) \gamma$	
	φ_2^2	$\kappa \gamma^2$	$2(1 - \nu) \kappa \gamma$	
	$\varphi_2 \varphi_3$	$\gamma^2 + \kappa^2 \gamma^2$	$2(1 - \nu) \gamma$	
	$\varphi_2 \varphi_4$	$-4(1 - \nu) \gamma$	$-8(1 - \nu)^2$	
	φ_3^2	$\kappa \gamma^2$	—	
	$\varphi_3 \varphi_4$	$-4(1 - \nu) \kappa \gamma$	—	
	φ_4^2	$\kappa \gamma^2$	$2(1 - \nu) \kappa \gamma$	
u_r^κ τ_{rz}^κ	φ_1^2	—	γ	γ^2
	$\varphi_1 \varphi_2$	—	—	
	$\varphi_1 \varphi_3$	—	—	
	$\varphi_1 \varphi_4$	$-2(1 - \nu) \kappa \gamma$	—	
	φ_2^2	—	—	
	$\varphi_2 \varphi_3$	$2(1 - \nu) \kappa \gamma$	—	
	$\varphi_2 \varphi_4$	—	—	
	φ_3^2	$2(1 - \nu) \gamma$	—	
	$\varphi_3 \varphi_4$	$-8(1 - \nu)^2$	—	
	φ_4^2	$2(1 - \nu) \gamma$	$4(1 - \nu)^2$	

полого цилиндра ($n=0$)

		$u_z^0 = \sigma_r^0 = 0$	$\sigma_r^0 = \tau_{rz}^0 = 0$
		$u_r^0 \tau_{rz}^0$	$u_r^0 u_z^0$
		$(3-2\nu) \kappa \gamma^2$	$\kappa \gamma^3$
		$-4(1-\nu) \kappa \gamma$	—
		$-4(1-\nu)(3-2\nu) \gamma$	$-4(1-\nu) \gamma^2$
		$16(1-\nu^2) - (3-2\nu) \gamma^2 - \kappa^2 \gamma^2$	$2(1-\nu)(3-2\nu) \gamma - \gamma^3 - \kappa^2 \gamma^3$
		$\kappa \gamma^2$	$-2(1-\nu) \kappa \gamma + \kappa \gamma^3$
		$\kappa^2 \gamma^2 + (3-2\nu) \gamma^2$	$-2(1-\nu)(3-2\nu) \gamma + \gamma^3 + \kappa^2 \gamma^3$
		$-4(1-\nu) \gamma$	$8(1-\nu)^2 - 4(1-\nu) \gamma^2$
		$(3-2\nu) \kappa \gamma^2$	$\kappa \gamma^3$
		$-4(1-\nu) \kappa \gamma$	—
		$\kappa \gamma^2$	$-2(1-\nu) \kappa \gamma + \kappa \gamma^3$
		—	γ^2
		—	—
		—	—
		$-2(1-\nu) \kappa \gamma$	$-2(1-\nu) \kappa \gamma^2$
		—	—
		$2(1-\nu) \kappa \gamma$	$2(1-\nu) \kappa \gamma^3$
		—	—
		$2(1-\nu)(3-2\nu) \gamma$	$2(1-\nu) \gamma^2$
		$-8(1-\nu)^2$	—
		$2(1-\nu) \gamma$	$-4(1-\nu)^2 + 2(1-\nu) \gamma^2$

Заданы ↓	Заданы	$u_r^0 = u_z^0 = 0$		$u_r^0 = \tau_{rz}^0 = 0$	
	Искомые	$\sigma_r^0 \tau_{rz}^0$		$\sigma_r^0 u_z^0$	
σ_r^κ u_z^κ	Φ_1^2	$(3 - 2\nu) \kappa \gamma^2$	$\frac{1}{\kappa}$	—	$\frac{\gamma}{\kappa}$
	$\Phi_1 \Phi_2$	$-4(1 - \nu)(3 - 2\nu) \kappa \gamma$		—	
	$\Phi_1 \Phi_3$	$-4(1 - \nu) \gamma$		—	
	$\Phi_1 \Phi_4$	$16(1 - \nu^2) - \gamma^2 - (3 - 2\nu) \kappa^2 \gamma^2$		$-2(1 - \nu) \gamma$	
	Φ_2^2	$(3 - 2\nu) \kappa \gamma^2$		$2(1 - \nu)(3 - 2\nu) \kappa \gamma$	
	$\Phi_2 \Phi_3$	$\gamma^2 + (3 - 2\nu) \kappa^2 \gamma^2$		$2(1 - \nu) \gamma$	
	$\Phi_2 \Phi_4$	$-4(1 - \nu) \gamma$		$-8(1 - \nu)^2$	
	Φ_3^2	$\kappa \gamma^2$		—	
	$\Phi_3 \Phi_4$	$-4(1 - \nu) \kappa \gamma$		—	
	Φ_4^2	$\kappa \gamma^2$		$2(1 - \nu) \kappa \gamma$	
σ_r^κ τ_{rz}^κ	Φ_1^2	$\kappa^2 \gamma^3$	$\frac{\gamma}{\kappa}$	—	$\frac{\gamma^2}{\kappa}$
	$\Phi_1 \Phi_2$	$-4(1 - \nu) \kappa^2 \gamma^2$		—	
	$\Phi_1 \Phi_3$	—		—	
	$\Phi_1 \Phi_4$	$2(1 - \nu)(3 - 2\nu) \kappa \gamma - \kappa \gamma^3 - \kappa^3 \gamma^3$		$-2(1 - \nu) \kappa \gamma^2$	
	Φ_2^2	$\kappa^2 \gamma^3$		$2(1 - \nu) \kappa^2 \gamma^2$	
	$\Phi_2 \Phi_3$	$-2(1 - \nu)(3 - 2\nu) \kappa \gamma + \kappa \gamma^3 + \kappa^3 \gamma^3$		$2(1 - \nu) \kappa \gamma^2$	
	$\Phi_2 \Phi_4$	—		—	
	Φ_3^2	$-2(1 - \nu) \gamma + \kappa^2 \gamma^3$		—	
	$\Phi_3 \Phi_4$	$8(1 - \nu)^2 - 4(1 - \nu) \kappa^2 \gamma^2$		—	
	Φ_4^2	$-2(1 - \nu) \gamma + \kappa^2 \gamma^3$		$-4(1 - \nu)^2 + 2(1 - \nu) \kappa^2 \gamma^2$	

Обозначение: $\Phi_i = \Psi_i(\kappa, \gamma)$.

Примечание. В рамке общий множитель.

	$u_z^0 = \sigma_r^0 = 0$		$\sigma_r^0 = \tau_{rz}^0 = 0$	
	$u_r^0 \tau_{rz}^0$		$u_r^0 u_z^0$	
	$(3 - 2\nu)^2 \kappa \gamma^2$	$\frac{1}{\kappa}$	$(3 - 2\nu) \kappa \gamma^3$	$\frac{\gamma}{\kappa}$
	$-4(1 - \nu)(3 - 2\nu) \kappa \gamma$		—	
	$-4(1 - \nu)(3 - 2\nu) \gamma$		$-4(1 - \nu) \gamma^2$	
	$16(1 - \nu)^2 - (3 - 2\nu) \gamma^2 - (3 - 2\nu) \kappa^2 \gamma^2$		$2(1 - \nu)(3 - 2\nu) \gamma - \gamma^3 - (3 - 2\nu) \kappa^2 \gamma^3$	
	$(3 - 2\nu) \kappa \gamma^2$		$-2(1 - \nu)(3 - 2\nu) \kappa \gamma + (3 - 2\nu) \kappa \gamma^3$	
	$(3 - 2\nu) \gamma^2 + (3 - 2\nu) \kappa^2 \gamma^2$		$-2(1 - \nu)(3 - 2\nu) \gamma + \gamma^3 + (3 - 2\nu) \kappa^2 \gamma^3$	
	$-4(1 - \nu) \gamma$		$8(1 - \nu)^2 - 4(1 - \nu) \gamma^2$	
	$(3 - 2\nu) \kappa \gamma^2$		$\kappa \gamma^3$	
	$-4(1 - \nu) \kappa \gamma$		—	
	$\kappa \gamma^2$		$-2(1 - \nu) \kappa \gamma + \kappa \gamma^3$	
	$(3 - 2\nu) \kappa^2 \gamma^3$	$\frac{\gamma}{\kappa}$	$\kappa^2 \gamma^4$	$\frac{\gamma^2}{\kappa}$
	$-4(1 - \nu) \kappa^2 \gamma^2$		—	
	—		—	
	$2(1 - \nu)(3 - 2\nu) \kappa \gamma - (3 - 2\nu) \kappa \gamma^3 - \kappa^3 \gamma^3$		$4(1 - \nu) \kappa \gamma^2 - \kappa \gamma^4 - \kappa^3 \gamma^4$	
	$\kappa^2 \gamma^3$		$-2(1 - \nu) \kappa^2 \gamma^2 - \kappa^2 \gamma^4$	
	$-2(1 - \nu)(3 - 2\nu) \kappa \gamma + (3 - 2\nu) \kappa \gamma^3 + \kappa^3 \gamma^3$		$-4(1 - \nu) \kappa \gamma^2 + \kappa \gamma^4 + \kappa^3 \gamma^4$	
	—		—	
	$-2(1 - \nu)(3 - 2\nu) \gamma + (3 - 2\nu) \kappa^2 \gamma^3$		$-2(1 - \nu) \gamma^2 + \kappa^2 \gamma^4$	
	$8(1 - \nu)^2 - 4(1 - \nu) \kappa^2 \gamma^2$		—	
	$-2(1 - \nu) \gamma + \kappa^2 \gamma^3$		$4(1 - \nu)^2 - 2(1 - \nu) \gamma^2 - 2(1 - \nu) \kappa^2 \gamma^2 + \kappa^2 \gamma^4$	

к той же поверхности. В первом случае отличны от нуля только две начальные функции:

$$u_1^0 = \gamma^3 (\kappa \Psi_2^\kappa + \Psi_3^\kappa) \Phi; \quad u_3^0 = \gamma [\kappa \gamma (\Psi_2^\kappa + \gamma \Psi_1^\kappa) + \gamma \Psi_3^\kappa + \gamma^2 \Psi_4^\kappa - 2(1-\nu) \Psi_4^\kappa] \Phi, \quad (95)$$

во втором случае

$$u_1^0 = \frac{\gamma}{\kappa} [\kappa \gamma (\gamma \Psi_1^\kappa - \Psi_2^\kappa) - \kappa^2 \gamma^2 \Psi_4^\kappa + 2(1-\nu) \Psi_4^\kappa - \gamma \Psi_3^\kappa] \Phi; \\ u_3^0 = \frac{1}{\kappa} [2\kappa \gamma^2 \Psi_1^\kappa + \kappa \gamma^3 \Psi_2^\kappa - (3-2\nu) \kappa \gamma \Psi_2^\kappa + \kappa^2 \gamma^3 \Psi_3^\kappa - (3-2\nu) \gamma \Psi_3^\kappa + 4(1-\nu) \Psi_4^\kappa - \gamma^2 \Psi_4^\kappa - \kappa^2 \gamma^2 \Psi_4^\kappa] \Phi, \quad (96)$$

где Φ — разрешающая функция напряжений.

Формулы перемещений и напряжений при выражении их через функцию Φ для обоих случаев нагружения выписаны в табл. 16 и 17. Разрешающее уравнение для первого случая нагружения имеет в правой части нагрузку $q(\xi)$, для второго $P(\xi)$. Левая часть уравнения для обоих случаев аналогична, она приведена в табл. 15.

Уравнение можно упростить, если учесть тождественное соотношение

$$\kappa \gamma^2 (\Psi_1^\kappa \Psi_4^\kappa - \Psi_2^\kappa \Psi_3^\kappa) = 1, \quad (97)$$

которое легко проверить, подставив вместо функций Ψ_i их выражения и учтя известное в теории функции Бесселя тождество

$$x [J_1(x) N_0(x) - N_1(x) J_0(x)] = 1. \quad (98)$$

Окончательный вид уравнения в первом случае будет

$$\{\kappa^2 \gamma^4 \Psi_1^2 - (h - \gamma^2) \kappa^2 \gamma^2 \Psi_2^2 - (h - \kappa^2 \gamma^2) \gamma^2 \Psi_3^2 + [h^2 - h(1 + \kappa^2) \gamma^2 + \kappa^2 \gamma^4] \Psi_4^2 + [2h - (1 + \kappa^2) \gamma^2]^\kappa \Phi = -4(1-\nu)^2 q(\xi); \quad (99)$$

здесь $h = 2(1-\nu)$, верхний индекс κ у скобки означает, что все операторы должны быть взяты при $\varrho = \kappa$. Во втором случае в правой части уравнения вместо $q(\xi)$ следует поставить $P(\xi)$.

Уравнение (99) — обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами бесконечно высокого порядка. Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (99), может быть записано в виде

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{t m^2}. \quad (100)$$

$$u_1 = \left\{ \begin{aligned} &\gamma^3 [\kappa (\varphi_{31} + \varphi_{42}) - \varrho (\varphi_{13} + \varphi_{24}) - \varrho \kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21}) - \\ &\quad - (\varphi_{34} - \varphi_{43})] + 2(1-\nu) \gamma^2 [(\varphi_{33} + \varphi_{44}) + \\ &\quad + \kappa (\varphi_{32} - \varphi_{41})] + 2(1-\nu) \gamma [(\varphi_{34} - \varphi_{43}) + \\ &\quad + (\varrho \varphi_{24} - \kappa \varphi_{42})] - 4(1-\nu)^2 \varphi_{44} \end{aligned} \right\} \Phi$$

$$u_2 = \left\{ \begin{aligned} &\gamma^3 [(\varphi_{14} - \varphi_{23}) - \kappa (\varphi_{11} + \varphi_{22}) - \varrho (\varphi_{33} + \varphi_{44}) - \\ &\quad - \varrho \kappa (\varphi_{32} - \varphi_{41})] + 2(1-\nu) \gamma^2 [(\varphi_{13} + \varphi_{24}) + \\ &\quad + \kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21})] - 2(1-\nu) \gamma [(\varphi_{14} - \varphi_{23}) - \\ &\quad - (\kappa \varphi_{22} + \varrho \varphi_{44})] - 4(1-\nu)^2 \varphi_{24} \end{aligned} \right\} \Phi$$

$$u_3 = \frac{1}{\varrho} \left\{ \begin{aligned} &\varrho \gamma^4 [-(\varphi_{14} - \varphi_{23}) + \kappa (\varphi_{11} + \varphi_{22}) + \varrho (\varphi_{33} + \varphi_{44}) + \\ &\quad + \varrho \kappa (\varphi_{32} - \varphi_{41})] + \gamma^3 [(\varphi_{34} - \varphi_{43}) - \kappa (\varphi_{31} + \varphi_{42}) + \\ &\quad + \varrho (\varphi_{13} + \varphi_{24}) + \varrho \kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21})] + 2(1-\nu) \gamma^2 \times \\ &\quad \times [-(\varphi_{33} + \varphi_{44}) - \kappa (\varphi_{32} - \varphi_{41}) + \varrho (\varphi_{14} - \varphi_{23}) - \\ &\quad - \varrho (\kappa \varphi_{22} + \varrho \varphi_{44})] + 2(1-\nu) \gamma [-(\varphi_{34} - \varphi_{43}) - \\ &\quad - (\varrho \varphi_{24} - \kappa \varphi_{42})] + 4(1-\nu)^2 \varphi_{44} \end{aligned} \right\} \Phi$$

$$u_4 = \gamma^2 \left\{ \begin{aligned} &\gamma^2 [-(\varphi_{34} - \varphi_{43}) + \kappa (\varphi_{31} + \varphi_{42}) - \varrho (\varphi_{13} + \varphi_{24}) - \\ &\quad - \varrho \kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21})] + 2(1-\nu) [(\varphi_{34} - \varphi_{43}) + \\ &\quad + (\varrho \varphi_{24} - \kappa \varphi_{42})] \end{aligned} \right\} \Phi$$

$$u_5 = \frac{1}{\varrho} \left\{ \begin{aligned} &\gamma^3 [-(\varphi_{34} - \varphi_{43}) + \kappa (\varphi_{31} + \varphi_{42}) - (1-2\nu) \varrho (\varphi_{13} + \\ &\quad + \varphi_{24}) - (1-2\nu) \varrho \kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21})] + 2(1-\nu) \gamma^2 \times \\ &\quad \times [(\varphi_{33} + \varphi_{44}) + \kappa (\varphi_{32} - \varphi_{41})] + 2(1-\nu) \gamma [(\varphi_{34} - \varphi_{43}) - \\ &\quad - \kappa \varphi_{42} + (1-2\nu) \varrho \varphi_{24}] - 4(1-\nu)^2 \varphi_{44} \end{aligned} \right\} \Phi$$

$$u_6 = \gamma \left\{ \begin{aligned} &\gamma^3 [(\varphi_{14} - \varphi_{23}) - \kappa (\varphi_{11} + \varphi_{22}) - \varrho (\varphi_{33} + \varphi_{44}) - \\ &\quad - \varrho \kappa (\varphi_{32} - \varphi_{41})] + 2\gamma^2 [(\varphi_{13} + \varphi_{24}) + \kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21})] + \\ &\quad + 2(1-\nu) \gamma [-(\varphi_{14} - \varphi_{23}) + (\kappa \varphi_{22} + \varrho \varphi_{44})] - \\ &\quad - 4(1-\nu) \varphi_{24} \end{aligned} \right\} \Phi$$

Обозначение: $\varphi_{ik} = \Psi_i(\varrho \gamma) \Psi_k(\gamma)$ ($i, \kappa = 1, 2, 3, 4$).

Формулы для расчета цилиндра, нагруженного по боковой поверхности касательной нагрузкой

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{\kappa} \left\{ \begin{aligned} &\gamma^3 [\kappa (\varphi_{41} - \varphi_{32}) + \varrho \kappa^2 (\varphi_{14} - \varphi_{23}) - \kappa^2 (\varphi_{33} + \varphi_{44}) - \\ &- \varrho \kappa (\varphi_{11} + \varphi_{22})] + \gamma^2 [\varrho \kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21}) + (1 - 2\nu) \kappa (\varphi_{31} + \\ &+ \varphi_{42}) + \varrho (\varphi_{13} + \varphi_{24}) + (\varphi_{34} - \varphi_{43}) - 2(1 - \nu) \kappa^2 (\varphi_{34} - \\ &- \varphi_{43})] + \gamma \cdot 2(1 - \nu) [\varrho (\varphi_{23} - \varphi_{14}) + \kappa (\varrho \varphi_{22} + \kappa \varphi_{44})] + \\ &+ 2(1 - \nu) [(1 - 2\nu) (\varphi_{34} - \kappa \varphi_{42} - \varphi_{43}) - \varrho \varphi_{24}] \end{aligned} \right\} \Phi \\
 u_2 &= \frac{1}{\kappa} \left\{ \begin{aligned} &\gamma^3 [\kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21}) - \varrho \kappa (\varphi_{31} - \varphi_{42}) + \kappa^2 (\varphi_{13} + \varphi_{24}) + \\ &+ \varrho \kappa^2 (\varphi_{34} - \varphi_{43})] + \gamma^2 [(3 - 2\nu) \kappa (\varphi_{11} + \varphi_{22}) + \\ &+ \varrho \kappa (\varphi_{32} - \varphi_{41}) + (\varphi_{23} - \varphi_{14}) + 2(1 - \nu) \kappa^2 (\varphi_{23} - \varphi_{14}) + \\ &+ \varrho (\varphi_{33} + \varphi_{44})] + \gamma \cdot 2(1 - \nu) [-2\kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21}) - \\ &- 2(\varphi_{13} + \varphi_{24}) - \varrho (\varphi_{34} + \varphi_{43}) - \kappa (\kappa \varphi_{24} - \varrho \varphi_{42})] + \\ &+ 2(1 - \nu) [(3 - 2\nu) (\varphi_{14} - \varphi_{23}) - (3 - 2\nu) \kappa \varphi_{22} - \\ &- \varrho \varphi_{44}] + 8(1 - \nu) 2\varphi_{21} \frac{1}{\gamma} \end{aligned} \right\} \Phi \\
 u_3 &= \frac{1}{\varrho \kappa} \left\{ \begin{aligned} &\gamma^4 [-\kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21}) + \varrho \kappa (\varphi_{31} + \varphi_{42}) - \kappa^2 (\varphi_{13} + \varphi_{24}) - \\ &- \varrho \kappa^2 (\varphi_{34} - \varphi_{43})] \varrho + \gamma^3 [\varrho^2 \kappa (\varphi_{41} - \varphi_{32}) - \varrho \kappa^2 (\varphi_{14} - \\ &- \varphi_{23}) + \varrho (\varphi_{14} - \varphi_{23}) + \kappa (\varphi_{32} - \varphi_{41}) - (\varrho^2 - \kappa^2) (\varphi_{33} + \\ &+ \varphi_{44})] + \gamma^2 [(1 - 2\nu) \varrho \kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21}) + (1 - 2\nu) \varrho (\varphi_{13} + \\ &+ \varphi_{24}) - (1 - 2\nu) \kappa (\varphi_{31} + \varphi_{42}) + 2(1 - \nu) (\kappa^2 + \varrho^2) \times \\ &\times (\varphi_{34} - \varphi_{43}) + 2(1 - \nu) \varrho \kappa (\kappa \varphi_{24} - \varrho \varphi_{42}) - (\varphi_{34} - \\ &- \varphi_{43})] + \gamma [2(1 - \nu) \varphi_{44} (\varrho^2 - \kappa^2)] - \\ &- 2(1 - \nu) (1 - 2\nu) [(\varrho \varphi_{24} - \kappa \varphi_{42}) + (\varphi_{34} - \varphi_{43})] \end{aligned} \right\} \Phi \\
 u_4 &= \frac{1}{\kappa} \left\{ \begin{aligned} &\gamma^4 [\varrho \kappa^2 (\varphi_{14} - \varphi_{23}) - \kappa^2 (\varphi_{33} + \varphi_{44}) - \kappa (\varphi_{32} - \varphi_{41}) - \\ &- \varrho \kappa (\varphi_{11} + \varphi_{22})] + \gamma^3 [\varrho \kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21}) - \kappa (\varphi_{31} + \varphi_{42}) + \\ &+ \varrho (\varphi_{13} + \varphi_{24}) + (\varphi_{34} - \varphi_{43})] + 2(1 - \nu) \gamma^2 [\kappa (\varphi_{32} - \\ &- \varphi_{41}) - \varrho (\varphi_{14} - \varphi_{23}) + (\varphi_{33} + \varphi_{44}) + \kappa (\varrho \varphi_{22} + \\ &+ \kappa \varphi_{44})] - 2(1 - \nu) \gamma [(\varphi_{34} - \varphi_{43}) + (\varrho \varphi_{24} - \kappa \varphi_{42})] - \\ &- 4(1 - \nu) 2\varphi_{44} \end{aligned} \right\} \Phi \\
 u_5 &= \frac{1}{\varrho \kappa} \left\{ \begin{aligned} &-\kappa \gamma^3 [(1 - 2\nu) \varrho (\varphi_{11} + \varphi_{22}) + (\varphi_{32} - \varphi_{41}) + \kappa (\varphi_{33} + \\ &+ \varphi_{44}) - (1 - 2\nu) \varrho \kappa (\varphi_{14} - \varphi_{23})] + \gamma^2 [(1 - 2\nu) \varrho \kappa (\varphi_{12} - \\ &- \varphi_{21}) + (1 - 2\nu) \varrho (\varphi_{13} + \varphi_{24}) + (\varphi_{34} - \varphi_{43}) + \\ &+ (1 - 2\nu) \kappa (\varphi_{31} + \varphi_{42}) - 2(1 - \nu) \kappa^2 (\varphi_{34} - \varphi_{43})] + \\ &+ 2(1 - \nu) \gamma [\kappa^2 \varphi_{44} - (1 - 2\nu) \varrho (\varphi_{14} - \varphi_{23}) + (1 - \\ &- 2\nu) \varrho \kappa \varphi_{22}] + 2(1 - \nu) (1 - 2\nu) [(\varphi_{31} - \varphi_{43}) - \\ &- (\varrho \varphi_{24} + \kappa \varphi_{42})] \end{aligned} \right\} \Phi
 \end{aligned}$$

$$u_6 = \frac{1}{\kappa} \left\{ \begin{aligned} &\kappa \gamma^4 [\kappa (\varphi_{13} + \varphi_{24}) + (\varphi_{12} - \varphi_{21}) - \varrho (\varphi_{31} + \varphi_{42}) + \\ &+ \varrho \kappa (\varphi_{31} - \varphi_{43})] + 2\gamma^2 [-(2 - \nu) \kappa (\varphi_{12} - \varphi_{21}) - \\ &- (2 - \nu) (\varphi_{13} + \varphi_{24}) - (1 - \nu) \varrho (\varphi_{31} - \varphi_{43}) - \\ &- (1 - \nu) \kappa (\kappa \varphi_{24} - \varrho \varphi_{42})] + 2(1 - \nu) \gamma [3(\varphi_{14} - \varphi_{23}) - \\ &- 3\kappa \varphi_{22} - \varrho \varphi_{44}] + 4(1 - \nu) (2 - \nu) \varphi_{24} + \gamma^3 [3\kappa (\varphi_{11} + \\ &+ \varphi_{22}) - (\varphi_{14} - \varphi_{23}) + \varrho \kappa (\varphi_{32} - \varphi_{41}) + \varrho (\varphi_{33} + \\ &+ \varphi_{44}) - 2\kappa^2 (\varphi_{14} - \varphi_{23})] \end{aligned} \right\} \Phi$$

Обозначение: $\varphi_{ik} = \Psi_i(\varrho y) \Psi_k(\gamma)$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$).

Подставляя выражение (100) в левую часть уравнения (99), получим согласно (64) для определения t_m трансцендентное уравнение

$$\kappa^2 t^4 \Psi_1^2 - (h - t^2) \kappa^2 t^2 \Psi_2^2 - (h - \kappa^2 t^2) t^2 \Psi_3^2 + \\ + [h^2 - h(1 + \kappa^2) t^2 + \kappa^2 t^4] \Psi_4^2 + [2h - (1 + \kappa^2) t^2] = 0. \quad (101)$$

В данном случае $\Psi_i = \Psi_i(\kappa, t)$. Аналогичное уравнение, но несколько в иной форме, приведено в работе [10]. Комплексные попарно сопряженные корни уравнения (101) могут быть найдены графическим способом. Для этого представим корень уравнения в виде $t_m = r_m e^{i\theta_m}$ (r_m — модуль комплексного числа и θ_m — аргумент) и, задаваясь значениями t_m , построим графики действительной и мнимой частей уравнения. Корни уравнения определяются точками пересечения кривых действительной и мнимой частей уравнения. Графики уравнения при $1 \leq r \leq 10$; $0 \leq \theta \leq 0,7$; $0,2 \leq \kappa \leq 0,8$ показаны на фиг. 4, а — г. Из анализа предельных случаев — сплошного и тонкостенного цилиндров — видно, что с увеличением порядкового номера корня m модули корней возрастают. Это обстоятельство позволяет применить асимптотические представления функций Ψ_i при больших r_m , построенные при помощи полусходящихся рядов Ганкеля [11]

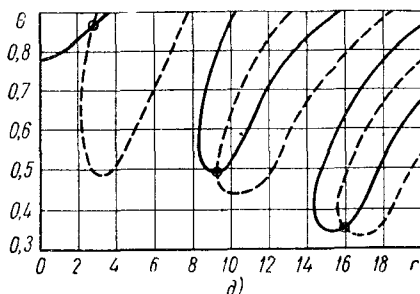
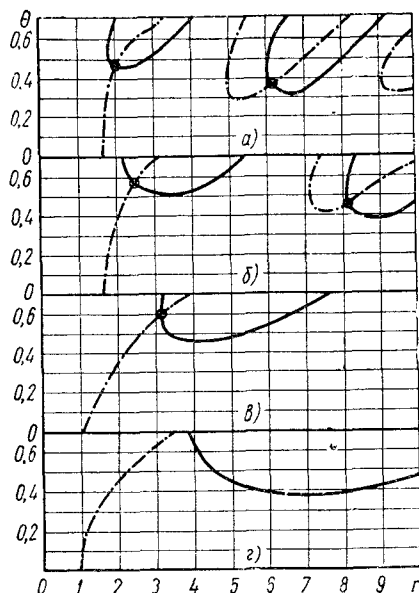
$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= \frac{1}{t \sqrt{\kappa}} [(P_0^\kappa Q_0 - Q_0^\kappa P_0) \cos(1 - \kappa) t + (P_0^\kappa P_0 + \\ &+ Q_0^\kappa Q_0) \sin(1 - \kappa) t]; \\
 \Psi_2 &= \frac{1}{t \sqrt{\kappa}} [P_0^\kappa Q_1 - Q_0^\kappa P_1] \sin(1 - \kappa) t - \\ &- (P_0^\kappa P_1 + Q_0^\kappa Q_1) \cos(1 - \kappa) t]; \\
 \Psi_3 &= \frac{1}{t \sqrt{\kappa}} [(P_1^\kappa P_0 - Q_1^\kappa Q_0) \cos(1 - \kappa) t - \\ &- (P_1^\kappa Q_0 - Q_1^\kappa P_0) \sin(1 - \kappa) t]; \\
 \Psi_4 &= \frac{1}{t \sqrt{\kappa}} [(P_1^\kappa Q_1 - Q_1^\kappa P_1) \cos(1 - \kappa) t + \\ &+ (P_1^\kappa P_1 + Q_1^\kappa Q_1) \sin(1 - \kappa) t], \quad (102)
 \end{aligned}$$

где

$$P_0^k = P(q = \kappa, t); \quad P_0 = P_0(q = 1, t).$$

Введенные функции можно вычислить по формулам

$$P_0(q, t) = 1 - \frac{9}{2! (8qt)^2} + \frac{9 \cdot 25 \cdot 49}{4! (8qt)^4} - \dots;$$



Фиг. 4. Графики трансцендентного уравнения для полого цилиндра:
а — $\kappa = 0,2$; б — $\kappa = 0,4$; в — $\kappa = 0,6$;
г — $\kappa = 0,8$; д — приближенное уравнение.

$$Q_0(q, t) = -\frac{1}{8qt} + \frac{9 \cdot 25}{3! (8qt)^3} - \dots;$$

$$P_1(q, t) = 1 + \frac{15}{2! (8qt)^2} - \frac{15 \cdot 21 \cdot 45}{4! (8qt)^4} + \dots; \quad (103)$$

$$Q_1(q, t) = \frac{3}{8qt} - \frac{15 \cdot 21}{3! (8qt)^3} + \dots$$

Оставляя в рядах по два члена, будем иметь

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{t \sqrt{\kappa}} \left[\sin(1 - \kappa)t + \frac{1 - \kappa}{8\kappa t} \cos(1 - \kappa)t \right]; \\ \Psi_2 &= -\frac{1}{t \sqrt{\kappa}} \left[\cos(1 - \kappa)t - \frac{1 + 3\kappa}{8\kappa t} \sin(1 - \kappa)t \right]; \\ \Psi_3 &= \frac{1}{t \sqrt{\kappa}} \left[\cos(1 - \kappa)t + \frac{3 + \kappa}{8\kappa t} \sin(1 - \kappa)t \right]; \\ \Psi_4 &= \frac{1}{t \sqrt{\kappa}} \left[\sin(1 - \kappa)t - \frac{3(1 - \kappa)}{8\kappa t} \cos(1 - \kappa)t \right]. \end{aligned} \quad (104)$$

При больших t_m и при $\kappa \approx 1$, т. е. для достаточно тонких цилиндров или для случаев, когда $|\kappa t| \gg 1$, формулы (104) можно упростить, оставив в них по одному члену ряда.

В этом случае

$$\Psi_1 = \Psi_4 = \frac{\sin(1 - \kappa)t}{t \sqrt{\kappa}}; \quad -\Psi_2 = \Psi_3 = \frac{\cos(1 - \kappa)t}{t \sqrt{\kappa}}. \quad (105)$$

Применив асимптотические представления функций Ψ_i , получим приближенные разрешающие уравнения для всех случаев задания граничных условий на боковых поверхностях цилиндра. Уравнения выписаны в табл. 18.

Асимптотическое представление уравнения (101) при $|\kappa t| \gg 1$ имеет вид

$$2(1 - \kappa)^2 t^2 + \cos 2(1 - \kappa)t = 0. \quad (106)$$

Из выражения (106) видно, что при больших номерах корней решения не зависят от материала цилиндра, так как v в уравнение не входит.

Корни уравнения (106) комплексные, попарно сопряженные. Обозначим $re^{i\theta} = 2(1 - \kappa)t$; тогда, отделяя действительную и мнимую части уравнения, получим

$$\begin{aligned} r^2 \cos 2\theta + 2 \cos(r \cos \theta) \operatorname{ch}(r \sin \theta) &= 0; \\ r^2 \sin 2\theta - 2 \sin(r \cos \theta) \operatorname{sh}(r \sin \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (107)$$

График уравнения показан на фиг. 4, д. Асимптотические значения корней будут близко совпадать с точными при больших r_m , т. е. начиная с третьего или четвертого корня.

Имея значения корней, нетрудно построить соответствующие решения для цилиндра с осесимметричным нагружением торцов и ненагруженными боковыми поверхностями. При построении решений целесообразно заменить функции Неймана, входящие в функции Ψ_i , на функции Ганкеля первого рода. Таблицы этих функций нулевого и первого порядка комплексного аргумента приведены в монографии [6]. Функции $\Psi_i(q, t)$ при такой замене имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{\pi}{2i} (J_0 H'_0 - H_0 J'_0); \quad \Psi_3 = \frac{\pi}{2i} (J_1 H'_0 - H_1 J'_0); \\ \Psi_2 &= \frac{\pi}{2i} (J_0 H'_1 - H_0 J'_1); \quad \Psi_4 = \frac{\pi}{2i} (J_1 H'_1 - H_1 J'_1), \end{aligned} \quad (108)$$

где

$$J_0 = J_0(q, t); \quad J'_0 = J'_0(t).$$

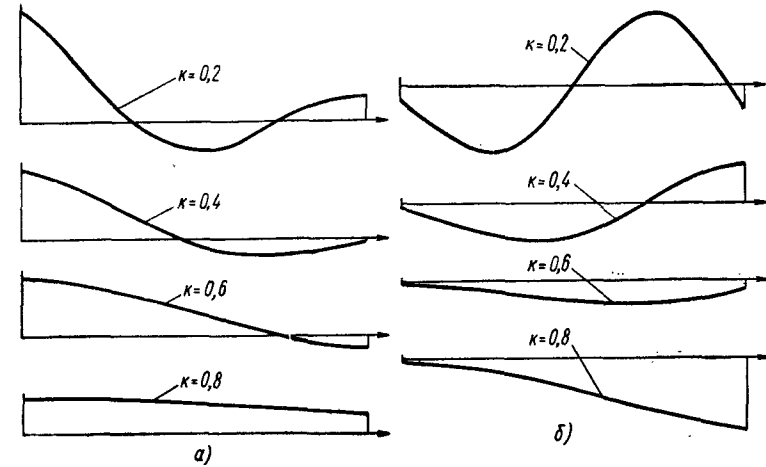
Таблица 18

Приближенные разрешающие уравнения полого цилиндра ($n = 0$)

Иско- мые	$\sigma_r^0 \tau_{rz}^0$	$\sigma_r^0 u_z^0$	$u_r^0 \tau_{rz}^0$	$u_r^0 u_z^0$
Зада- ны	$u_r^0 = u_z^0 = 0$	$u_r^0 = \tau_{rz}^0 = 0$	$\sigma_r^0 = u_z^0 = 0$	$\sigma_r^0 = \tau_{rz}^0 = 0$
	$-\frac{1}{2\kappa x^2}$	$-\frac{2(1-\nu)}{2\kappa x}$	$\frac{1}{\kappa x}$	$\frac{x}{2\kappa}$
u_r^κ u_z^κ	$2(1-\kappa)^2 x^2 - (7-8\nu) \times \cos 2(1-\kappa)x$	$2(1-\kappa)x - (3-4\nu) \times \sin 2(1-\kappa)x$	$(1-\kappa)[\kappa - (3-2\nu)]x - (3-4\nu)(1-\nu) \times \sin 2(1-\kappa)x$	$-2(1-\kappa)^2 x^2 + (3-4\nu) \times \cos 2(1-\kappa)x$
u_r^κ τ_{rz}^κ	$\frac{2(1-\nu)}{2\kappa x}$	$\frac{4(1-\nu)^2}{\kappa}$	$\frac{2(1-\nu)}{\kappa}$	$2(1-\nu) \frac{x}{2\kappa}$
	$2(1-\kappa)x - (3-4\nu) \times \sin 2(1-\kappa)x$	$\sin^2(1-\kappa)x$	$(1-\kappa) + 2(1-\nu) \times \cos^2(1-\kappa)x$	$2(1-\kappa)x + \sin 2(1-\kappa)x$
σ_r^κ u_z^κ	$-\frac{1}{\kappa^2 x}$	$-\frac{2(1-\nu)}{\kappa^2}$	$-\frac{1}{\kappa^2}$	$-\frac{x}{\kappa^2}$
	$(1-\kappa)x[1 - (3-2\nu)\kappa] - (3-4\nu) \times (1-\nu)\kappa \times \sin 2(1-\kappa)x$	$(1-\kappa) - 2(1-\nu)\kappa \times \cos^2(1-\kappa)x$	$(1-\kappa)^2(3-2\nu) - 4(1-\nu)^2\kappa \times \sin^2(1-\kappa)x$	$(1-\kappa)[1 - (3-2\nu)\kappa] \times x + (1-\nu) \times \kappa \sin 2(1-\kappa)x$
σ_r^κ τ_{rz}^κ	$-\frac{1}{2\kappa}$	$-\frac{2(1-\nu)x}{2\kappa}$	$\frac{x}{\kappa}$	$-\frac{x^2}{2\kappa}$
	$2(1-\kappa)^2 x^2 - (3-4\nu) \times \cos 2(1-\kappa)x$	$2(1-\kappa)x + \sin 2(1-\kappa)x$	$(1-\kappa)[\kappa - (3-2\nu)]x + (1-\nu) \times \sin 2(1-\kappa)x$	$2(1-\kappa)^2 x^2 + \cos 2(1-\kappa)x$

Примечание. В рамке показан общий множитель.

Значения функций Ψ_i при $\kappa = 0,2 \div 0,8$ и $\theta = 0,1 \div 0,7$ приведены в табл. 19, а графики показаны на фиг. 5. При $r > 10$ целесообразно пользоваться асимптотическими представлениями функций Ψ_i , приведенными выше.

Фиг. 5. Графики функций Ψ_i при $\varphi = 0,1$:
а — $\text{Re}\Psi_i$; б — $\text{Im}\Psi_i$.

Для построения частного интеграла уравнения (99) нагрузку $q(\xi)$ разложим в ряд Фурье:

$$q(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m \omega \xi + b_m \sin m \omega \xi), \quad \left(\omega = \frac{\pi}{l} \right), \quad (109)$$

где $l = \frac{\xi'}{i_0}$ — относительная длина цилиндра. Частный интеграл также разыскиваем в виде ряда с неопределенными коэффициентами

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \cos m \omega \xi + d_m \sin m \omega \xi). \quad (110)$$

Для определения коэффициентов C_m и d_m нужно подставить выражение (110) в левую часть уравнения (99). Предварительно возьмем операторы Ψ_i^2 от выражения (109). Но сначала покажем, что $\Psi_1, \Psi_2, \gamma\Psi_2, \gamma\Psi_3$ являются целыми функциями от γ^2 . Для этого представим входящие в них функции Неймана нулевого и первого порядка в виде

$$\begin{aligned} N_0(\kappa\gamma) &= J_0(\kappa\gamma) \ln \kappa\gamma - M_0(\kappa\gamma); \\ N_1(\kappa\gamma) &= J_1(\kappa\gamma) \ln \kappa\gamma - \frac{1}{\kappa\gamma} J_0(\kappa\gamma) - M_1(\kappa\gamma); \\ N_0(\gamma) &= J_0(\gamma) \ln \gamma - M_0(\gamma); \\ N_1(\gamma) &= J_1(\gamma) \ln \gamma - \frac{1}{\gamma} J_0(\gamma) - M_1(\gamma), \end{aligned} \quad (111)$$

Значения функций Ψ_i ($0.2 \leq \kappa \leq 0.8$; $1 \leq q \leq 10$; $0 \leq \theta \leq 0.7$)

κ	q	$Re\Psi_1$	$Jm\Psi_1$	$Re\Psi_2$	$Jm\Psi_2$	$Re\Psi_3$	$Jm\Psi_3$	$Re\Psi_4$	$Jm\Psi_4$
$\theta = 0.1$									
0.2	1	1.439820	-0.033340	-0.464031	0.146794	3.987074	-0.588895	2.179506	-0.043307
	2	0.990907	-0.108694	0.393574	0.095134	0.767400	-0.159101	1.591010	-0.143624
	3	0.418618	-0.169051	0.644633	0.013067	-0.372744	-0.355514	0.825523	-0.230307
	4	-0.087044	-0.161014	0.539983	-0.093203	0.657287	0.003922	0.119235	-0.235437
	5	-0.376407	-0.071248	0.232900	-0.168646	-0.459540	0.161935	-0.334921	-0.137133
	6	-0.396266	0.061277	-0.101489	-0.163285	0.075104	0.217022	-0.455845	0.023777
	7	-0.204380	0.165314	-0.310801	-0.069272	0.247365	0.145073	-0.295488	0.164636
	8	0.063380	0.179051	-0.319952	0.068305	0.359049	-0.010331	-0.004974	0.208263
	9	0.258281	0.089070	-0.155170	0.173552	0.244106	-0.158415	0.238656	0.129416
	10	0.286715	-0.057502	0.076836	0.183082	0.002110	-0.211650	0.312127	-0.027421
0.4	1	0.862600	-0.010683	-0.755532	0.122327	2.156533	-0.280922	0.991568	-0.011631
	2	0.712255	-0.038302	-0.061177	0.082292	0.633861	-0.172024	0.827683	-0.041812
	3	0.495017	-0.071185	0.225666	0.055222	0.033614	-0.121123	0.590029	-0.078102
	4	0.252953	-0.094691	0.337124	0.016528	-0.244161	-0.065470	0.323503	-0.104827
	5	0.030988	-0.096669	0.326238	-0.030117	0.325226	0.002063	0.076269	-0.108826
	6	-0.133050	-0.072160	0.231455	-0.072235	-0.274514	0.057007	-0.110746	-0.084451
	7	-0.216556	-0.025680	0.094658	-0.095885	-0.149197	0.096039	-0.212485	-0.036035
	8	-0.216515	0.029826	-0.041524	-0.091639	-0.003889	0.103368	-0.224496	-0.023096
	9	-0.149082	0.079085	-0.141178	-0.058704	0.115161	0.076519	-0.162669	0.074829
	10	-0.044525	0.100339	-0.182262	-0.005991	0.177365	0.023914	-0.058114	0.102349
0.6	1	0.497518	-0.002675	-0.901317	0.108974	1.546875	-0.177285	0.519673	-0.002747
	2	0.458788	-0.010204	-0.317473	0.065969	0.614400	-0.102508	0.479906	-0.010479
	3	0.398087	-0.021171	-0.079266	0.052171	0.250249	-0.078656	0.417551	-0.021755

Продолжение табл. 19

κ	q	$Re\Psi_1$	$Jm\Psi_1$	$Re\Psi_2$	$Jm\Psi_2$	$Re\Psi_3$	$Jm\Psi_3$	$Re\Psi_4$	$Jm\Psi_4$
0.6	4	0.320780	-0.033480	0.056801	0.041491	0.045742	-0.062840	0.338078	-0.034438
	5	0.233600	-0.044701	0.137095	0.028729	-0.078581	-0.046448	0.248354	-0.046045
	6	0.143968	-0.052469	0.176997	0.012996	-0.147574	-0.027484	0.155953	-0.054161
	7	0.059251	-0.054894	0.184674	-0.004766	-0.175293	-0.006503	0.068404	-0.056845
	8	-0.013969	-0.050892	0.166840	-0.022622	0.170487	0.014632	-0.007554	-0.052974
	9	-0.070536	-0.040391	0.130362	-0.038207	-0.141609	0.033469	-0.066622	-0.042455
	10	-0.107109	-0.024391	0.082492	-0.049208	-0.097129	0.047529	-0.105133	-0.026282
0.8	1	0.221687	-0.000295	-0.973610	0.101965	1.220070	-0.127090	0.223536	-0.000296
	2	0.217351	-0.001165	-0.455129	0.054053	0.576205	-0.066857	0.219178	-0.001170
	3	0.210231	-0.002569	-0.269137	0.039168	0.347152	-0.047901	0.212023	-0.002582
	4	0.200490	-0.004442	-0.167269	0.032240	0.223008	-0.039085	0.202232	-0.004465
	5	0.188343	-0.006694	-0.100129	0.028183	0.141957	-0.038890	0.190023	-0.006729
	6	0.174061	-0.009218	-0.051452	0.025256	0.083604	-0.030214	0.175668	-0.009266
	7	0.157962	-0.011891	-0.014402	0.022692	0.039350	-0.027113	0.159484	-0.011954
	8	0.140398	-0.014581	0.014356	0.020115	0.004985	-0.024111	0.141827	-0.014660
	9	0.121753	-0.017152	0.036633	0.017321	-0.021786	-0.020960	0.123080	-0.017248
	10	0.102428	-0.019473	0.053513	0.014223	-0.042334	-0.017540	0.103646	-0.019584
0.2	1	1.449090	-0.065407	-0.453476	0.292816	3.921867	-1.172950	2.191630	-0.085194
	2	1.014670	-0.216408	0.411242	0.193180	0.719994	-0.713508	1.623250	-0.285634
	3	0.434411	-0.343543	0.690339	0.031749	-0.455277	-0.383000	0.851418	-0.466609
	4	-0.116428	-0.337997	0.602602	-0.187159	0.772094	0.005218	0.092111	-0.490338
	5	-0.468983	-0.160518	0.267483	-0.356303	-0.551925	0.344613	-0.441990	-0.298517
	6	-0.521325	0.124442	-0.146814	-0.364046	-0.070828	0.483221	-0.613267	0.043982
	7	-0.284853	0.372376	-0.450274	-0.171947	0.384537	0.344118	-0.415925	0.371852

κ	Q	Re Ψ_1	Jm Ψ_1	Re Ψ_2	Jm Ψ_2	Re Ψ_3	Jm Ψ_3	Re Ψ_4	Jm Ψ_4
0,2	8	0,107940	0,433626	-0,499282	0,145408	0,581362	-0,009385	0,010414	0,502888
	9	0,449102	0,243253	-0,264185	0,423526	0,424204	-0,387629	0,428191	0,342618
	10	0,545884	-0,124434	0,142818	0,490131	-0,000639	-0,565769	0,602862	-0,046844
0,4	1	0,865666	-0,020984	-0,743310	0,243606	2,123085	-0,559249	0,994908	-0,022846
	2	0,722034	-0,075726	-0,053934	0,164912	0,616584	-0,343752	0,838402	-0,082649
	3	0,509003	-0,114292	0,240001	0,112610	0,011112	-0,244479	0,602596	-0,150038
	4	0,262135	-0,192321	0,363718	0,036250	-0,280576	-0,134834	0,334387	-0,212674
	5	0,023398	-0,200735	0,362067	-0,058892	-0,373815	-0,006424	0,069620	-0,225473
	6	-0,166130	-0,154867	0,264706	-0,149034	-0,177680	0,11105	-0,144573	-0,180270
	7	-0,274368	-0,060075	0,108160	-0,205060	-0,322864	0,206257	-0,273309	-0,081848
	8	-0,285637	0,060220	-0,063244	-0,204070	0,006393	0,230376	-0,298797	0,045836
	9	-0,205494	0,170538	-0,203637	-0,138830	0,172986	0,179181	-0,225529	0,165754
	10	-0,061190	0,234006	-0,275054	-0,022618	0,274179	0,064064	-0,080952	0,238847
0,6	1	0,498301	-0,005249	-0,887636	0,216889	1,523486	-0,352831	0,520477	-0,005389
	2	0,461635	-0,020076	-0,311563	0,131500	0,603905	-0,204238	0,482832	-0,020617
	3	0,403496	-0,041854	-0,074507	0,104470	0,242513	-0,157253	0,423117	-0,043607
	4	0,328148	-0,066641	0,063503	0,083813	0,036601	-0,126457	0,343680	-0,068538
	5	0,241179	-0,089765	0,147711	0,058957	-0,091246	-0,094473	0,256218	-0,092446
	6	0,149126	-0,106545	0,192307	0,027794	-0,165736	-0,056965	0,161391	-0,109943
	7	0,058971	-0,113020	0,204000	-0,008148	-0,198029	-0,014657	0,068345	-0,116979
	8	-0,022354	-0,106610	0,187974	-0,045264	-0,195586	0,029028	-0,015854	-0,110867
	9	-0,088617	-0,036599	0,149757	-0,076859	-0,163365	0,069273	-0,084820	-0,090863
	10	-0,134853	-0,054363	0,095813	-0,104038	-0,114902	0,100770	-0,133452	-0,058314

κ	Q	Re Ψ_1	Jm Ψ_1	Re Ψ_2	Jm Ψ_2	Re Ψ_3	Jm Ψ_3	Re Ψ_4	Jm Ψ_4
0,8	1	0,221774	-0,000578	-0,958985	0,202914	1,202367	-0,252911	0,223624	-0,000580
	2	0,217691	-0,002285	-0,448230	0,107579	0,567485	-0,113061	0,219520	-0,002296
	3	0,210969	-0,005047	-0,264876	0,077988	0,341710	-0,095489	0,212764	-0,005072
	4	0,201729	-0,008740	-0,164249	0,064257	0,219128	-0,077883	0,203478	-0,008785
	5	0,190141	-0,013200	-0,097677	0,056263	0,138822	-0,067630	0,191831	-0,013268
	6	0,164417	-0,018224	-0,049092	0,050549	0,080686	-0,060431	0,178037	-0,018318
	7	0,160810	-0,023581	-0,011791	0,045580	0,036250	-0,054398	0,162349	-0,023706
	8	0,143609	-0,029021	-0,017504	0,040585	0,001381	-0,048566	0,145057	-0,029177
	9	0,125135	-0,034282	0,040547	0,035158	-0,026148	-0,042438	0,126484	-0,034471
	10	0,105734	-0,039102	0,058359	0,029102	-0,047642	-0,035752	0,106978	-0,039324
0,2	$\theta = 0,3$								
	1	1,464280	-0,095433	-0,436320	0,437251	3,814393	-1,747280	2,211490	-0,124253
	2	1,055150	-0,321826	0,439221	0,296974	0,643623	-1,076300	1,677920	-0,424016
	3	0,465654	-0,528140	0,766585	0,062523	-0,591581	-0,596645	0,900579	-0,713886
	4	-0,158894	-0,547820	0,715380	-0,279950	-0,973031	-0,002440	0,055707	-0,784932
	5	-0,628366	-0,292029	0,343966	-0,580372	-0,731506	0,565384	-0,624000	-0,515406
	6	-0,762080	0,181053	-0,208321	-0,647140	-0,089166	0,854698	-0,911121	0,044365
	7	-0,473901	0,661306	-0,705708	-0,363310	0,628221	0,677257	-0,682153	0,659818
	8	0,148281	0,866505	-0,881649	0,215050	1,043843	0,049446	-0,012895	0,997739
	9	0,823490	0,589214	-0,563830	0,832693	0,875055	-0,753542	-0,791476	0,792140
	10	0,116260	-0,150976	0,195782	1,120580	0,099927	-1,279930	1,282990	0,023103
0,4	1	0,870667	-0,030532	-0,723158	0,362784	2,067811	-0,832396	1,000360	-0,032338
	2	0,738294	-0,111344	-0,042417	0,248128	0,588571	-0,514813	0,856212	-0,121482
	3	0,533219	-0,219975	0,262975	0,174337	-0,025134	-0,372286	0,632484	-0,233355
	4	0,280143	-0,295398	0,407998	0,062829	-0,340866	-0,212492	0,355404	-0,326092

κ	Q	$Re\Psi_1$	$Im\Psi_1$	$Re\Psi_2$	$Im\Psi_2$	$Re\Psi_3$	$Im\Psi_3$	$Re\Psi_4$	$Im\Psi_4$
0,4	5	0,014601	-0,319651	0,424849	-0,083720	-0,457978	-0,016836	0,062727	-0,357776
	6	-0,219528	-0,260381	0,327962	-0,233327	-0,412179	0,185368	-0,198832	-0,300567
	7	-0,367389	-0,116096	0,141841	-0,340584	-0,238392	0,344147	-0,380204	-0,151599
	8	-0,418285	0,086070	-0,091182	-0,361988	0,012361	0,408416	-0,440546	0,061809
	9	-0,327700	0,293184	-0,312658	-0,271814	0,271660	0,344784	-0,359868	0,285151
	10	-0,117904	0,439767	-0,457584	-0,075120	0,462836	0,153090	-0,150133	0,448767
0,6	1	0,499574	-0,007623	-0,865001	0,322694	1,484780	-0,524916	0,521784	-0,007825
	2	0,466302	-0,029289	-0,301881	0,196144	0,586642	-0,304404	0,487627	-0,030077
	3	0,412488	-0,061537	-0,066897	0,156994	0,230008	-0,235697	0,432368	-0,063225
	4	0,340684	-0,099060	0,074181	0,127773	0,021946	-0,191598	0,386607	-0,101860
	5	0,254608	-0,135364	0,164923	0,093240	-0,112468	-0,145709	0,270133	-0,139357
	6	0,159195	-0,163600	0,217769	0,046455	-0,195874	-0,090713	0,171971	-0,168720
	7	0,060540	-0,177485	0,237170	-0,008211	-0,236825	-0,026699	0,070330	-0,183521
	8	-0,034311	-0,172236	0,225711	0,067110	-0,240001	0,042041	-0,027608	-0,178846
	9	-0,117773	-0,145378	0,186429	-0,123481	-0,209557	0,108596	-0,114106	-0,152117
	10	-0,182331	-0,097341	0,123885	-0,169545	-0,150892	0,164732	-0,181489	-0,103703
0,8	1	0,221916	-0,000838	-0,934774	0,301838	1,172014	-0,376209	0,223766	-0,000842
	2	0,218246	-0,003318	-0,436814	0,160056	0,553056	-0,197963	0,220078	-0,003335
	3	0,212172	-0,007343	-0,257843	0,116112	0,332722	-0,142150	0,213974	-0,007380
	4	0,203762	-0,012751	-0,159296	0,095821	0,212752	-0,116102	0,205521	-0,012816
	5	0,193108	-0,019324	-0,093670	0,084135	0,133715	-0,101062	0,194813	-0,019423
	6	0,180334	-0,026793	-0,045305	0,075901	0,075981	-0,090635	0,181974	-0,026932
	7	0,165593	-0,034846	-0,007629	0,068831	0,031284	-0,081995	0,167158	-0,035029
	8	0,149071	-0,043138	-0,022528	0,061753	-0,004387	-0,073698	0,150551	-0,043363
	9	0,130986	-0,051302	0,046834	0,054028	-0,033164	-0,064963	0,132372	-0,057580
	10	0,111589	-0,058959	0,208385	0,045321	-0,056256	-0,055333	0,034842	-0,059289

κ	Q	$Re\Psi_1$	$Im\Psi_1$	$Re\Psi_2$	$Im\Psi_2$	$Re\Psi_3$	$Im\Psi_3$	$Re\Psi_4$	$Im\Psi_4$
$\theta = 0,4$									
0,2	1	1,485000	-0,122267	-0,413189	0,579202	3,666410	-2,306980	2,238560	-0,159103
	2	1,113420	-0,422994	0,475221	0,409154	0,542326	-1,445860	1,756180	-0,555990
	3	0,519748	-0,725775	0,826611	0,113417	-0,778227	-0,839464	0,981954	-0,974874
	4	-0,202246	-0,808330	0,889840	-0,363975	-1,272607	-0,033091	0,025957	-1,139990
	5	-0,856325	-0,502081	0,494080	-0,852677	-1,039931	0,831935	-0,879194	-0,832476
	6	-1,165560	0,197450	-0,250655	-1,068640	-0,185596	1,396310	-1,399800	-0,021484
	7	-0,875610	1,056390	-1,092400	-0,746018	0,973938	1,279070	-1,214830	1,043490
	8	-0,077676	1,624990	-1,600770	0,186908	1,884391	0,309892	-0,211369	1,848850
	9	1,410240	1,401180	-1,314110	1,454520	1,909663	-1,259700	1,329670	1,790930
	10	2,457420	0,120901	-0,010846	2,410970	0,653961	-2,692050	2,677400	0,507163
0,4	1	0,877444	-0,038972	-0,695394	0,478804	1,991405	-1,097800	1,007740	-0,042421
	2	0,760924	-0,144136	-0,027440	0,332085	0,550976	-0,684695	0,880977	-0,157188
	3	0,568878	-0,282359	0,293141	0,242555	-0,073117	-0,506714	0,671951	-0,309036
	4	0,311034	-0,405467	0,469414	0,100774	-0,423878	-0,303744	0,390861	-0,446585
	5	0,011224	-0,460614	0,518449	-0,099427	-0,581328	-0,039979	0,062747	-0,513223
	6	-0,288253	-0,403888	0,433085	-0,324147	-0,555467	0,256160	-0,267837	-0,461400
	7	-0,527810	-0,215245	0,215582	-0,513417	-0,354333	0,502023	-0,537906	-0,268366
	8	-0,639712	0,088450	-0,105118	-0,595900	-0,011273	0,670003	-0,675426	0,050011
	9	-0,565529	0,446708	-0,464576	-0,509281	0,401920	0,631174	-0,617409	0,431911
	10	-0,279246	0,759608	-0,765098	-0,224537	0,775368	0,362967	-0,334023	0,775548
0,6	1	0,501291	-0,009705	-0,833659	0,425356	1,431168	-0,691845	0,523547	-0,009962
	2	0,472669	-0,037520	-0,288669	0,259430	0,562947	-0,402196	0,494166	-0,038526
	3	0,425002	-0,079654	-0,056907	0,209766	0,213304	-0,313816	0,445238	-0,081827

κ	Q	Re Ψ_3	Jm Ψ_1	Re Ψ_2	Jm Ψ_2	Re Ψ_3	Jm Ψ_3	Re Ψ_4	Jm Ψ_4
0,6	4	0,358706	-0,130124	0,088072	0,174107	0,002675	-0,258926	0,377179	-0,133766
	5	0,275002	-0,181272	0,187892	0,130219	-0,140815	-0,201866	0,291232	-0,186534
	6	0,176424	-0,224468	0,253034	0,071504	-0,237384	-0,131474	0,189965	-0,231325
	7	0,067273	-0,250999	0,285197	-0,001944	-0,292591	-0,046012	0,077456	-0,259237
	8	-0,046091	-0,253105	0,283458	-0,085574	-0,307186	0,050614	0,038965	-0,262324
	9	-0,155222	-0,225072	0,246942	-0,171401	-0,281065	0,150376	-0,151584	-0,234708
0,8	10	-0,249933	-0,164318	0,176503	-0,248916	-0,215492	0,242270	-0,249749	-0,172681
	1	0,222106	-0,001065	-0,901219	0,397751	1,129946	-0,495753	0,223957	-0,001070
	2	0,218993	-0,004225	-0,421005	0,210969	0,533070	-0,260923	0,220829	-0,004246
	3	0,213802	-0,009372	-0,248137	0,153193	0,320308	-0,187513	0,215612	-0,009420
	4	0,206533	-0,016334	-0,152522	0,126695	0,204012	-0,153440	0,208306	-0,016417
	5	0,197189	-0,024870	-0,088294	0,111662	0,126808	-0,134006	0,198916	-0,024997
0,2	6	0,185783	-0,034690	-0,040305	0,101304	0,069721	-0,120782	0,184453	-0,034859
	7	0,172344	-0,045411	-0,002196	0,092587	0,024756	-0,110028	0,173947	-0,045647
	8	0,156923	-0,056662	0,029084	0,083932	-0,011951	-0,099803	0,158448	-0,056961
	9	0,139596	-0,067998	0,051110	0,074441	-0,042419	-0,089009	0,141034	-0,068361
	10	0,120479	-0,078954	0,076713	0,063600	-0,067740	-0,077010	0,121822	-0,079377
$\theta = 0,5$									
0,2	1	1,510690	-0,144893	-0,384911	0,717654	3,480296	-2,847030	2,272070	-0,188421
	2	1,190600	-0,517066	0,515910	0,531957	0,421852	-1,823440	1,859100	-0,677717
	3	0,606837	-0,936369	1,005640	0,194324	-1,009931	-1,124730	1,107650	-1,248510
	4	-0,225015	-1,136660	1,139070	-0,425572	-1,683588	-0,112637	0,030016	-1,574540
	5	-1,141890	-0,843050	0,766749	-1,170890	-1,538827	1,130630	-1,189160	-1,311670
	6	-1,786360	0,092946	-0,195208	-1,689590	-0,471666	2,170090	-2,132840	-0,254524
	7	-1,668270	1,523140	-1,576700	-1,494100	1,343081	2,360510	-2,214160	-1,463730

κ	Q	Re Ψ_1	Jm Ψ_1	Re Ψ_2	Jm Ψ_2	Re Ψ_3	Jm Ψ_3	Re Ψ_4	Jm Ψ_4
0,4	8	-0,380871	2,875580	-2,820580	-0,196000	3,246543	1,119320	-0,916256	-3,214830
	9	2,049040	3,197290	-3,020190	2,159580	4,098297	-1,650890	1,808790	3,904970
	10	4,810260	1,492630	-1,246740	4,764460	2,631556	-5,125940	5,125510	2,335860
	1	0,885771	-0,045974	-0,660448	0,590602	1,894816	-1,352910	1,016810	-0,050037
	2	0,789683	-0,172969	-0,010111	0,416731	0,505362	-0,852656	0,912413	-0,188530
	3	0,617382	-0,348801	0,328208	0,319272	-0,129824	-0,649655	0,725438	-0,381254
	4	0,360360	-0,522409	0,546254	0,155596	-0,526918	-0,414919	0,446620	-0,573866
	5	0,023968	-0,629529	0,646534	-0,097018	-0,747005	-0,086819	0,081140	-0,697825
	6	-0,360497	-0,603400	0,595958	-0,413298	-0,769715	0,319377	-0,338606	-0,681580
	7	-0,727663	-0,391479	0,361955	-0,727182	-0,562333	0,734423	-0,744308	-0,468043
0,6	8	-0,978935	0,022801	-0,060906	-0,938432	-0,116872	1,047720	-1,032330	-0,037350
	9	-0,998948	0,597421	-0,626163	-0,929581	0,519323	1,122710	-1,078460	-0,569164
	10	-0,676126	1,214990	-1,217850	-0,596969	1,221722	0,835109	-0,769434	1,231340
	1	0,503389	-0,011412	-0,793948	0,523863	1,363212	-0,851968	0,525700	-0,011715
	2	0,480555	-0,044456	-0,272249	0,320853	0,533269	-0,496781	0,502267	-0,045645
	3	0,440902	-0,095579	-0,045180	0,262704	0,193174	-0,391321	0,461583	-0,098169
	4	0,382532	-0,158953	-0,104072	0,223421	-0,019925	-0,328955	0,401713	-0,163349
	5	0,303741	-0,226668	0,152228	0,174569	-0,174649	-0,264661	0,320910	-0,233123
	6	0,203860	-0,289071	0,297084	0,106016	-0,289044	-0,192553	0,218477	-0,297649
	7	0,084181	-0,335335	0,348650	0,015171	-0,365650	-0,077557	0,095703	-0,345881
0,8	8	-0,051149	-0,354289	0,365000	-0,095278	-0,400867	0,048703	-0,043228	-0,366416
	9	-0,194429	-0,335562	0,340045	-0,217905	-0,388941	0,189038	-0,190522	-0,348646
1,0	10	-0,334045	-0,271010	0,268616	-0,340816	-0,324592	0,331193	-0,334411	-0,284204

κ	Q	$Re\Psi_1$	$Im\Psi_1$	$Re\Psi_2$	$Im\Psi_2$	$Re\Psi_3$	$Im\Psi_3$	$Re\Psi_4$	$Im\Psi_4$
0,8	1	0,222338	-0,001250	-0,858657	0,489695	1,076586	-0,610349	0,224190	-0,001256
	2	0,219906	-0,004968	-0,400973	0,259816	0,507740	-0,321320	0,221746	-0,004993
	3	0,215805	-0,011056	-0,235893	0,188884	0,304693	-0,231150	0,217525	-0,011112
	4	0,209967	-0,019354	-0,144081	0,156628	0,193083	-0,189584	0,211758	-0,019451
	5	0,202301	-0,029634	-0,081764	0,138683	0,138684	-0,166249	0,204055	-0,029785
	6	0,192707	-0,041612	-0,034384	0,126699	0,062223	-0,150776	0,194413	-0,041825
	7	0,181075	-0,054939	-0,004134	0,116926	0,017087	-0,138544	0,182724	-0,055223
	8	0,167302	-0,069212	0,036675	0,107372	-0,020779	-0,127117	0,168884	-0,069572
	9	0,151302	-0,083974	0,064789	0,096865	-0,053290	-0,115069	0,152802	-0,084415
	10	0,133013	-0,098728	0,089211	0,084675	-0,081434	-0,101515	0,134415	-0,099234
$\theta = 0,6$									
0,2	1	1,540570	-0,162362	-0,352468	0,851445	3,258952	-3,362380	2,310990	-0,210980
	2	1,287360	-0,600168	0,556874	0,666908	0,289639	-2,209180	1,987150	-0,784158
	3	0,739037	-1,155270	1,159310	0,316658	-1,273563	-1,467000	1,291890	-1,528090
	4	-0,193550	-1,544840	1,472950	-0,426982	-2,212330	-0,282154	0,109245	-2,100390
	5	-1,445520	-1,381590	1,226020	-1,504180	-2,304072	1,408470	-1,500710	-2,028880
	6	-2,655980	-0,284556	1,04402	-2,549020	-1,140430	3,197840	-3,132740	-0,835832
	7	-3,097210	1,881640	-1,990270	-2,849810	1,479712	4,191630	-3,944300	1,689660
	8	-1,799090	4,663470	-4,599800	-1,480610	5,098450	3,155070	-2,781150	5,093980
	9	2,004450	6,711390	-6,413790	2,263870	8,189315	-0,979140	1,332900	7,890660
	10	8,075110	5,791050	-5,290640	8,098230	8,104005	-8,179420	8,296210	7,530810
	1	0,895362	-0,051252	-0,618840	0,697107	1,779220	-1,595250	1,027250	-0,055773
	2	0,824117	-0,196610	-0,008220	0,501748	0,453635	-1,017650	0,950003	-0,214167
	3	0,679986	-0,409714	0,365022	0,406124	-0,191128	-0,802575	0,794210	-0,447185
	4	0,434732	-0,643592	0,634764	0,233604	-0,644779	-0,553082	0,529624	-0,704961

κ	Q	$Re\Psi_1$	$Im\Psi_1$	$Re\Psi_2$	$Im\Psi_2$	$Re\Psi_3$	$Im\Psi_3$	$Re\Psi_4$	$Im\Psi_4$
0,4	5	0,068266	-0,828954	0,810329	-0,062837	-0,954892	-0,173419	0,134311	-0,913931
	6	-0,413244	-0,877150	0,833585	-0,481196	-1,072281	0,350925	-0,386330	-0,979830
	7	-0,957802	-0,691998	0,626901	-0,968110	0,912902	0,968803	-0,978940	-0,799910
	8	-1,451900	-0,193984	0,122654	-1,409240	-0,397142	1,556560	-1,525510	-0,288074
	9	-1,716830	0,642198	-0,697512	-1,628230	0,504321	1,917130	-1,839030	0,586035
	10	-1,527170	1,740750	-1,755630	-1,405990	1,716787	1,800180	-1,682090	1,747980
0,6	1	0,505788	-0,012677	-0,746296	0,617238	1,281627	-1,003693	0,528163	-0,013013
	2	0,489727	-0,049807	-0,253008	0,379869	0,498152	-0,587291	0,511685	-0,051134
	3	0,459934	-0,108631	-0,032496	0,315575	0,170564	-0,467765	0,481141	-0,111553
	4	0,412350	-0,184357	0,120730	0,276086	-0,044174	-0,401931	0,432390	-0,189888
	5	0,342237	-0,269951	0,244835	0,226843	-0,211547	-0,335657	0,360594	-0,277474
	6	0,245130	-0,355946	0,347752	0,153495	-0,348242	-0,247661	0,261189	-0,366170
	7	0,118015	-0,430419	0,426641	0,049307	-0,454684	-0,128010	0,131071	-0,443333
	8	-0,039295	-0,479252	0,473010	-0,087151	-0,523420	0,026359	-0,030002	-0,494577
	9	-0,222705	-0,486821	0,475037	-0,251937	-0,542566	0,212235	-0,217928	-0,503981
	10	-0,422440	-0,437251	0,419532	-0,435003	-0,498253	0,419616	-0,422852	-0,455335
0,8	1	0,222602	-0,001386	-0,807515	0,576752	1,012469	-0,718852	0,224456	-0,001393
	2	0,220951	-0,005518	-0,376930	0,306114	0,477333	-0,378555	0,222796	-0,005546
	3	0,218112	-0,012325	-0,221276	0,222840	0,285897	-0,272636	0,219944	-0,012887
	4	0,213960	-0,021683	-0,134156	0,185350	0,180178	-0,224206	0,215771	-0,021792
	5	0,208323	-0,033415	-0,074276	0,164997	0,108562	-0,197540	0,210107	-0,033584
	6	0,200994	-0,047293	-0,027896	0,151967	0,053871	-0,180455	0,202743	-0,047533
	7	0,191734	-0,063026	0,010809	0,141838	0,008806	-0,167499	0,193440	-0,063348
	8	0,180287	-0,080266	0,044651	0,132222	-0,030179	-0,155766	0,181944	-0,080680
	9	0,166393	-0,098597	0,075055	0,121670	-0,064924	-0,143497	0,167976	-0,099122
	10	0,149794	-0,117541	0,102731	0,109204	-0,096369	-0,129533	0,151285	-0,118187

Продолжение табл. 19

κ	Q	$Re\Psi_1$	$Im\Psi_1$	$Re\Psi_2$	$Im\Psi_2$	$Re\Psi_3$	$Im\Psi_3$	$Re\Psi_4$	$Im\Psi_4$
$\theta = 0,7$									
0,2	1	1,573680	-0,173833	-0,316931	0,979253	3,005702	-3,847870	2,354050	-0,225704
	2	1,403470	-0,667424	0,592703	0,814416	0,154611	-2,601530	2,139630	-0,869126
	3	0,928768	-1,371680	1,321990	0,492038	-1,550183	-1,880210	1,548860	-1,799470
	4	-0,061138	-2,032070	1,890510	-0,335301	-2,848611	-0,598170	0,319641	-2,713120
	5	-1,679880	-2,184800	1,938020	-1,775080	-3,407329	-1,552110	-1,704720	-3,305660
	6	-3,720740	-1,167800	0,873174	-3,605631	-2,470856	0,438741	-4,316130	-2,032590
	7	-5,382600	1,686370	-1,910750	-5,038410	0,818522	6,980820	-6,619610	1,189030
	8	-5,079030	6,567250	-6,557710	-4,546180	6,827107	7,727620	-6,795780	6,929120
	9	-0,600822	12,387200	-11,976100	-0,031122	14,469010	2,290650	-2,249280	14,089600
	10	9,985280	15,867600	-14,968100	10,295200	20,080650	-8,916518	9,425020	19,087600
0,4	1	0,905873	-0,064568	-0,571168	0,797251	1,645993	-1,822390	1,038690	-0,059372
	2	0,863476	-0,213769	0,026034	0,586482	0,397949	-1,178260	0,992911	-0,232706
	3	0,757351	-0,461516	0,399487	0,504031	-0,251785	-0,965982	0,878889	-0,502956
	4	0,540897	-0,763005	0,728253	0,341162	-0,768769	-0,725122	0,646898	-0,833313
	5	0,163892	-1,054990	1,005420	0,021178	-1,198034	-0,320453	0,243121	-1,156970
	6	-0,408460	-1,237140	1,157670	-0,493210	-1,473386	0,310015	-0,370532	-1,367940
	7	-1,167850	-1,170160	1,062990	-1,190760	-1,461693	1,166030	-1,187390	-1,318910
	8	-2,027690	-0,688493	0,569140	-1,982880	-0,988761	2,157950	-2,119200	-0,834060
	9	-2,786630	0,363300	-0,468393	-2,670430	-0,117535	3,070430	-2,957620	0,253696
	10	-3,103530	2,065170	-2,119610	-2,920670	1,953447	3,535410	-3,347420	2,033390

Продолжение табл. 19

κ	Q	$Re\Psi_1$	$Im\Psi_1$	$Re\Psi_2$	$Im\Psi_2$	$Re\Psi_3$	$Im\Psi_3$	$Re\Psi_4$	$Im\Psi_4$
0,6	1	0,508397	-0,013444	-0,691209	0,704548	1,187260	-1,145550	0,530841	-0,013801
	2	0,499885	-0,053316	-0,231377	0,435892	0,458212	-0,672825	0,522115	-0,054732
	3	0,481694	-0,118098	-0,019736	0,367958	-0,146538	-0,542497	0,503482	-0,121249
	4	0,448059	-0,204850	0,136276	0,332120	-0,068036	-0,477708	0,469094	-0,210360
	5	0,391597	-0,308628	0,273804	0,288204	-0,248191	-0,415958	0,411395	-0,317033
	6	0,303934	-0,421767	0,401220	0,217456	-0,410587	-0,330457	0,321846	-0,433477
	7	0,176809	-0,533152	0,515592	0,107928	-0,555405	-0,205328	0,192008	-0,548379
	8	0,003533	-0,627559	0,606664	-0,048172	-0,673314	-0,030462	0,015018	-0,646269
	9	-0,219116	-0,685370	0,658172	-0,254082	-0,747743	0,198828	-0,212481	-0,707184
	10	-0,488573	-0,682779	0,648758	-0,506873	-0,756236	0,480378	-0,487961	-0,706928
0,8	1	0,222888	-0,001466	-0,748306	0,658052	0,938237	-0,820179	0,224743	-0,001474
	2	0,222086	-0,005853	-0,349131	0,349398	0,442167	-0,432054	0,223938	-0,005882
	3	0,220640	-0,013122	-0,204478	0,254721	0,264336	-0,311557	0,222484	-0,013188
	4	0,218382	-0,023210	-0,122951	0,212578	0,165537	-0,256961	0,220216	-0,023326
	5	0,215085	-0,036018	-0,066157	0,190354	0,097807	-0,227583	0,216904	-0,036199
	6	0,210463	-0,054120	-0,022402	0,176901	0,045100	-0,209569	0,212261	-0,051671
	7	0,204175	-0,069212	-0,017313	0,167188	0,000528	-0,196723	0,205947	-0,069561
	8	0,195855	-0,089183	-0,052217	0,158480	-0,039306	-0,185711	0,197571	-0,089636
	9	0,185008	-0,111021	-0,084908	0,149034	-0,076214	-0,174475	0,186721	-0,111585
	10	0,171262	-0,134299	0,116046	0,137642	-0,111191	-0,161558	0,172927	-0,135091

где

$$\begin{aligned} M_0(\kappa\gamma) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} J_{2m}(\kappa\gamma); \\ M_0(\gamma) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} J_{2m}(\gamma); \\ M_1(\kappa\gamma) &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1+2m}{m(1+m)} J_{1+2m}(\kappa\gamma); \\ M_1(\gamma) &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1+2m}{m(1+m)} J_{1+2m}(\gamma). \end{aligned} \quad (112)$$

Нетрудно видеть, что функции $M_0(\kappa\gamma)$, $M_0(\gamma)$, $M_1(\kappa\gamma)$ и $M_1(\gamma)$ являются целыми функциями от γ^2 . Подставляя в функции Ψ_i вместо функций Неймана их выражения (111), получим

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -(J_0 M'_0 - M_0 J'_0) - J_0 J'_0 \ln \kappa; \\ \Psi_2 &= -(J_0 M'_1 - M_0 J'_1) - J_0 J'_1 \ln \kappa - \frac{1}{\gamma} J_0 J'_0; \\ \Psi_3 &= -(J_1 M'_0 - M_1 J'_0) - J_1 J'_0 \ln \kappa + \frac{1}{\kappa\gamma} J_0 J'_0; \\ \Psi_4 &= -(J_1 M'_1 - M_1 J'_1) - J_1 J'_1 \ln \kappa + \frac{1}{\kappa\gamma} (J_0 J'_0 - \kappa J_1 J'_0). \end{aligned} \quad (113)$$

Отсюда видно, что функции Ψ_1 и Ψ_4 являются четными, а функции Ψ_2 и Ψ_3 нечетными функциями от γ^2 . Благодаря этому свойству операторов будем иметь

$$\begin{aligned} \Psi'_1 \cos a\zeta &= -\bar{\Psi}_1 \cos a\zeta, \quad \Psi'_1 \sin a\zeta = -\bar{\Psi}_1 \sin a\zeta; \\ \Psi'_2 \cos a\zeta &= -\bar{\Psi}_2 \sin a\zeta, \quad \Psi'_2 \sin a\zeta = \bar{\Psi}_2 \cos a\zeta; \\ \Psi'_3 \cos a\zeta &= \bar{\Psi}_3 \sin a\zeta, \quad \Psi'_3 \sin a\zeta = -\bar{\Psi}_3 \cos a\zeta; \\ \Psi'_4 \cos a\zeta &= -\bar{\Psi}_4 \cos a\zeta, \quad \Psi'_4 \sin a\zeta = -\bar{\Psi}_4 \sin a\zeta, \end{aligned} \quad (114)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1 &= I_0(\kappa a) K_0(a) - K_0(\kappa a) I_0(a); \\ \bar{\Psi}_2 &= I_0(\kappa a) K_1(a) - K_0(\kappa a) I_1(a); \\ \bar{\Psi}_3 &= I_1(\kappa a) K_0(a) + K_1(\kappa a) I_0(a); \\ \bar{\Psi}_4 &= I_1(\kappa a) K_1(a) - K_1(\kappa a) I_1(a), \end{aligned} \quad (115)$$

где I_0 и I_1 — функции Бесселя мнимого аргумента, K_0 и K_1 — функции Макдональда.

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \Psi_1^2(\kappa\gamma) \bar{\Phi} &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\Psi}_1^2(\kappa\omega m) (C_m \cos m\omega\zeta + d_m \sin m\omega\zeta); \\ \Psi_2^2(\kappa\gamma) \bar{\Phi} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\Psi}_2^2(\kappa\omega m) (C_m \cos m\omega\zeta + d_m \sin m\omega\zeta); \\ \Psi_3^2(\kappa\gamma) \bar{\Phi} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\Psi}_3^2(\kappa\omega m) (C_m \cos m\omega\zeta + d_m \sin m\omega\zeta); \\ \Psi_4^2(\kappa\gamma) \bar{\Phi} &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\Psi}_4^2(\kappa\omega m) (C_m \cos m\omega\zeta + d_m \sin m\omega\zeta). \end{aligned} \quad (116)$$

Найдя неопределенные коэффициенты, запишем окончательное выражение частного интеграла уравнения (99)

$$\bar{\Phi} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \cos m\omega\zeta + b_m \sin m\omega\zeta}{f(m, \kappa, \omega)}, \quad (117)$$

где

$$\begin{aligned} f(m, \kappa, \omega) &= \kappa^2 m^4 \omega^4 \bar{\Psi}_1^2 - (h + m^2 \omega^2) \kappa^2 m^2 \omega^2 \bar{\Psi}_4^2 - \\ &- (h + \kappa^2 m^2 \omega^2) m^2 \omega^2 \bar{\Psi}_3^2 + [h^2 + h(1 + \kappa^2) m^2 \omega^2 + \kappa^2 m^4 \omega^4] \bar{\Psi}_4^2 + \\ &+ [2h + (1 + \kappa^2) m^2 \omega^2]. \end{aligned} \quad (118)$$

Частный интеграл уравнения (99) для случая нагружения цилиндра касательными напряжениями по боковой поверхности строится аналогичным образом.

Используя формулы (114) и (115), можно построить частные решения для цилиндра с произвольным осесимметричным нагружением поверхности. Для этого достаточно подставить в операционные формулы перемещений и напряжений (см. табл. 16 и 17) выражение частного интеграла (117).

Приближенный расчет осесимметричного полого цилиндра. При расчете полого цилиндра могут встретиться два случая, допускающие упрощения. Первый случай, когда κ мало. При $\kappa \rightarrow 0$ имеем

$$\kappa^2 \gamma^2 \Psi_1^2 \rightarrow 0; \quad \kappa^2 \gamma^2 \Psi_2^2 \rightarrow 0; \quad \kappa^2 \gamma^2 \Psi_3^2 \rightarrow J_0^2; \quad \kappa^2 \gamma^2 \Psi_4^2 \rightarrow J_1^2. \quad (119)$$

Учитывая эти соотношения, можно упростить уравнение (101), оставив в нем лишь члены, которые не обращаются в ноль при $\kappa \rightarrow 0$.

$$2(1 - \nu) \Psi_4^2 = \gamma^2 (\Psi_3^2 + \Psi_4^2). \quad (120)$$

Уравнение (120) верно лишь при небольших значениях модуля $|t_m|$. При больших $|t_m|$ и малых κ следует применять асимптотическое представление уравнения при помощи функций (104), если $|\kappa t| \gg 1$.

При расчете полого цилиндра с малым отверстием при $\kappa \rightarrow 0$ целесообразно пользоваться формулами сплошного цилиндра, а концентрацию напряжений вблизи отверстия учесть отдельно.

Другой случай, допускающий упрощения, когда $\kappa \approx 1$, т. е. случай тонкостенного цилиндра. Для построения приближенных формул представим функции Ψ_i в виде разложений в степенные ряды:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= -\ln \kappa + \frac{\gamma^2}{4} [(1 + \kappa^2) \ln \kappa + (1 - \kappa^2)] + \\ &+ \frac{\gamma^4}{128} [-2(1 + 4\kappa^2 + \kappa^4) \ln \kappa - 3(1 - \kappa^4)] + \dots; \\ \gamma \Psi_2 &= -1 + \frac{\gamma^2}{4} (\kappa^2 - 1 - 2 \ln \kappa) + \frac{\gamma^4}{64} [4(1 - \kappa^2) + (1 - \kappa^4) + \\ &+ 4(1 + 2\kappa^2) \ln \kappa] + \dots; \\ \gamma \Psi_3 &= \frac{1}{\kappa} - \frac{\gamma^2}{4} \left(2\kappa \ln \kappa + \frac{1 - \kappa^2}{\kappa} \right) + \frac{\kappa \gamma^4}{16} \left[(2 + \kappa^2) \ln \kappa + \right. \\ &\left. + \frac{1 - \kappa^4}{4\kappa^2} + (1 - \kappa^2) \right] + \dots; \\ \Psi_4 &= \frac{1 - \kappa^2}{2\kappa} - \frac{\kappa \gamma^2}{4} \left(\frac{1 - \kappa^4}{4\kappa^2} + \ln \kappa \right) + \frac{\kappa \gamma^4}{128} \left[(1 + \kappa^2) 4 \ln \kappa + \right. \\ &\left. + \frac{1 - \kappa^6}{3\kappa^2} + 3(1 - \kappa^2) \right] + \dots\end{aligned}\quad (121)$$

Из выражений (121) видно, что все функции ограничены при $t = 0$.

$$\Psi_1 = -\ln \kappa; \quad \gamma \Psi_2 = -1; \quad \gamma \Psi_3 = \frac{1}{\kappa}; \quad \Psi_4 = \frac{1 - \kappa^2}{2\kappa}. \quad (122)$$

Подставляя значения функций (122) при $t = 0$ в левую часть уравнения (101), получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(\kappa, t) = -\frac{(1 - \nu^2)(1 - \kappa^2)^2}{\kappa^2}. \quad (123)$$

Следовательно, графики действительной части уравнения (101) при $t = 0$ будут определяться значениями (123) независимо от θ , а графики мнимой части уравнения будут начинаться от нуля также при любом θ . ($t = re^{i\theta}$).

Используя выражения (121), построим приближенные формулы для расчета тонкостенного цилиндра, получающиеся из формул табл. 16, при удержании в них по одному члену ряда

$$u_r = \frac{q}{E} \frac{(1 - \nu) \kappa^2 r^0}{(1 - \kappa^2) \varrho} \left[\frac{1 + \nu}{1 - \nu} + \varrho^2 \right] \Phi_1;$$

$$\sigma_\varphi = q \frac{\kappa^2 (1 + \varrho^2)}{\varrho^2 (1 - \kappa^2)} \Phi_1;$$

$$\sigma_r = -q \frac{\kappa^2 (1 - \varrho^2)}{\varrho^2 (1 - \kappa^2)};$$

$$\begin{aligned}u_z &= -\frac{q}{E} \cdot \frac{(1 - \nu) \kappa^2 r^0}{2(1 - \kappa^2)} \left\{ \frac{4\nu}{1 - \nu} \int_0^{\xi} \Phi_1 d\xi + \right. \\ &+ \left[\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left(\frac{1 - \kappa^2}{2} + 2 \ln \varrho \right) + \frac{2\kappa^2 \ln \kappa}{1 - \kappa^2} + \varrho^2 \right] \gamma \Phi_1 \Big\}; \\ \tau_{rz} &= q \frac{\kappa^2 (1 - \varrho^2)}{2(1 - \nu)(1 - \kappa^2)} \left[\frac{(1 - \nu)(\kappa^2 - \varrho^2)}{4(1 + \nu)\varrho} - \frac{\kappa^2 \ln \kappa}{\varrho(1 - \kappa^2)} + \right. \\ &+ \left. \frac{\varrho^2 \ln \varrho}{\varrho(1 - \varrho^2)} \right] \gamma^3 \Phi_1; \\ \sigma_z &= q \frac{\kappa^2}{2(1 - \nu)(1 - \kappa^2)} \left[\frac{(1 - \nu)(1 + \kappa^2 - 2\varrho^2)}{2(1 + \nu)} - \right. \\ &- \left. \frac{2\kappa^2 \ln \kappa}{(1 - \kappa^2)} - 2 \ln \varrho - 1 \right] \gamma^2 \Phi_1.\end{aligned}\quad (124)$$

В разрешающем уравнении оставим три члена ряда, вплоть до четвертой производной, с тем, чтобы иметь в решении четыре произвольные постоянные, необходимые для удовлетворения четырех граничных условий на торцах цилиндра

$$(l_0 + l_1 \gamma^2 + l_2 \gamma^4) \Phi_1 = 192q(\xi), \quad (125)$$

где

$$\begin{aligned}l_0 &= 192; \quad l_1 = 48 \left[(1 + \kappa^2) + \frac{4\kappa \ln \kappa}{1 - \kappa^2} \right]; \\ l_2 &= \frac{12(5 - 3\nu)\kappa^2}{1 - \nu} + \frac{(7 + 5\nu)(1 - \kappa^2)^2}{1 + \nu} + 48 \frac{\kappa^2 \ln \kappa}{1 - \kappa^2} \times \\ &\times \left[(1 + \kappa^2) - \frac{(1 + \nu)\kappa^2 \ln \kappa}{(1 - \nu)(1 - \kappa^2)} \right].\end{aligned}\quad (126)$$

Решение уравнения запишем в виде

$$\Phi_1 = \tilde{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_1.$$

Общее решение однородного уравнения

$$\tilde{\Phi}_1 = e^{-a\xi} (C_1 \sin b\xi + C_2 \cos b\xi) + e^{a\xi} (C_3 \sin b\xi + C_4 \cos b\xi); \quad (127)$$

здесь a — действительная часть;

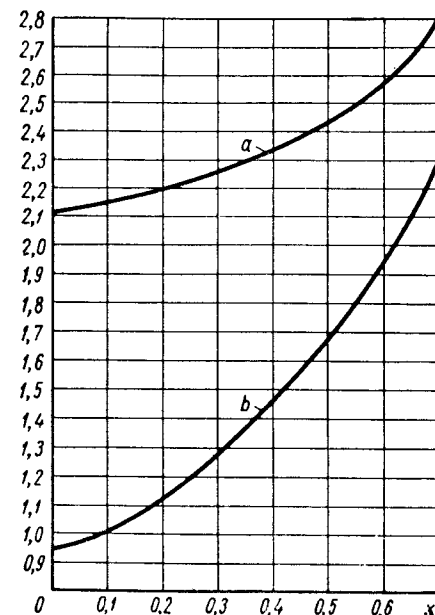
b — коэффициент при мнимой части корня характеристического уравнения, соответствующего уравнению (125),

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{\frac{l_0}{l_2} + \frac{l_1}{l_2}}}; \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{\frac{l_0}{l_2} - \frac{l_1}{l_2}}}; \quad (128)$$

график значений a и b при различных κ показан на фиг. 6. При расчете короткого цилиндра, когда нельзя пренебречь

взаимным влиянием торцов, целесообразно использовать другую форму общего решения уравнения (125)

$$\tilde{\Phi}_1 = C_1 \operatorname{sh} a\zeta \sin b\zeta + C_2 \operatorname{sha}\zeta \cos b\zeta + C_3 \operatorname{ch} a\zeta \sin b\zeta + C_4 \operatorname{cha}\zeta \cos b\zeta. \quad (129)$$



Фиг. 6. График корня характеристического уравнения в зависимости от относительной толщины цилиндра.

Для удобства расчета формулы перемещений и напряжений заранее умножены на частный интеграл уравнения (125) при равномерно распределенной нагрузке на внутренней поверхности цилиндра, поэтому при расчете цилиндра с закрепленным торцом на равномерно распределенную нагрузку частный интеграл уравнения (125) следует положить равным единице. Если торцы цилиндра свободны от напряжений, а нагрузка на боковой поверхности не зависит от высоты, то формулы (124) переходят в известные формулы Ляме.

При расчете цилиндра, нагруженного по наружной поверхности равномерно распределенной нагрузкой и закрепленного в торце, формулы (124) преобразуются подстановкой (93).

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{q}{E} \frac{(1-\nu)r_0}{(1-\kappa^2)q} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \kappa^2 + q^2 \right] \Phi_1; \\ \sigma_\varphi &= q \frac{(q^2 + \kappa^2)}{q^2(1-\kappa^2)} \Phi_1; \quad \sigma_r = -q \frac{(q^2 - \kappa^2)}{q^2(1-\kappa^2)}; \\ u_z &= \frac{q}{E} \cdot \frac{(1-\nu)r_0}{2(1-\kappa^2)} \left\{ \frac{4\nu}{1-\nu} \int_0^\zeta \Phi_1 d\zeta + \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \left(2\kappa^2 \ln \frac{q}{\kappa} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1-\kappa^2}{2} \right) + \frac{2\kappa^2 \ln \kappa}{1-\kappa^2} + q^2 \right] \gamma \Phi_1 \right\}; \\ \tau_{rz} &= -q \frac{\kappa^2(\kappa^2 - q^2)}{(1-\nu)(1-\kappa^2)q} \left[\frac{(1-\nu)(1-q^2)}{4\kappa^2(1+\nu)} - \frac{\ln \kappa}{1-\kappa^2} + \frac{q^2 \ln \frac{q}{\kappa}}{\kappa^2 - q^2} \right] \gamma^3 \Phi_1; \\ \sigma_z &= -q \frac{\kappa^2}{2(1-\nu)(1-\kappa^2)} \left[\frac{(1-\nu)(1+\kappa^2 - 2q^2)}{2\kappa^2(1+\nu)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \ln \kappa}{1-\kappa^2} - 2 \ln \frac{q}{\kappa} - 1 \right] \gamma^2 \Phi_1. \end{aligned} \quad (130)$$

Граничные условия на торцах цилиндра могут быть удовлетворены только интегрально; для нормальных напряжений с точностью до изгибающего момента и для касательных с точностью до поперечной силы. Выражения изгибающего момента и поперечной силы по формулам (124) определяются соответственно как

$$M = (r^0)^3 \int_\kappa^1 \sigma_z q^2 dq = (r^0)^3 \gamma^2 \Phi_1 \cdot K; \quad (131)$$

$$T = (r^0)^2 \int_\kappa^1 \tau_{rz} q dq = (r^0)^2 \gamma^3 \Phi_1 \cdot K,$$

где

$$K = -\frac{\kappa^2}{6(1-\nu)(1-\kappa^2)} \left[\frac{(1-\nu)(1-\kappa)^2(1+3\kappa+\kappa^2)}{10(1+\nu)} + \frac{1-\kappa^3}{3} + \frac{2\kappa^2 \ln \kappa}{1+\kappa} \right]. \quad (132)$$

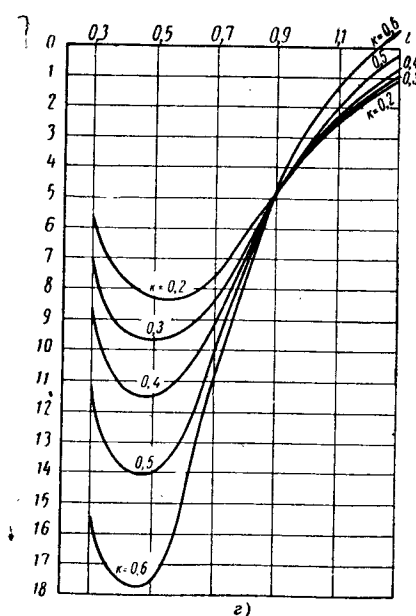
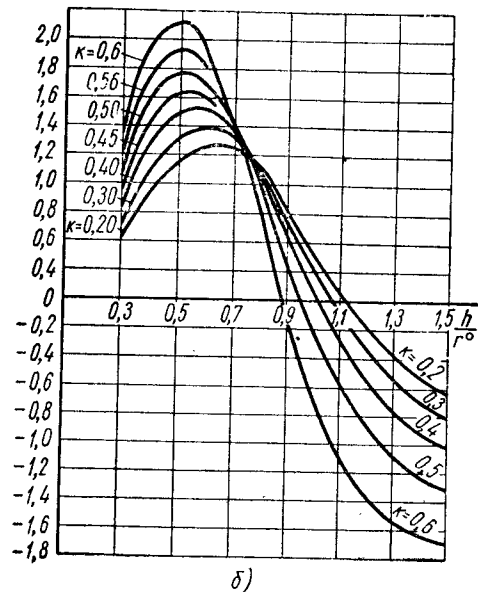
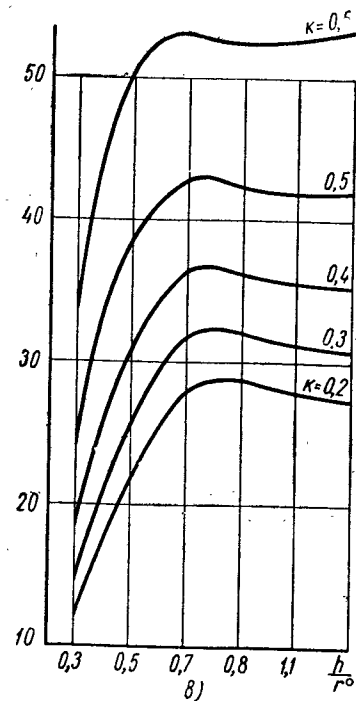
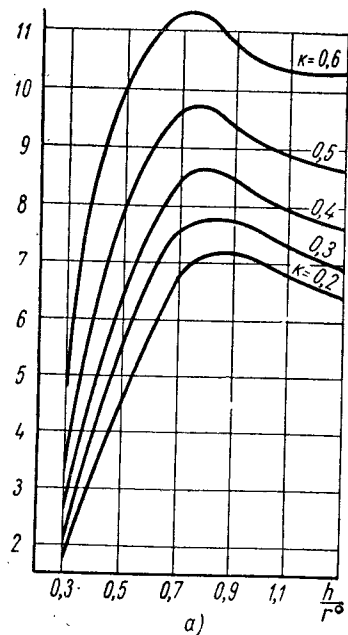
Закрепление торцов может быть жестким, когда приравниваются нулю оба перемещения u_r и u_z , или шарнирным, когда приравнивается нулю лишь одно радиальное перемещение. Для расчета короткого гидrocиллиндра, нагруженного внутренним давлением жидкости, с жестким защемлением нижнего торца и свободным верхним торцом построены вспомогательные графики, по которым можно определить значения функций $\gamma^2 \Phi_1$ и $\gamma^3 \Phi_1$ в зависимости от относительной длины и относительной толщины цилиндра. Графики показаны на фиг. 7, а — 2.

При расчете длинного цилиндра, нагруженного внутренним давлением и шарнирно закрепленного в днище, выражение разрешающей функции будет

$$\Phi = 1 - e^{-a\zeta} \left(\frac{a^2 - b^2}{2ab} \sin b\zeta + \cos b\zeta \right). \quad (133)$$

Используя две схемы расчета цилиндра с жестким и шарнирным опиранием, можно приближенно рассчитать гидравлический цилиндр с днищем. Первая схема позволяет определить с некоторым запасом напряжения σ_z и τ_{rz} вблизи днища, вторая схема, также с некоторым запасом, напряжения σ_φ и радиальные перемещения в небольшом удалении от днища.

Формулы для расчета толстой цилиндрической оболочки можно получить, разложив входящие в операторы функции в степенные ряды или построив операторы метода начальных функций сразу в виде степенных рядов в форме Власова В. З. [31]. Формулы перемещений и напряжений выписаны в табл. 20. Все формулы выражены через одну разрешающую функцию, уравнение для которой приведено в табл. 21 (см. вклейку). В ней приняты обозначения $\beta = \frac{\partial}{\partial z}$; $\lambda = \frac{r' - r^0}{r^0}$; $\gamma = \frac{r - r^0}{r^0}$. В таблице приведена левая часть уравнения, деленная на $\beta^2 F$; в правой части уравнения стоит



Фиг. 7. Графики значений:
а — функции $\gamma^2 \Phi_1$ при $\zeta=0$; б — функции $\gamma^2 \Phi_1$ при $\zeta = \frac{h}{2r^0}$; в — функции $\gamma^3 \Phi$ при $\zeta=0$; г — функции $\gamma^3 \Phi_1$ при $\zeta = \frac{h}{2r^0}$.

Таблица 20

Формулы перемещений и напряжений тонкостенного цилиндра

$$u = \frac{r_0^2 \lambda}{(1-v)^2} \left\{ (1-v) \left[-2 + \lambda + 2v\gamma - \lambda^2 - v\lambda\gamma - (1+v)\gamma^2 + \lambda^3 + v\lambda^2\gamma + \frac{1+v}{2}\lambda\gamma^2 + (1+v)\gamma^3 \right] + \right. \\ \left. + \beta^2 r_0^2 \left[\frac{2(1-v)}{3}\lambda^2 + v\gamma(\lambda - \gamma) - \frac{1-v}{3}\lambda^3 - \frac{v(3-v)}{3}\lambda^2\gamma + \frac{v(1+v)}{3}\gamma^3 + \frac{3(1-v)}{10}\lambda^4 + \frac{v(9-2v)}{12}\lambda^3\gamma + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2-2v-v^2}{6}\lambda^2\gamma^2 + \frac{v(2-v)}{6}\lambda\gamma^3 - \frac{v(5+2v)}{12}\gamma^4 \right] + \beta^4 r_0^4 \left[-\frac{1-v}{20}\lambda^4 - \frac{v}{6}\lambda^3\gamma + \frac{v}{3}\lambda^2\gamma^2 - \frac{1+v}{6}\lambda\gamma^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1+v}{12}\gamma^4 + \frac{1-v}{40}\lambda^5 + \frac{v(7-v)}{60}\lambda^4\gamma - \frac{v}{12}\lambda^3\gamma^2 + \frac{1-v}{18}\lambda^2\gamma^3 + \frac{1+v}{24}\lambda\gamma^4 - \frac{2+3v+v^2}{60}\gamma^5 \right] + \right. \\ \left. + \beta^6 r_0^6 \left[\frac{1-v}{630}\lambda^6 + \frac{v}{51}\lambda^5\gamma - \frac{v}{40}\lambda^4\gamma^2 + \frac{1+v}{36}\lambda^3\gamma^3 - \frac{1+v}{36}\lambda^2\gamma^4 + \frac{2+v}{51}\lambda\gamma^5 - \frac{2+v}{360}\gamma^6 \right] \right\} F$$

$$w = \frac{\beta\lambda}{1-v} \left\{ [2v - v\lambda + v\lambda^2] + \beta^2 r_0^2 \left[-\lambda + 2\gamma + \frac{1-v}{3}\lambda^2 - \lambda\gamma - v\gamma^2 - \frac{5-2v}{12}\lambda^3 + \lambda^2\gamma + \frac{v}{2}\lambda\gamma^2 + \frac{1+v}{3}\gamma^3 \right] + \right. \\ \left. + \beta^4 r_0^4 \left[\frac{1}{6}\lambda^3 - \frac{2}{3}\lambda^2\gamma + \frac{2(1-v)}{3}\lambda\gamma^2 - \frac{2-v}{3(1-v)}\gamma^3 - \frac{4-v}{60}\lambda^4 + \frac{1}{3}\lambda^3\gamma - \frac{2-v+v^2}{6(1-v)}\lambda^2\gamma^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2+v-v^2}{12(1-v)}\gamma^4 \right] + \beta^6 r_0^6 \left[-\frac{1}{51}\lambda^5 + \frac{2(3-v)}{51(1-v)}\gamma^5 + \frac{1}{20}\lambda^4\gamma - \frac{2-v}{12(1-v)}\lambda^3\gamma^2 + \frac{2-v}{9(1-v)}\lambda^2\gamma^3 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3-v}{41(1-v)}\lambda\gamma^4 \right] \right\} F$$

$$\sigma_z = \frac{2\beta^4 r_0^4 \lambda}{(1-v)^2} \left\{ \left[-\lambda + 2\gamma + \frac{1+v}{3}\lambda^2 - \lambda\gamma - v\gamma^2 - \frac{5+2v}{12}\lambda^3 + \lambda^2\gamma + \frac{v}{2}\lambda\gamma^2 + \frac{1+v}{3}\gamma^3 \right] + \right. \\ \left. + \beta^4 r_0^4 \left[\frac{1}{6}\lambda^3 - \frac{2}{3}\lambda^2\gamma + \lambda\gamma^2 - \frac{2}{3}\gamma^3 - \frac{2+v}{30}\lambda^4 + \frac{1}{3}\lambda^3\gamma - \frac{1}{3}\lambda^2\gamma^2 + \frac{1+v}{6}\gamma^4 \right] + \beta^6 r_0^6 \left[-\frac{1}{51}\lambda^5 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{20}\lambda^4\gamma - \frac{1}{6}\lambda^3\gamma^2 + \frac{2}{9}\lambda^2\gamma^3 - \frac{1}{8}\lambda\gamma^4 + \frac{1}{20}\gamma^5 \right] \right\} F$$

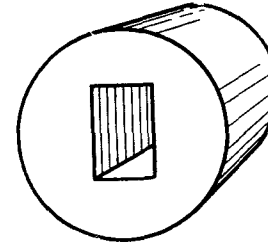
$$\tau_{rz} = \frac{\beta^5 \lambda^3}{(1-v)^2} \lambda \gamma \left\{ \left[2(\lambda-v) - \frac{2(1+v)}{3} \lambda^2 + \frac{2(1+v)}{3} \gamma^2 + \frac{5+2v}{6} \lambda^3 - \frac{2-v}{3} \lambda^2 \gamma + \frac{2-v}{3} \lambda \gamma^2 - \frac{5+2v}{6} \lambda^3 \gamma^2 + \frac{2}{3} \lambda^2 \gamma^3 - \frac{2}{3} \lambda \gamma^4 + \frac{1}{3} \lambda^3 \gamma^5 - \frac{1}{6} \lambda^2 \gamma^6 + \frac{1}{20} \lambda \gamma^7 - \frac{1}{60} \gamma^8 \right] + \beta^6 \gamma_0^6 \left[\frac{1}{60} \lambda^5 - \frac{1}{20} \lambda^4 \gamma + \frac{1}{9} \lambda^3 \gamma^2 - \frac{1}{9} \lambda^2 \gamma^3 + \frac{1}{20} \lambda \gamma^4 - \frac{1}{60} \gamma^5 \right] \right\} F$$

$$\sigma_r = \frac{\beta^2 \lambda \gamma}{(1-v)^2} \left\{ (1-v^2) \left[-4 + 2\lambda + 6\gamma - 2\lambda^2 - 3\lambda\gamma - 8\gamma^2 \right] + \beta^2 \gamma_0^2 \left[-2v\lambda + 2v\gamma + \frac{2(2+v-v^2)}{3} \lambda^2 + 2v\lambda\gamma - \frac{2v(4+v)}{3} \gamma^2 - \frac{4+5v-2v^2}{6} \lambda^3 - (2-v^2)\lambda^2\gamma - \frac{v(8-v)}{3} \lambda\gamma^2 + \frac{v(7+2v)}{2} \gamma^3 \right] + \beta^4 \gamma_0^4 \left[-\lambda\gamma + \frac{2}{3} \lambda^2\gamma + \frac{v}{3} \lambda^3 + \frac{1-v}{3} \lambda\gamma^2 - \frac{3+4v-v^2}{30} \lambda^4 - \frac{1+v}{3} \gamma^3 - \frac{5+4v}{12} \lambda^3\gamma + \frac{1+5v+v^2}{9} \lambda^2\gamma^2 - \frac{7+4v}{12} \lambda\gamma^3 + \frac{12+10v+v^2}{30} \gamma^4 \right] + \beta^6 \gamma_0^6 \left[-\frac{v}{60} \lambda^5 - \frac{4-v}{60} \lambda^4\gamma - \frac{1}{6} \lambda^3\gamma^2 + \frac{1}{6} \lambda^2\gamma^3 - \frac{1}{15} \lambda\gamma^4 + \frac{1}{51} \lambda^5\gamma + \frac{1+v}{18} \lambda^2\gamma^3 - \frac{4+v}{60} \lambda\gamma^4 + \frac{2+v}{60} \gamma^5 + \frac{1}{60} \lambda^3\gamma^3 + \frac{1}{45} \lambda^2\gamma^4 - \frac{1}{51} \lambda\gamma^5 + \frac{1}{420} \gamma^6 \right] \right\} F$$

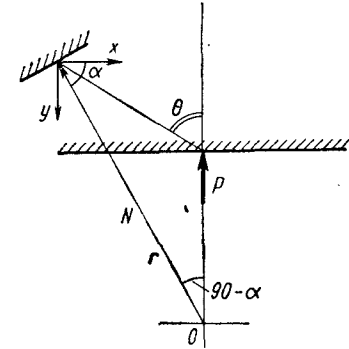
$$\sigma_\phi = \frac{2\beta^2 \lambda}{(1-v)^2} \left\{ (1-v^2) \left[-2 + \lambda + 2\gamma - \lambda^2 - \lambda\gamma - 3\gamma^2 \right] + \beta^2 \gamma_0^2 \left[-v\lambda + 2v\gamma + \frac{(1+v)(2-v)}{3} \lambda^2 - v(1+v)\gamma^2 - \frac{4+5v-2v^2}{12} \lambda^3 - \frac{2-2v-v^2}{3} \lambda^2\gamma - \frac{v(2-v)}{2} \lambda\gamma^2 + \frac{v(5+2v)}{3} \gamma^3 \right] + \beta^4 \gamma_0^4 \left[\frac{v}{6} \lambda^3 - \frac{2v}{3} \lambda^2\gamma + \frac{v}{2} \lambda\gamma^2 - \frac{v}{3} \gamma^3 - \frac{3+4v-v^2}{60} \lambda^4 + \frac{v}{6} \lambda^3\gamma + \frac{v(1+v)}{6} \lambda^2\gamma^2 - \frac{1+v}{6} \lambda\gamma^3 + \frac{(1+v)^2}{12} \gamma^4 \right] + \beta^6 \gamma_0^6 \left[-\frac{v}{51} \lambda^5 + \frac{v}{20} \lambda^4\gamma - \frac{v}{12} \lambda^3\gamma^2 + \frac{v}{9} \lambda^2\gamma^3 - \frac{v}{24} \lambda\gamma^4 + \frac{v}{60} \gamma^5 \right] \right\} F$$

величина — $(1-v)^2 q(z)$. В зависимости от требуемой точности расчета, в уравнении могут быть оставлены члены вплоть до 4-й; 8-й; 12-й или 16-й производной разрешающей функции. Соответственно этому решение будет содержать 4; 8; 12 и 16 произвольных постоянных, определяемых из граничных условий на торцах цилиндра.

Формулы перемещений и напряжений представляют собой полиномы по степеням относительной толщины цилиндра $\lambda = \frac{r'-r^0}{r^0}$, поэтому, обрывая формулы, можно оценить вносимую тем самым погрешность в расчет цилиндра.



Фиг. 8. Цилиндрическая станина с прямоугольной полостью.



Фиг. 9. К определению напряжений от действия сосредоточенной силы на границе полуплоскости.

Приближенный расчет цилиндра с прямоугольной полостью. Задача расчета цилиндра с прямоугольной полостью возникла в связи с проектированием железобетонной станины гидравлического штамповочного пресса.

Железобетонная станина пресса представляет собой полый цилиндр, обвитый снаружи предварительно напряженной проволокой. Внутри цилиндра размещается гидравлическое оборудование пресса. Усилие штампования передается на цилиндр по поверхностям прямоугольной полости в центре (фиг. 8) в виде равномерно распределенных вдоль оси нагрузок P_1 и P_2 . Нагрузки P_2 могут отсутствовать. При приближенном расчете, вместо цилиндра с прямоугольной полостью, рассчитывается цилиндр с круглой полостью, радиус которой равен радиусу описанной окружности для прямоугольной полости. Нагрузка на внутренней поверхности цилиндра принимается равной нормальным и касательным напряжениям, которые возникают от действия сосредоточенных сил, приложенных к границе полуплоскости.

Распределение напряжений от действия сосредоточенной силы на границе полуплоскости в любой точке A (фиг. 9) выражается формулами [12]

$$\sigma_x = \sigma_r \sin^2 \theta; \quad \sigma_y = \sigma_r \cos^2 \theta; \quad \tau_{xy} = \sigma_r \frac{\sin 2\theta}{2}; \quad \sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta.$$

Проектируя действующие напряжения на нормаль N и на направление, перпендикулярное нормали, получим выражения нормальных и касательных напряжений на внутренней поверхности цилиндра

$$\sigma_N = \frac{\sigma_r}{2} [1 - \cos 2(\alpha + \theta)]; \quad \tau_N = \frac{\sigma_r}{2} \sin 2(\alpha + \theta). \quad (134)$$

Первый этап расчета заключается в определении напряжений на внутренней поверхности цилиндра по формулам (134).

Для расчета полого цилиндра на заданную нормальную и касательную нагрузку, приложенную к внутренней поверхности, воспользуемся решением плоской задачи теории упругости в полярных координатах, выраженным через одну бигармоническую функцию Эри, уравнение для которой запишем в виде

$$\left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\beta^2}{\varrho^2}\right) \left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\beta^2}{\varrho^2}\right) \Phi = 0;$$

здесь

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial \varrho}; \quad \beta = \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad \varrho = \frac{r}{r_0}.$$

Напряжения определяются через функцию Эри по формулам

$$\sigma_r = \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\beta^2}{\varrho^2}\right) \Phi; \quad \sigma_\varphi = \alpha^2 \Phi; \quad \tau_{r\varphi} = -\alpha \left(\frac{\beta}{\varrho}\right) \Phi.$$

Бигармоническую функцию Φ примем в виде

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} [C_1 \varrho^2 \Phi_1 + C_2 \varrho^2 \Phi_2 + C_3 \Phi_1 + C_4 \Phi_2] \sin n\varphi, \quad (135)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{\varrho^n - \varrho^{-n}}{2}; \quad \Phi_2 = \frac{\varrho^n + \varrho^{-n}}{2};$$

$C_1 \dots C_4$ — произвольные функции, зависящие от n , которые определяются из граничных условий на наружной и внутренней поверхностях цилиндра.

Формулы напряжений при выражении их через функцию (135) будут

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_1 [(2 - n^2) \Phi_1 + n \Phi_2] + C_2 [(2 - n^2) \Phi_2 + n \Phi_1] + \right. \\ &\quad \left. + C_3 [\Phi_2 - n \Phi_1] \frac{n}{\varrho^2} + C_4 [\Phi_1 - n \Phi_2] \frac{n}{\varrho^2} \right\} \sin n\varphi; \\ \sigma_\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_1 [(2 + n^2) \Phi_1 + 3n \Phi_2] + C_2 [(2 + n^2) \Phi_2 + 3n \Phi_1] + \right. \\ &\quad \left. + C_3 (n \Phi_1 - \Phi_2) \frac{n}{\varrho^2} + C_4 (n \Phi_2 - \Phi_1) \frac{n}{\varrho^2} \right\} \sin n\varphi; \\ \tau_{r\varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -C_1 (\Phi_1 + n \Phi_2) n - C_2 (\Phi_2 + n \Phi_1) n + \right. \\ &\quad \left. + C_3 (\Phi_1 - n \Phi_2) \frac{n}{\varrho^2} + C_4 (\Phi_2 - n \Phi_1) \frac{n}{\varrho^2} \right\} \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (136)$$

При построении формул (136) мы пользовались рекуррентными формулами дифференцирования функций Φ_1 и Φ_2

$$\alpha \Phi_1 = \frac{n}{\varrho} \Phi_2; \quad \alpha \Phi_2 = \frac{n}{\varrho} \Phi_1.$$

Нетрудно видеть, что при $\varrho = 1$ на наружной поверхности

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 1,$$

а на внутренней поверхности при $\varrho = \kappa$

$$\Phi_1 = \frac{\kappa^n - \kappa^{-n}}{2} = a; \quad \Phi_2 = \frac{\kappa^n + \kappa^{-n}}{2} = b.$$

Запишем граничные условия при $\varrho = 1$ и $\varrho = \kappa$

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\varphi} = 0; \quad \sigma_r^N = \sigma_r^N; \quad \tau_{r\varphi}^N = \tau_{r\varphi}^N. \quad (137)$$

Напряженное состояние цилиндра при воздействии предварительно напряженной обшивки по наружной поверхности целесообразно рассматривать отдельно. Напряжения в этом случае с достаточной точностью определяются формулами Ляме.

$$\sigma_r = -q \frac{\varrho^2 - \kappa^2}{\varrho^2 (1 - \kappa^2)}; \quad \sigma_\varphi = -q \frac{\varrho^2 + \kappa^2}{\varrho^2 (1 - \kappa^2)},$$

где q — наружное давление от предварительно напряженной обшивки. При этом напряжения в секторах у внутренней поверхности цилиндра можно принять равными напряжениям у контура круглого отверстия.

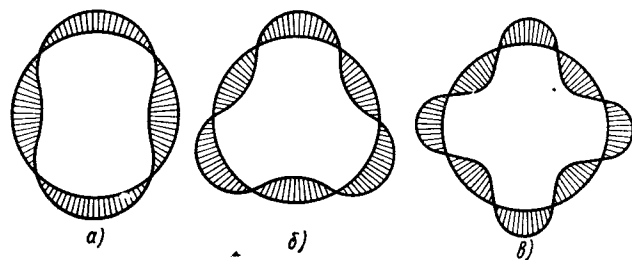
Подставляя в граничные условия (137) формулы напряжений σ_r и $\tau_{r\varphi}$, получим для определения C_i систему четырех линейных алгебраических уравнений. Запишем ее в виде матрицы.

C_1	C_2	C_3	C_4	Δ
$(2 - n^2) a + nb$	$(2 - n^2) b + na$	$\frac{n}{\kappa^2} (b - na)$	$\frac{n}{\kappa^2} (a - nb)$	σ_r^N
$-na - n^2 b$	$-nb - n^2 a$	$\frac{n}{\kappa^2} (a - nb)$	$\frac{n}{\kappa^2} (b - na)$	$\tau_{r\varphi}^N$
n	$2 - n^2$	n	$-n^2$	0
$-n^2$	$-n$	$-n^2$	n	0

Определитель системы, после сокращения множителей, общих с произвольными функциями C_i , будет

$$D = -\frac{(1-n^2)}{\kappa^2} [(1-\kappa^2)^2 n^2 - 4a^2 \kappa^2]. \quad (138)$$

Выражения произвольных функций C_i выпишем отдельно для случая нагружения внутренней поверхности одними только нормальными напряжениями σ_r^N и отдельно для случая нагружения



Фиг. 10. Графики функции $\sin n\varphi$:
а — $n = 2$; б — $n = 3$; в — $n = 4$.

внутренней поверхности одними только касательными напряжениями $\tau_{r\varphi}^N$.

Для нормальной нагрузки

$$DC_1 = -[(1-\kappa^2)(an+b)n-2a];$$

$$DC_2 = [(1-\kappa^2)(a+bn)-2a]n;$$

$$DC_3 = [(1-\kappa^2)(an-b)n+2a\kappa^2];$$

$$DC_4 = -[(1-\kappa^2)(a-bn)-2a]n.$$

Для касательной нагрузки

$$DC_1 = -[(1-\kappa^2)(a-bn)n+2b(1-\kappa^2)-2an]n;$$

$$DC_2 = -[(1-\kappa^2)(an-b)n+2a\kappa^2]n;$$

$$DC_3 = [(1-\kappa^2)(a-bn)n^2+2(2-n^2)a\kappa^2];$$

$$DC_4 = [(1-\kappa^2)(an-b)n+2a\kappa^2]n.$$

Каждому значению n соответствует определенное напряженное состояние; зависимость от угла φ определяется функцией $\sin n\varphi$. На фиг. 10 показаны графики изменения напряжений при различных значениях n . Ввиду наличия двух нормальных осей симметрии у рассматриваемой станины, нас будет интересовать напряженное состояние цилиндра при четных значениях n . С достаточной точностью можно аппроксимировать нагрузку σ_r^N двумя членами ряда, при $n = 2$ и $n = 4$.

Приведем выражения функций C_i при $n = 2$ и выражения напряжений для случая нагружения цилиндра одним только внутренним давлением σ_r^N :

$$DC_1 = -(1+2\kappa^2-3\kappa^4); \quad DC_2 = -(1-\kappa^2-3\kappa^{-2}+3\kappa^4);$$

$$DC_3 = (2+\kappa^2-3\kappa^{-2}); \quad DC_4 = (1-\kappa^2-3\kappa^{-2}+3\kappa^4);$$

$$D = -3[6+(\kappa^4+\kappa^{-4})-4(\kappa^2+\kappa^{-2})].$$

Выражения напряжений

$$D\sigma_r = -3[(1-2\kappa^{-2}+\kappa^4)+2(\kappa^2+\kappa^{-2}-2\kappa^4)\varrho^{-2}-$$

$$-(1+2\kappa^2-3\kappa^4)\varrho^{-4}]\sin 2\varphi\sigma_r^N(\varphi);$$

$$D\sigma_\varphi = 3[(1-2\kappa^{-2}+\kappa^4)-2(2+\kappa^2-3\kappa^{-2})\varrho^2-$$

$$-(1+2\kappa^2-3\kappa^4)\varrho^{-4}]\sin 2\varphi\sigma_r^N(\varphi);$$

$$D\tau_{r\varphi} = -3[(1-2\kappa^{-2}+\kappa^4)-(2+\kappa^2-3\kappa^{-2})\varrho^2-$$

$$-(\kappa^2+\kappa^{-2}-2\kappa^4)\varrho^{-2}+(1+2\kappa^2-3\kappa^4)\varrho^{-4}]\cos 2\varphi\sigma_r^N(\varphi).$$

На поверхностях цилиндра

$$\varrho = 1 \quad \sigma_r = \tau_{r\varphi} = 0;$$

$$D\sigma_\varphi = -12(1+\kappa^2-\kappa^{-2}-\kappa^4)\sin 2\varphi\sigma_r^N(\varphi);$$

$$\varrho = \kappa \quad \sigma_r = \sigma_r^N(\varphi); \quad \tau_{r\varphi} = 0,$$

$$D\sigma_\varphi = 3[10-(\kappa^4+\kappa^{-4})-4(\kappa^2+\kappa^{-2})]\sin 2\varphi\sigma_r^N(\varphi).$$

Свободные радиальные колебания полого цилиндра. Динамические воздействия на цилиндрические элементы гидропрессов могут быть вызваны внезапным сбросом давления в гидросистеме или разрушением образца в испытательном гидропрессе. Последнее время получает распространение метод штампования взрывом. В связи с этим представляет интерес изучение колебаний цилиндрических и сферических матриц. Общая теория колебаний цилиндра и сферы изложена, например, в монографии [13].

В статье рассматривается наиболее простой вид колебаний осесимметричного цилиндра и сферы, зависящий только от координаты ϱ .

Прежде всего рассмотрим вопрос о свободных радиальных колебаниях цилиндра и дадим приближенную методику определения напряжений и перемещений при свободных колебаниях. Будем считать, что в начальный момент времени t_0 точки цилиндра получают под действием мгновенно приложенной импульсной нагрузки некоторую начальную скорость v_0 в направлении радиуса и затем начинают совершать свободные колебания.

Уравнение колебаний бесконечного полого цилиндра в осесимметричном случае может быть записано в следующем виде [14]:

$$\left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{r} - \frac{1}{r^2}\right) u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (r' \leq r \leq r^0), \quad (139)$$

где $\alpha^n = \frac{\partial^n}{\partial r^n}$;

r^0 — наружный радиус цилиндра;

r' — внутренний радиус цилиндра;

t — время;

a^2 определяется равенством $a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}$;

λ и μ — константы Ляме;

γ — плотность.

Уравнение (139) — дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Уравнение будем решать при граничных условиях $r = r' \sigma_r = 0$, $r = r^0 \sigma_r = 0$. Смысл этих условий заключается в том, что действие нагрузки мгновенно и не вызывает давления на внутренней поверхности цилиндра при $t > 0$, а лишь придает точкам цилиндра начальную скорость v_0 .

Начальные условия в момент времени $t_0 = 0$ запишем в виде: при $t = 0$, $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = v_0$. Эти условия означают, что в начальный момент времени радиальные перемещения еще равны нулю или ничтожно малы, а точки тела получают мгновенную скорость в результате воздействия импульса.

Начальная скорость v_0 определяется по формуле

$$v_0 = \frac{F}{m},$$

где F — интенсивность импульса на единицу площади внутренней поверхности;

m — масса цилиндра, отнесенная к той же единице площади.

Уравнение будем решать символическим методом.

Обозначим $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \beta^2$ и перепишем уравнение в виде

$$\left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) u_r = 0. \quad (140)$$

Рассматривая β как постоянную величину, проинтегрируем уравнение (140) по переменной r . Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u_r = C_1 \Phi_3 + C_2 \Phi_4.$$

$r_0^0 \beta^0$			$-\frac{2^3}{2!} (1 - v^2) \lambda^2$	$\frac{2^3 \cdot 2}{2!} (1 - v^2) \lambda^3$
$r_0^2 \beta^2$			$\frac{2^5}{4!} (1 - v^2) \lambda^4$	$-\frac{2^5 \cdot 2}{4!} (1 - v^2) \lambda^5$
$r_0^4 \beta^4$	$-\frac{2^3}{4!} \lambda^4$	$\frac{2^3}{4!} \lambda^5$	$-\frac{2^7}{6!} (1 - v^2) \lambda^6 - \frac{2^3 (37 - 8v)}{6!} \lambda^6$	$\frac{2^7 \cdot 2}{6!} (1 - v^2) \lambda^7 + \frac{2^3 (44 - 16v)}{6!} \lambda^7$
$r_0^6 \beta^6$	$\frac{2^5}{6!} \lambda^6$	$-\frac{2^5}{6!} \lambda^7$	$\frac{2^9}{8!} (1 - v^2) \lambda^8 + \frac{2^5 (70 - 16v)}{8!} \lambda^8$	$-\frac{2^9 \cdot 2}{8!} (1 - v^2) \lambda^9 - \frac{2^5 (84 - 22v)}{8!} \lambda^9$
$r_0^8 \beta^8$	$-\frac{2^7}{8!} \lambda^8$	$\frac{2^7}{8!} \lambda^9$	$-\frac{2^{11}}{10!} (1 - v^2) \lambda^{10} - \frac{2^7 (111 - 24v)}{10!} \lambda^{10}$	$\frac{2^{11} \cdot 2}{10!} (1 - v^2) \lambda^{11} + \frac{2^7 (132 - 48v)}{10!} \lambda^{11}$
$r_0^{10} \beta^{10}$	$\frac{2^9}{10!} \lambda^{10}$	$-\frac{2^9}{10!} \lambda^{11}$	$\frac{2^{13}}{12!} (1 - v^2) \lambda^{12} + \frac{2^9 (160 - 32v)}{12!} \lambda^{12}$	$-\frac{2^{13} \cdot 2}{12!} (1 - v^2) \lambda^{13} - \frac{2^9 (188 - 64v)}{12!} \lambda^{13}$
$r_0^{12} \beta^{12}$	$-\frac{2^{11}}{12!} \lambda^{12}$	$\frac{2^{11}}{12!} \lambda^{13}$	$-\frac{2^{15}}{14!} (1 - v^2) \lambda^{14} - \frac{2^{11} (217 - 40v)}{14!} \lambda^{14}$	
$r_0^{14} \beta^{14}$	$\frac{2^{13}}{14!} \lambda^{14}$	$-\frac{2^{13}}{14!} \lambda^{15}$		
$r_0^{16} \beta^{16}$	$-\frac{2^{15}}{16!} \lambda^{16}$			

Разрешающее уравнение для тонкостенного цилиндра

	$-\frac{2^3}{2!}(1-\nu^2)\lambda^2$	$\frac{2^3 \cdot 2}{2!}(1-\nu^2)\lambda^3$	$-\frac{2^3 \cdot 39}{4!}(1-\nu^2)\lambda^4$	$\frac{2^3 \cdot 57}{4!}(1-\nu^2)\lambda^5$	$-\frac{2^3 \cdot 9 \cdot 260}{6!}(1-\nu^2)\lambda^6$	$\frac{2^3 \cdot 9 \cdot 340}{6!}(1-\nu^2)\lambda^7$	$-\frac{2^3 \cdot 7143}{8!}(1-\nu^2)\lambda^8$
	$\frac{2^5}{4!}(1-\nu^2)\lambda^4$	$-\frac{2^5 \cdot 2}{4!}(1-\nu^2)\lambda^5$	$\frac{2^5 \cdot 96}{6!}(1-\nu^2)\lambda^6$	$-\frac{2^5 \cdot 138}{6!}(1-\nu^2)\lambda^7$	$\frac{2^5 \cdot 9 \cdot 1157}{8!}(1-\nu^2)\lambda^8$	$-\frac{2^5 \cdot 9 \cdot 1492}{8!}(1-\nu^2)\lambda^9$	
	$-\frac{2^7}{6!}(1-\nu^2)\lambda^6 -$ $-\frac{2^3(37-8\nu)}{6!}\lambda^6$	$\frac{2^7 \cdot 2}{6!}(1-\nu^2)\lambda^7 +$ $+\frac{2^3(44-16\nu)}{6!}\lambda^7$	$-\frac{2^7 \cdot 177}{8!}(1-\nu^2)\lambda^8 -$ $-\frac{2^3(2913-1392\nu)}{8!}\lambda^8$	$\frac{2^7 \cdot 251}{8!}(1-\nu^2)\lambda^9 +$ $+\frac{2^3(3419-1936\nu)}{8!}\lambda^9$	$-\frac{2^7 \cdot 9 \cdot 3339}{10!}(1-\nu^2)\lambda^{10} -$ $-\frac{2^3 \cdot 9(39812-25288\nu)}{10!}\lambda^{10}$		
7	$\frac{2^9}{8!}(1-\nu^2)\lambda^8 +$ $+\frac{2^5(70-16\nu)}{8!}\lambda^8$	$-\frac{2^9 \cdot 2}{8!}(1-\nu^2)\lambda^9 -$ $-\frac{2^5(8'-2\nu)}{8!}\lambda^9$	$\frac{2^9 \cdot 282}{10!}(1-\nu^2)\lambda^{10} +$ $+\frac{2^5(8991-4464\nu)}{10!}\lambda^{10}$	$-\frac{2^9 \cdot 396}{10!}(1-\nu^2)\lambda^{11} -$ $-\frac{2^5(10593-6192\nu)}{10!}\lambda^{11}$			
	$-\frac{2^{11}}{10!}(1-\nu^2)\lambda^{10} -$ $-\frac{2^7(111-24\nu)}{10!}\lambda^{10}$	$\frac{2^{11} \cdot 2}{10!}(1-\nu^2)\lambda^{11} +$ $+\frac{2^7(132-48\nu)}{10!}\lambda^{11}$	$-\frac{2^{11} \cdot 411}{12!}(1-\nu^2)\lambda^{12} -$ $-\frac{2^7(20538-9792\nu)}{12!}\lambda^{12}$				
11	$\frac{2^{13}}{12!}(1-\nu^2)\lambda^{12} +$ $+\frac{2^9(160-32\nu)}{12!}\lambda^{12}$	$-\frac{2^{13} \cdot 2}{12!}(1-\nu^2)\lambda^{13} -$ $-\frac{2^9(188-64\nu)}{12!}\lambda^{13}$					
	$-\frac{2^{15}}{14!}(1-\nu^2)\lambda^{14} -$ $-\frac{2^{11}(217-40\nu)}{14!}\lambda^{14}$						
15							

Для удобства выкладок введены функции

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \left[I_0 \left(\frac{\beta}{a} r \right) K_0 \left(\frac{\beta}{a} r^0 \right) - K_0 \left(\frac{\beta}{a} r \right) I_0 \left(\frac{\beta}{a} r^0 \right) \right]; \\ \varphi_2 &= \left[I_0 \left(\frac{\beta}{a} r \right) K_1 \left(\frac{\beta}{a} r^0 \right) + K_0 \left(\frac{\beta}{a} r \right) I_1 \left(\frac{\beta}{a} r^0 \right) \right]; \\ \varphi_3 &= \left[I_1 \left(\frac{\beta}{a} r \right) K_0 \left(\frac{\beta}{a} r^0 \right) + K_1 \left(\frac{\beta}{a} r \right) I_0 \left(\frac{\beta}{a} r^0 \right) \right]; \\ \varphi_4 &= \left[I_1 \left(\frac{\beta}{a} r \right) K_1 \left(\frac{\beta}{a} r^0 \right) - K_1 \left(\frac{\beta}{a} r \right) I_1 \left(\frac{\beta}{a} r^0 \right) \right],\end{aligned}\quad (141)$$

где $I_0 \left(\frac{\beta}{a} r \right)$ — функция Бесселя мнимого аргумента;

$K_0 \left(\frac{\beta}{a} r \right)$ — функция Макдональда.

Для этих функций справедливы формулы дифференцирования [9]

$$\begin{aligned}\alpha I_0 \left(\frac{\beta}{a} r \right) &= \frac{\beta}{a} I_1 \left(\frac{\beta}{a} r \right); \\ \alpha I_1 \left(\frac{\beta}{a} r \right) &= \frac{\beta}{a} I_0 \left(\frac{\beta}{a} r \right) - \frac{1}{r} I_1 \left(\frac{\beta}{a} r \right).\end{aligned}\quad (142)$$

В данном случае функции $I_0 \left(\frac{\beta}{a} r \right)$ и $I_1 \left(\frac{\beta}{a} r \right)$ имеют смысл лишь как операционные ряды и являются дифференциальными операторами бесконечно высокого порядка.

Формулы дифференцирования функций Макдональда имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha K_0 \left(\frac{\beta}{a} r \right) &= -\frac{\beta}{a} K_1 \left(\frac{\beta}{a} r \right); \\ \alpha K_1 \left(\frac{\beta}{a} r \right) &= -\frac{\beta}{a} K_0 \left(\frac{\beta}{a} r \right) - \frac{1}{r} K_1 \left(\frac{\beta}{a} r \right).\end{aligned}\quad (143)$$

В дальнейшем потребуются формулы дифференцирования функций φ_i . Их можно получить, воспользовавшись выражениями (142) и (143):

$$\begin{aligned}\alpha \varphi_1 &= \frac{\beta}{a} \varphi_3; \quad \alpha \varphi_3 = \frac{\beta}{a} \varphi_1 - \frac{1}{r} \varphi_3; \\ \alpha \varphi_2 &= \frac{\beta}{a} \varphi_4; \quad \alpha \varphi_4 = \frac{\beta}{a} \varphi_2 - \frac{1}{r} \varphi_4.\end{aligned}$$

Отметим свойства функций φ_i при $r = r^0$

$$\varphi_1^0 = \varphi_4^0 = 0; \quad \varphi_2^0 = \varphi_3^0 = \frac{a}{\beta r^0}.$$

Две произвольные постоянные определяем из граничных условий при $r = r'$ и $r = r^0$. Для этого необходимо использовать выражение радиального напряжения σ_r :

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) a u_r + \lambda \frac{u_r}{r}. \quad (144)$$

Подставив в формулу (144) выражение u_r , получим формулу σ_r

$$\begin{aligned} \sigma_r = C_1 \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\beta}{a} \varphi_1 - \frac{2\mu}{r} \varphi_3 \right] + \\ + C_2 \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\beta}{a} \varphi_2 - \frac{2\mu}{r} \varphi_4 \right]. \end{aligned} \quad (145)$$

При $r = r^0$

$$u_r^0 = C_1 \frac{a}{\beta r^0}; \quad \sigma_r^0 = -\frac{2\mu a}{\beta r^0} C_1 + (\lambda + 2\mu) \frac{C_2}{r^0} = 0.$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{\beta r^0}{a} u^0; \quad C_2 = \frac{2\mu u^0}{(\lambda + 2\mu)}.$$

Решение уравнения (140) примет вид

$$u_r = \left[\frac{\beta r^0}{a} \varphi_3 + \frac{2\mu}{(\lambda + 2\mu)} \varphi_4 \right] u^0. \quad (146)$$

Подставив выражение (146) в (145), получим

$$\begin{aligned} \sigma_r = \left\{ \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\beta}{a} \varphi_1 - \frac{2\mu}{r} \varphi_3 \right] \frac{\beta r^0}{a} + \right. \\ \left. + \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\beta}{a} \varphi_2 - \frac{2\mu}{r} \varphi_4 \right] \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \right\} u^0. \end{aligned} \quad (147)$$

Начальную функцию u^0 найдем из граничных условий на поверхности цилиндра. Имеем: при $r = r'$ $\sigma_r = 0$; отсюда получаем для определения u^0 обыкновенное дифференциальное уравнение бесконечно высокого порядка

$$\begin{aligned} \left\{ \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\beta}{a} \varphi_1' - \frac{2\mu}{r_1} \varphi_3' \right] \frac{\beta r^0}{a} + \right. \\ \left. + \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\beta}{a} \varphi_2' - \frac{2\mu}{r'} \varphi_4' \right] \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \right\} u^0 = 0. \end{aligned} \quad (148)$$

Функции φ_i должны быть взяты при $r = r'$. Общее решение разрешающего уравнения запишем в виде

$$u^0 = \sum_s C_s e^{n_s t}. \quad (149)$$

Подставляя выражение (149) в разрешающее уравнение, получим трансцендентное уравнение для определения n_s . Функции φ_i в этом случае будут зависеть от аргумента $n_s \frac{r'}{a}$.

$$\begin{aligned} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{n_s}{a} \varphi_1' - \frac{2\mu}{r'} \varphi_3' \right] \frac{n_s r^0}{a} + \\ + \left[(\lambda + 2\mu) \frac{n_s}{a} \varphi_2' - \frac{2\mu}{r'} \varphi_4' \right] \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} = 0. \end{aligned} \quad (150)$$

Отметим, что решение уравнения в виде (149) не зависит от константы a . Такой же результат можно было получить, решая задачу методом Фурье. Для этого уравнение (139) следовало умножить на a^2 , а затем производить разделение переменных. В этом случае уравнения для определения функций $R(r)$ и $T(t)$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \left(a^2 + \frac{a}{r} + \frac{n^2}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) R(r) = 0; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n^2 \right) T(t) = 0. \end{aligned}$$

Естественно, что конечный результат расчета не будет зависеть от такой перестановки. Учитывая это, перепишем трансцендентное уравнение (150) в виде

$$\begin{aligned} n_s^2 r' r^0 (\lambda + 2\mu)^2 \Psi_1' + 4\mu^2 a^2 \Psi_4' - \\ - n_s a (\lambda + 2\mu) 2\mu r' \Psi_2' - n_s a r^0 (\lambda + 2\mu) 2\mu \Psi_3' = 0; \end{aligned} \quad (151)$$

вместо n_s в уравнение (150) мы поставили $\frac{n}{a}$.

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \Psi_1' &= J_0 \left(\frac{n}{a} r' \right) N_0 \left(\frac{n}{a} r^0 \right) - N_0 \left(\frac{n}{a} r' \right) J_0 \left(\frac{n}{a} r^0 \right); \\ \Psi_2' &= J_0 \left(\frac{n}{a} r' \right) N_1 \left(\frac{n}{a} r^0 \right) - N_0 \left(\frac{n}{a} r' \right) J_1 \left(\frac{n}{a} r^0 \right); \\ \Psi_3' &= J_1 \left(\frac{n}{a} r' \right) N_0 \left(\frac{n}{a} r^0 \right) - N_1 \left(\frac{n}{a} r' \right) J_0 \left(\frac{n}{a} r^0 \right); \\ \Psi_4' &= J_1 \left(\frac{n}{a} r' \right) N_1 \left(\frac{n}{a} r^0 \right) - N_1 \left(\frac{n}{a} r' \right) J_1 \left(\frac{n}{a} r^0 \right). \end{aligned}$$

По своей структуре уравнение (151) аналогично уравнению (150). Разница между ними состоит в том, что вместо функций φ_i в уравнении (151) стоят функции Ψ_i' , причем перед Ψ_4' и Ψ_2' знаки обратные.

Уравнение (150) можно привести к виду (151). Для этого общее решение уравнения (148) следует взять в форме

$$u^0 = \sum_s C_s e^{in_s t}.$$

При этом функции φ_i перейдут в функции Ψ'_i , причем между ними будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned}\varphi'_1\left(i \frac{n}{a} r, r'\right) &= -\Psi'_1\left(\frac{n}{a} r, r'\right); \\ \varphi'_2\left(i \frac{n}{a} r, r'\right) &= i\Psi'_2\left(\frac{n}{a} r, r'\right); \\ \varphi'_3\left(i \frac{n}{a} r, r'\right) &= -i\Psi'_3\left(\frac{n}{a} r, r'\right); \\ \varphi'_4\left(i \frac{n}{a} r, r'\right) &= -\Psi'_4\left(\frac{n}{a} r, r'\right).\end{aligned}\quad (152)$$

В этом можно убедиться, используя соотношения между функциями Бесселя разного вида, которые определяются известными формулами [15]

$$K_0(x) = \frac{\pi}{2} [iJ_0(ix) - Y_0(ix)]; \quad K_1(x) = -\frac{\pi}{2} [I_1(ix) + iY_1(ix)];$$

$$Y_0(ix) = \frac{2}{\pi} [N_0(ix) - (\ln 2 - \gamma) J_0(ix)]; \quad I_0(x) = J_0(ix);$$

$$Y_1(ix) = \frac{2}{\pi} [N_1(ix) - (\ln 2 - \gamma) J_1(ix)]; \quad I_1(x) = -iJ_1(ix);$$

здесь $\gamma = 1,781 \dots$

Подставляя в уравнение (150) вместо n_1 величину in_s и используя формулы (152), можно перейти к уравнению (151).

Используя это свойство трансцендентного уравнения, приведем его к более удобному для решения виду. Для этого выполним такое преобразование, чтобы функции Ψ'_i зависели только от n_s и относительной толщины цилиндра $\kappa = \frac{r'}{r_0}$.

При этом решение уравнения (148) запишется в виде

$$u^0 = r^0 \sum_s C_s e^{i \frac{an_s}{r^0} t},$$

и окончательное выражение трансцендентного уравнения будет

$$(\lambda + 2\mu)^2 \kappa n_s^2 \varphi_1 - 2\mu (\lambda + 2\mu) (\kappa \varphi_2 + \varphi_3) n_s + 4\mu^2 \varphi_4 = 0. \quad (153)$$

Функции φ_i определяются формулами

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= [J_0(\kappa n_s) N_0(n_s) - N_0(\kappa n_s) J_0(n_s)]; \\ \varphi_2 &= [J_0(\kappa n_s) N_1(n_s) - N_0(\kappa n_s) J_1(n_s)]; \\ \varphi_3 &= [J_1(\kappa n_s) N_0(n_s) - N_1(\kappa n_s) J_0(n_s)]; \\ \varphi_4 &= [J_1(\kappa n_s) N_1(n_s) - N_1(\kappa n_s) J_1(n_s)].\end{aligned}\quad (154)$$

При подстановке значений λ и μ в уравнение (153) уравнение можно сократить на $(\lambda + 2\mu)^2$ и оно не будет зависеть от модуля упругости материала.

Для приближенного решения трансцендентного уравнения (153) заменим его алгебраическим путем разложения функций φ_i в степенные ряды. В рядах удержим по три члена для функций φ_2 и φ_3 , два члена для функции φ_1 и четыре члена для φ_4 . При этом уравнение будет 4-й степени. Разложения функций φ_i в степенные ряды имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -\ln \kappa + \frac{n^2}{4} [(\kappa^2 + 1) \ln \kappa + (1 - \kappa^2)] + \\ &+ \frac{n^4}{128} [-2(\kappa^4 + 4\kappa^2 + 1) \ln \kappa + 3(\kappa^4 - 1)] + \dots; \\ \varphi_2 &= -\frac{1}{n} + \frac{n}{4} (\kappa^2 - 1 - \ln \kappa) + \frac{n^3}{64} [4(1 - \kappa^2) + \\ &+ (1 - \kappa^4) + 4 \ln \kappa (1 + 2\kappa^2)] + \dots; \\ \varphi_3 &= \frac{1}{\kappa n} - \frac{n}{4} \left(2\kappa \ln \kappa + \frac{1 - \kappa^2}{\kappa} \right) + \\ &+ \frac{\kappa n^3}{16} \left[(2 + \kappa^2) \ln \kappa + \frac{1 - \kappa^4}{4\kappa^2} + (1 - \kappa^2) \right] + \dots; \\ \varphi_4 &= \frac{1 - \kappa^2}{2\kappa} - \frac{\kappa n^2}{4} \left(\frac{1 - \kappa^4}{4\kappa^2} + \ln \kappa \right) + \\ &+ \frac{\kappa n^4}{128} \left[4 \ln \kappa (\kappa^2 + 1) + \frac{1 - \kappa^6}{3\kappa^2} + 3(1 - \kappa^2) \right] + \dots\end{aligned}\quad (155)$$

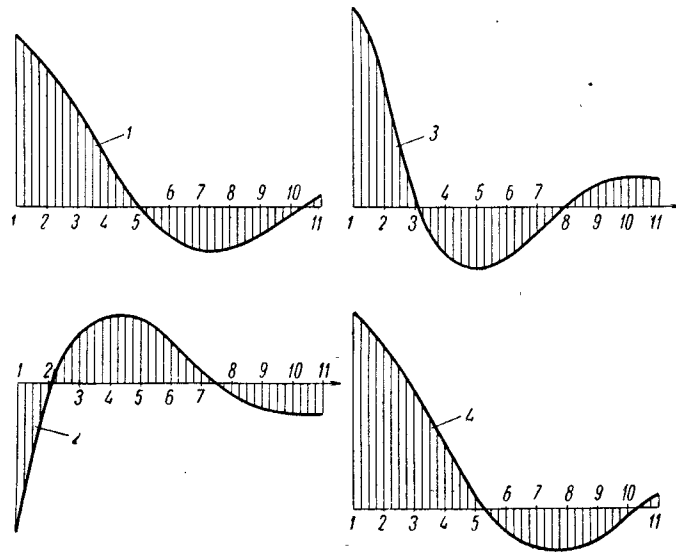
При $\nu = 0,2$ уравнение (153) можно переписать в виде

$$16\kappa \cdot n_s^2 \varphi_1 - 12n_s (\kappa \varphi_2 + \varphi_3) + 9\varphi_4 = 0. \quad (156)$$

Приближенное уравнение $an^4 + bn^2 + c = 0$.

$$\begin{aligned}a &= \frac{\kappa}{128} [260(1 + \kappa^2) \ln \kappa + 347(1 - \kappa^2) - \\ &- \frac{24}{\kappa^2} (1 - \kappa^4) (1 + \kappa^2) + \frac{3}{\kappa^2} (1 - \kappa^6)]; \\ b &= \frac{\kappa}{16} \left[39 \frac{1 - \kappa^4}{\kappa^2} - 100 \ln \kappa \right]; \quad c = -\frac{15(1 - \kappa^2)}{2\kappa}.\end{aligned}$$

Решение приближенного алгебраического уравнения позволяет определить область первых корней трансцендентного уравнения. Для получения всего спектра собственных колебаний цилиндра необходимо решить непосредственно уравнение (156). Это решение можно получить графическим способом. Давая n последовательные значения 1, 2, 3 ..., строим график уравнения (156). Корни уравнения определяются точками пересечения кривой с осью координат. Графики функций (154) при $\kappa = 0,4$ показаны на фиг. 11.



Фиг. 11. Графики функций:
1 — φ_1 ; 2 — φ_2 ; 3 — φ_3 ; 4 — φ_4 .

При решении уравнения в функциях φ_i по формулам (154) целесообразно заменить функции Неймана на функции Вебера. Используя соотношение

$$N_n(z) = \frac{\pi}{2} Y_n(z) + (\ln 2 - \gamma) J_n(z) \quad (\gamma = 1,781...),$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\pi}{2} [J_0(\kappa n_s) Y_0(n_s) - Y_0(\kappa n_s) J_0(n_s)]; \\ \varphi_2 &= \frac{\pi}{2} [J_0(\kappa n_s) Y_1(n_s) - Y_0(\kappa n_s) J_1(n_s)]; \\ \varphi_3 &= \frac{\pi}{2} [J_1(\kappa n_s) Y_0(n_s) - Y_1(\kappa n_s) J_0(n_s)]; \\ \varphi_4 &= \frac{\pi}{2} [J_1(\kappa n_s) Y_1(n_s) - Y_1(\kappa n_s) J_1(n_s)]. \end{aligned} \quad (157)$$

Формулы (157) используем в пределах $n_s \leq 20$. При больших значениях n_s можно использовать асимптотические представления функций Бесселя и Вебера при больших z :

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi z}} (\sin z + \cos z); & Y_0(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi z}} (\sin z - \cos z); \\ J_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi z}} (\sin z - \cos z); & Y_1(z) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi z}} (\sin z + \cos z). \end{aligned}$$

Используя эти выражения, получим асимптотические представления функций φ_i :

$$\varphi_1 = \varphi_4 = \frac{\sin(1-\kappa)n_s}{n_s \sqrt{\kappa}}; \quad -\varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\cos(1-\kappa)n_s}{n_s \sqrt{\kappa}}. \quad (158)$$

Уравнение (156) при использовании асимптотических представлений функций φ_i примет вид

$$\begin{aligned} &\sin(1-\kappa)n_s - \\ &- \frac{12n_s(1-\kappa)}{16\kappa n_s^2 + 9} \times \\ &\times \cos(1-\kappa)n_s = 0. \end{aligned}$$

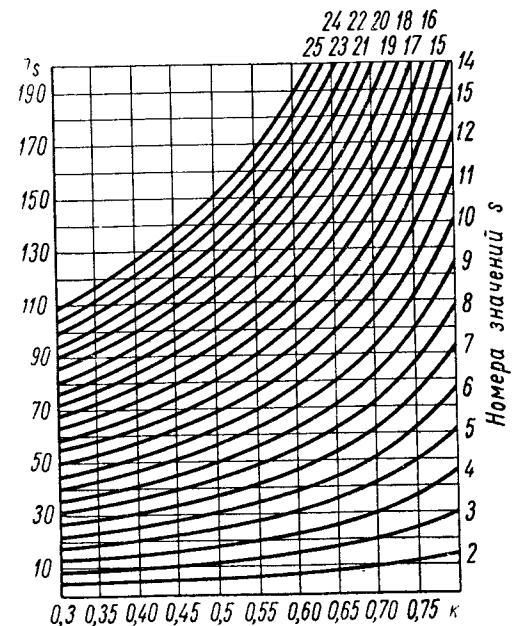
При $\kappa > 0,3$ и $n > 20$ второй член уравнения можно отбросить и тогда корни уравнения с достаточной точностью определяются формулой

$$n_s = \frac{\pi s}{1-\kappa}, \quad (s = 0, 1, 2, 3 \dots). \quad (159)$$

Таким образом, первые 6—8 корней трансцендентного уравнения находим графическим способом, а остальные по формуле (159), справедливой при $n_s > 20$. Собственные значения n_s приведены в табл. 22. График собственных значений в зависимости от относительной толщины цилиндра показан на фиг. 12, а для малых n_s на фиг. 13.

Подставляя значения n_s в формулу u^0 , получим

$$u^0 = \sum_s \left(C_{1s} \cos \frac{an_s}{r^0} + i C_{2s} \sin \frac{an_s}{r^0} \right).$$



Фиг. 12. Графики собственных значений для полого цилиндра в зависимости от относительной толщины.

Таким образом, первые 6—8 корней трансцендентного уравнения находим графическим способом, а остальные по формуле (159), справедливой при $n_s > 20$. Собственные значения n_s приведены в табл. 22. График собственных значений в зависимости от относительной толщины цилиндра показан на фиг. 12, а для малых n_s на фиг. 13.

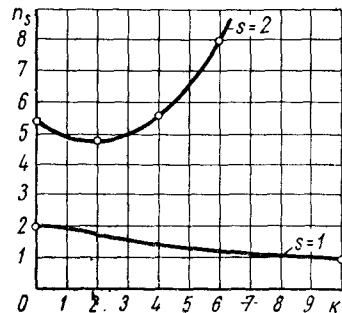
Подставляя значения n_s в формулу u^0 , получим

$$u^0 = \sum_s \left(C_{1s} \cos \frac{an_s}{r^0} + i C_{2s} \sin \frac{an_s}{r^0} \right).$$

Произвольные постоянные C_{1s} и C_{2s} находим из начальных условий при $t = 0$; как и ранее

$$C_{1s} = \frac{v_0}{an_s}, \quad C_{2s} = 0.$$

Поэтому окончательное выражение u^0 будет



Фиг. 13. Графики собственных значений для полого цилиндра, при $s = 1$ и $s = 2$.

$$u_0 = v_0 \sum_s \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s},$$

$$\left(\omega_s = \frac{an_s}{l^0} \right). \quad (160)$$

Запишем окончательные выражения искомых функций. При этом потребуются производные по t от функции u^0 .

$$\beta u^0 = v_0 \sum_s \cos \omega_s t;$$

$$\beta^2 u^0 = -v_0 \sum_s \omega_s \sin \omega_s t.$$

Таблица 22

Собственные значения n_s в зависимости от относительной толщины цилиндра k

$k \backslash s$	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
1	1,62	1,53	1,46	1,39	1,33	1,28	1,23	1,19	1,15	1,12	1,09
2	5,00	5,25	5,60	6,00	6,50	7,15	7,94	8,98	10,48	12,6	15,7
3	8,78	9,69	10,4	10,43	12,57	13,96	15,71	17,95	20,94	25,14	31,42
4	13,46	14,52	16,0	17,15	18,85	20,94	23,56	26,93	31,41	37,71	47,13
5	17,95	19,4	21,0	22,9	25,13	27,92	31,42	35,90	41,88	50,28	62,84
6	22,41	24,2	26,2	28,5	31,41	34,90	39,27	44,88	52,35	62,85	78,55
7	26,9	29,1	31,4	34,3	37,7	41,88	47,12	53,86	62,82	75,42	94,3
8	31,4	33,9	36,7	40,0	44,0	48,86	54,99	62,83	73,29	87,99	110,0
9	35,9	38,8	41,9	45,7	50,26	55,84	62,83	71,81	83,76	100,6	125,7
10	40,3	43,6	47,2	51,4	56,55	62,82	70,69	80,78	94,23	113,1	141,4
11	44,9	48,4	52,4	57,1	62,83	69,80	78,54	89,76	104,7	125,7	157,1
12	49,4	53,3	57,7	62,8	69,11	76,78	86,39	98,74	115,2	138,3	172,8
13	54,9	58,1	62,9	68,5	75,4	83,76	94,25	107,7	125,6	150,8	188,5
14	58,3	63,0	68,2	74,3	81,68	90,74	102,1	116,7	136,1	163,4	204,2
15	62,8	67,7	73,4	80,0	87,96	97,72	110,0	125,7	146,6	176,0	219,9
16	67,3	72,7	78,7	85,6	94,24	104,7	117,8	134,6	157,0	188,5	235,6
17	71,8	77,5	83,9	91,4	100,5	111,7	125,7	143,6	167,5	201,1	251,4
18	76,3	82,3	89,1	97,0	106,8	118,7	133,5	152,6	178,0	213,7	267,1
19	80,7	87,2	94,3	102,8	113,1	125,6	141,4	161,6	188,5	226,3	282,8
20	85,3	92,0	99,6	108,4	119,4	132,6	149,2	170,5	199,0	238,8	298,5
21	89,8	96,8	104,8	114,2	125,7	139,6	157,1	179,5	209,4	251,4	314,2
22	94,3	100,35	110,1	120,0	131,9	146,6	164,9	188,5	220,0	264,0	329,9
23	98,8	106,5	115,3	125,7	138,2	153,6	172,8	197,5	230,3	276,5	345,6
24	103,2	111,4	120,7	131,3	144,5	160,5	180,6	206,4	240,8	289,1	361,3
25	107,8	116,2	126,0	137,0	150,8	167,5	188,5	215,4	251,3	301,7	377,0

При взятии операторов бесконечно высокого порядка φ_i от u^0 получим выражения

$$\varphi_1 u^0 = x_1 v_0 \sum_s \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s};$$

$$\beta \varphi_2 u^0 = -x_2 v_0 \sum_s \sin \omega_s t;$$

$$\beta \varphi_3 u^0 = -x_3 v_0 \sum_s \sin \omega_s t;$$

$$\varphi_4 u^0 = x_4 v_0 \sum_s \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s}.$$

Функции x_i определяются формулами

$$x_1 = \frac{\pi}{2} [J_0(qn_s) Y_0(n_s) - Y_0(qn_s) J_0(n_s)];$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} [J_0(qn_s) Y_1(n_s) - Y_0(qn_s) J_1(n_s)];$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} [J_1(qn_s) Y_0(n_s) - Y_1(qn_s) J_0(n_s)];$$

$$x_4 = \frac{\pi}{2} [J_1(qn_s) Y_1(n_s) - Y_1(qn_s) J_1(n_s)].$$

Выражения перемещения u_r и напряжений σ_r и σ_φ будут

$$u_r = v_0 \sum_s (n_s x_3 - \delta x_4) \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s}; \quad \left(\delta = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right);$$

$$\sigma_r = v_0 (\lambda + 2\mu) \sum_s \left[n_s^2 x_1 - \delta \frac{n_s}{q} (x_3 + q x_2) + \frac{\delta^2 x_4}{q} \right] \frac{\sin \omega_s t}{r^0 \omega_s};$$

$$\sigma_\varphi = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + 2\mu a u_r;$$

$$\sigma_\varphi = v_0 \sum_s \left[2\mu n_s (n_s x_1 - \delta x_2) + \frac{\lambda}{q} (n_s x_3 - \delta x_4) \right] \frac{\sin \omega_s t}{r^0 \omega_s}.$$

Введем обозначения $n_s x_1 - \delta x_2 = \xi$, $n_s x_3 - \delta x_4 = \zeta$.

Окончательные расчетные формулы запишутся при этом в более компактном виде:

$$u_r = v_0 \sum_s \frac{\xi \sin \omega_s t}{\omega_s};$$

$$\sigma_r = v_0 (\lambda + 2\lambda) \sum_s \frac{q n_s \xi - \delta \zeta}{q r^0 \omega_s} \sin \omega_s t; \quad (161)$$

$$\sigma_\varphi = v_0 \sum_s \frac{2\mu n_s \xi + \lambda \zeta}{q r^0 \omega_s} \sin \omega_s t.$$

Из формул для полого цилиндра путем предельного перехода несложно получить формулы для сплошного цилиндра. Для этого

умножим формулы (161) на κn и устремим $\kappa \rightarrow 0$. При этом функция ξ перейдет в $J_0(qn_s)$, а функция ξ перейдет в $J_1(qn_s)$.

Формулы для сплошного цилиндра примут вид

$$\begin{aligned} u_r &= v_0 \sum_s \frac{J_1}{\omega_s} \sin \omega_s t; \\ \sigma_r &= v_0 (\lambda + 2\mu) \sum_s \frac{qn_s J_0 - \delta J_1}{q r^0 \omega_1} \sin \omega_s t; \\ \sigma_\varphi &= v_0 \sum_s \frac{2\mu q n_s J_0 + \lambda J_1}{q r^0 \omega_1} \sin \omega_s t. \end{aligned} \quad (162)$$

Трансцендентное уравнение для сплошного цилиндра будет

$$n_s J'_0 - \delta J'_1 = 0, \quad (163)$$

где $J'_0 = J'_0(n_s)$; $J'_1 = J'_1(n_s)$.

При больших n_s , применяя асимптотические формулы, приведем уравнение (163) к виду

$$\sin n_s + \cos n_s = 0.$$

Корни этого уравнения будут

$$n_s = \frac{(3+4\kappa)}{4} \pi \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots). \quad (164)$$

Формулу с достаточной точностью можно применять при $n_s > 10$. Для сравнения приведем первые корни, вычисленные по формуле (164) и найденные из уравнения (163).

Приближенные значения n_s	2,35	5,49	8,63	11,77
Точные значения n_s	2,01	5,38	8,57	11,73

В дополнение к полученным данным приведем формулы для вычисления перемещений и напряжений при собственных колебаниях полого цилиндра со свободной внутренней и закрепленной наружной поверхностью.

Граничные условия на поверхностях цилиндра:

$$\text{при } q = \kappa \quad \sigma_r = 0; \quad \text{при } q = 1 \quad u_r = 0.$$

Для перемещений и напряжений получены формулы:

$$\begin{aligned} u_r &= v_0 \sum_s \frac{\Phi_4}{\omega_s} \sin \omega_s t; \\ \sigma_r &= v_0 \frac{2\mu}{q} \sum_s \frac{qn_s \delta_2 \Phi_2 - \Phi_4}{r^0 \omega_s} \sin \omega_s t; \\ \sigma_\varphi &= v_0 \frac{2\mu}{q} \sum_s \frac{qn_s \Phi_2 + (\delta_2 - 1) \Phi_4}{r^0 \omega_s} \sin \omega_s t; \\ \delta_2 &= \frac{1-\nu}{1-2\nu}. \end{aligned} \quad (165)$$

Трансцендентное уравнение для определения собственных значений имеет вид

$$\kappa n_s \delta_2 \Phi_2^\kappa - \Phi_4^\kappa = 0. \quad (166)$$

Анализ уравнения показывает, что для тонкостенного цилиндра при $\kappa > 0,9$ первое собственное значение $n_1 > 10$. Это дает возможность использовать для функций Φ_2 и Φ_4 асимптотические представления при больших n_s . При этом, собственные значения с достаточной точностью можно принять равными корням функции Φ_2 .

Вынужденные радиальные колебания осесимметричного цилиндра. Граничные условия на внутренней поверхности цилиндра должны включать нагрузку, зависящую от времени,

$$\text{при } r = r' \quad \sigma_r = q(t). \quad (167)$$

Выражение σ_r через начальную функцию u^0 дано формулой (147). Подставляя (147) в (167), получим для определения u дифференциальное уравнение бесконечно высокого порядка

$$\begin{aligned} &\left\{ \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\beta}{a} \Phi_1 - \frac{2\mu}{r'} \Phi_3 \right] \frac{\beta r^0}{a} + \right. \\ &\left. + \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\beta}{a} \Phi_2 - \frac{2\mu}{r'} \Phi_4 \right] \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \right\} u^0 = q(t); \end{aligned} \quad (168)$$

это неоднородное уравнение. Общее решение однородного уравнения уже найдено, остается лишь найти частный интеграл неоднородного уравнения. Предварительно выполним некоторые преобразования.

В уравнении (168) функции Φ_i определяются формулами (141) при $r = r'$. Введем для удобства выкладок операторы, составленные из функций Φ_i :

$$\xi_1 = \gamma \Phi_1 + \delta \Phi_2, \quad \xi_3 = \gamma \Phi_3 + \delta \Phi_4, \quad \left(\gamma = \frac{r^0 \beta}{a} \right). \quad (169)$$

Нетрудно видеть, что ξ_1 нечетная функция, ξ_3 — четная. Это свойство функций (169) окажется весьма полезным при отыскании частного интеграла уравнения (168).

Перепишем уравнение (168), используя операторы (169):

$$(\lambda + 2\mu) (\kappa \gamma \xi_1 - \delta \xi_3) u^0 = k r^0 q(t).$$

Решение уравнения будем искать в виде совокупности частных решений, каждое из которых удовлетворяет заданным начальным условиям задачи.

Теперь эти начальные условия будут при $t = 0$

$$u = \beta u = 0, \quad (170)$$

т. е. в начальный момент времени перемещения цилиндра равны нулю; скорость также равна нулю. Запишем частное решение u_s^0 в виде

$$\bar{u}_s^0 = C_{1s} \cos \bar{\omega}_s t + C_{2s} \sin \bar{\omega}_s t;$$

$$(\bar{\omega}_s = \frac{s\pi}{\Delta t}); \quad \Delta t = t - t_0.$$

Произвольные функции C_{1s} и C_{2s} определяются из начальных условий (170). Эти начальные условия должны выполняться для суммы общего решения однородной задачи и выбранных частных решений. Общее решение однородной задачи будет (запишем один член s суммы)

$$\tilde{u}_{rs} = \frac{\xi_r^0}{ns} (\sin \omega_s t + \cos \omega_s t); \quad (\omega_s = \frac{an_s}{r^0});$$

$$\tilde{\sigma}_{rs} = (\lambda + 2\mu) \frac{qn_s \xi - \delta \xi}{qn_s} (\sin \omega_s t + \cos \omega_s t);$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi s} = \frac{2\mu q n_s \xi + \lambda \xi}{qn_s} (\sin \omega_s t + \cos \omega_s t);$$

при этом

$$\tilde{u}_s^0 = \frac{r^0}{ns} (\sin \omega_s t + \cos \omega_s t).$$

К полученному ранее решению мы добавили решение, содержащее $\cos \omega_s t$, так как функции u_r , σ_r и σ_φ — четные функции относительно t и добавление $\cos \omega_s t$ не нарушает граничных условий.

Выражение частного решения \bar{u}_r можно записать в виде

$$\bar{u}_{rs} = \frac{\xi_r^0}{\omega_s n_s} (C_{1s} \cos \bar{\omega}_s t + C_{2s} \sin \bar{\omega}_s t).$$

Через $\bar{\xi}$ обозначена функция, аналогичная ξ . Отличие состоит лишь в том, что аргументом функции $\bar{\xi}$ служит

$$\bar{\omega}_s \frac{r'}{a}; \quad \bar{\omega}_s \frac{r^0}{a}.$$

Подставляя выражение $\bar{u}_{rs} + \tilde{u}_{rs}$ в начальные условия (170), получим для определения C_{1s} и C_{2s} систему двух алгебраических

уравнений, решая которую найдем C_{1s} , C_{2s} и окончательные выражения u_r , σ_r и σ_φ (выписан один член s суммы):

$$\begin{aligned} u_{rs} &= \frac{r^0 \xi}{n_s} \left[\sin \omega_s t + \cos \omega_s t - \frac{\omega_s \sin \bar{\omega}_s t}{\bar{\omega}_s} - \cos \bar{\omega}_s t \right]; \\ \sigma_{rs} &= (\lambda + 2\mu) \left[\frac{qn_s \xi - \delta \xi}{qn_s} (\sin \omega_s t + \cos \omega_s t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{q r^0 \bar{\omega}_s \xi - a \delta \bar{\xi}}{a q n_s} \left(\frac{\omega_s \sin \bar{\omega}_s t}{\bar{\omega}_s} + \cos \bar{\omega}_s t \right) \right]; \\ \sigma_{\varphi s} &= \left[\frac{2\mu q n_s \xi + \lambda \xi}{qn_s} (\sin \omega_s t + \cos \omega_s t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\mu q r^0 \bar{\omega}_s \xi + a \lambda \bar{\xi}}{a q n_s} \left(\frac{\omega_s \sin \bar{\omega}_s t}{\bar{\omega}_s} + \cos \bar{\omega}_s t \right) \right]. \end{aligned} \quad (171)$$

Полученные формулы справедливы при любом s . Окончательные выражения сумм будут

$$u_r = \sum_s C_s u_{rs}; \quad \sigma_r = \sum_s C_s \sigma_{rs}; \quad \sigma_\varphi = \sum_s C_s \sigma_{\varphi s}. \quad (172)$$

Произвольные постоянные C_s нужны для аппроксимации заданной нагрузки $q(t)$ функциями вида σ_{rs} при $q = \kappa$ (на внутренней поверхности цилиндра). При $q = \kappa$

$$\bar{\sigma}_{rs} = -(\lambda + 2\mu) \frac{\kappa r^0 \bar{\omega}_s \xi_\kappa - a \delta \bar{\xi}_\kappa}{\kappa a n_s} \left(\frac{\omega_s}{\bar{\omega}_s} \sin \bar{\omega}_s t + \cos \bar{\omega}_s t \right). \quad (173)$$

Функции $\bar{\xi}_\kappa$ и $\bar{\xi}_\kappa$ снабжены индексом κ , так как они должны быть вычислены при $q = \kappa$.

Разложим нагрузку $q(t)$ в ряд по функциям (173):

$$q(t) = - \sum_s^n d_s \bar{\sigma}_{rs}. \quad (174)$$

Подставив выражение нагрузки (174) в правую часть уравнения (168), можно убедиться в том, что частный интеграл уравнения (168) \bar{u}^0 может быть записан в виде суммы:

$$\bar{u}^0 = - \sum_s^n C_s \left(\frac{\omega_s}{\bar{\omega}_s} \sin \bar{\omega}_s t + \cos \bar{\omega}_s t \right). \quad (175)$$

Подставляя выражение (175) в левую часть уравнения (168), будем иметь

$$- \sum_s^n C_s \bar{\sigma}_{rs} = - \sum_s^n d_s \bar{\sigma}_{rs},$$

откуда получим $C_s = d_s$.

Следовательно, произвольные постоянные \bar{C}_s определяются как коэффициенты разложения нагрузки $q(t)$ в ряд по функциям $\bar{\sigma}_{rs}$.

Рассмотрим подробнее выражение (173). Оно содержит функции $\bar{\xi}_\kappa$ и $\bar{\zeta}_\kappa$. Аргументы функций $\bar{\omega}_s \frac{\kappa r^0}{a}$ и $\bar{\omega}_s \frac{r^0}{a}$ очень малы, так как имеют в знаменателе большую величину a — скорость распространения волн в теле. Воспользовавшись этим, можно дать асимптотические представления функций $\bar{\xi}_\kappa$ и $\bar{\zeta}_\kappa$ при малых значениях аргумента. Эти представления будут справедливы при $s < 10$, т. е. для первых 10 членов ряда разложения. Этого нам вполне достаточно.

Асимптотические представления функций φ_i даны формулами (155). Используя их, отбрасываем члены, имеющие порядок квадрата аргумента по сравнению с единицей. При этом получим

$$\varphi_1 = -\ln \kappa; \quad \varphi_2 = -\frac{a}{r^0 \bar{\omega}_s}; \quad \varphi_3 = \frac{a}{\kappa r^0 \bar{\omega}_s}; \quad \varphi_4 = \frac{1 - \kappa^2}{2\kappa}.$$

Для функций $\bar{\xi}_\kappa$ и $\bar{\zeta}_\kappa$ имеем выражения

$$\bar{\xi}_\kappa = \frac{r^0 \bar{\omega}_s \varphi_1}{a} - \delta \varphi_2; \quad \bar{\zeta}_\kappa = \frac{r^0 \bar{\omega}_s \varphi_3}{a} - \delta \varphi_4.$$

Асимптотические формулы

$$\bar{\xi}_\kappa = \frac{\delta a}{r^0 \bar{\omega}_s}; \quad \bar{\zeta}_\kappa = \frac{2 - \delta(1 - \kappa^2)}{2\kappa}. \quad (176)$$

Подставляя формулы (176) в выражение (173), получим асимптотическое представление функции $\bar{\sigma}_{rs}$ при малых значениях аргумента:

$$\bar{\sigma}_{rs} = \frac{E(1 - \kappa^2) \omega_s \sin \bar{\omega}_s t}{2(1 - \nu^2) \kappa^2 \bar{\omega}_s n_s}; \quad (q = \kappa).$$

Выражение $\frac{\bar{\omega}_s}{\omega_s} \cos \bar{\omega}_s t$ мы отбросили, так как ω_s — частота собственных колебаний цилиндра, большая величина $\omega_s = \frac{an_s}{r^0}$.

Вынесем за знак суммы постоянные величины и окончательно запишем

$$\sum_s \bar{C}_s \bar{\sigma}_{rs} = \frac{E(1 - \kappa^2) a \Delta t}{2(1 - \nu^2) \kappa^2 r^0 \pi} \sum_s \frac{C_s}{s} \sin \frac{s\pi t}{\Delta t}.$$

Нагрузку $q(t)$ представим в таком же виде:

$$q(t) = \frac{E(1 - \kappa^2) a \Delta t}{2(1 - \nu^2) \kappa^2 r^0 \pi} \sum_s \frac{d_s}{s} \sin \frac{s\pi t}{\Delta t}.$$

Формулы (171) содержат члены с коэффициентом отношения частот собственных и вынужденных колебаний. Частота собственных колебаний цилиндра во много раз больше частоты вынужденных колебаний (если они измеряются долями секунды). Пользуясь этим, можно построить приближенные формулы для расчета цилиндра при действии нагрузки $q(t)$.

Для этого нагрузку $q(t)$ представим в виде

$$q(t) = \sum_s^n q_s \sin \frac{s\pi t}{\Delta t}.$$

При этом произвольные постоянные C_s в формулах (172) будут определяться формулой

$$C_s = q_s \frac{2(1 - \nu^2) \kappa^2 \bar{\omega}_s n_s}{E(1 - \kappa^2) \omega_s}.$$

Удерживая в формулах (171) члены, имеющие множитель $\frac{\omega_s}{\bar{\omega}_s}$, запишем приближенные формулы для расчета цилиндра на нагрузку $q(t)$.

$$u_r = - \sum_s^n \frac{2(1 - \nu^2) \kappa^2 r^0 \zeta q_s}{E(1 - \kappa^2)} \sin \bar{\omega}_s t; \\ \sigma_r = \sum_s^n q_s \frac{\kappa^2 (1 - q^2)}{q^2 (1 - \kappa^2)} \sin \bar{\omega}_s t; \quad (177)$$

$$\sigma_\varphi = - \sum_s^n q_s \frac{2(1 - 2\nu)^2 q^2 + \nu(1 - \nu)[2 - \delta(1 - q^2)]}{(1 - 2\nu)^2 (1 - \kappa^2) q^2} \kappa^2 \sin \bar{\omega}_s t.$$

Свободные радиальные колебания полой сферы. Уравнение колебаний полой сферы имеет вид [14]

$$\text{при } r' \leq r \leq r^0 \quad \left(\alpha^2 + \frac{2\alpha}{q} - \frac{2}{q^2} \right) u_r = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}.$$

В формуле использованы прежние обозначения, только через r^0 обозначен наружный радиус сферы.

Для удобства решения введем четыре функции φ_i , принимающие на наружной поверхности сферы заданные значения: при $q = 1$ $\varphi_1' = \varphi_4' = 0$; $\varphi_2' = -\varphi_3' = 1$. Функции φ_i подчиняются дифференциальным соотношениям

$$\alpha \varphi_1 = -n \varphi_3; \quad \alpha \varphi_3 = -\frac{2}{q} \varphi_3 - \frac{2 - n^2 q^2}{n^2 q^2} n \varphi_1;$$

$$\alpha \varphi_2 = -n \varphi_4; \quad \alpha \varphi_4 = -\frac{2}{q} \varphi_4 - \frac{2 - n^2 q^2}{n^2 q^2} n \varphi_2.$$

Для φ_i получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} -\varphi_1 &= \frac{1}{n^2 q^2} [n(1-q) \cos n(1-q) - (1+n^2 q) \sin n(1-q)]; \\ -\varphi_2 &= \frac{1}{n^3 q^2} \{ [2n(1-q) + n^3 q] \cos n(1-q) + \\ &\quad + [n^2(1-2q) - 2] \sin n(1-q) \}; \\ -\varphi_3 &= \frac{1}{n^3 q^3} \{ [2n(1-q) - n^3 q^2] \cos n(1-q) + \\ &\quad + [n^2(q^2 - 2q) - 2] \sin n(1-q) \}; \\ -\varphi_4 &= \frac{1}{n^4 q^3} \{ 2n(1-q)(n^2 q + 2) \cos n(1-q) - [(n^2 - 2) \times \\ &\quad \times (n^2 q^2 - 2) + 4n^2 q] \sin n(1-q) \}. \end{aligned} \quad (178)$$

Для сокращения записи введем новые функции ($\delta_1 = \frac{1-\nu}{2\nu}$)

$$\xi = \varphi_1 - n\delta_1\varphi_2; \quad \zeta = \varphi_3 - n\delta_1\varphi_4. \quad (179)$$

Нетрудно видеть, что,

$$\alpha\xi = -n\zeta.$$

При помощи функций ξ и ζ запишем окончательные выражения искомых функций

$$u_r = \xi u^0; \quad \sigma_r = \frac{2\lambda}{q} (\xi - n\delta_1 q \zeta) u^0; \quad \sigma_\varphi = \frac{\lambda}{\nu q} (\xi - n\nu q \zeta) u^0.$$

Выражение начальной функции u^0 было найдено раньше. Используя его, запишем выражения перемещений и напряжений при свободных колебаниях упругой сферы под действием заданного импульса.

$$\begin{aligned} u_r &= v_0 \sum_s \frac{\xi}{\omega_s} \sin \omega_s t; \\ \sigma_r &= v_0 \sum_s 2\lambda \frac{\xi - n\delta_1 q \zeta}{q r_0 \omega_s} \sin \omega_s t; \\ \sigma_\varphi &= v_0 \sum_s \frac{\lambda}{\nu} \cdot \frac{\xi - n\nu q \zeta}{q r_0 \omega_s} \sin \omega_s t; \\ \sigma_r &= \frac{2\lambda}{q} (1 + \delta_1 q \alpha) u_r; \quad \sigma_\varphi = \frac{\lambda}{\nu q} (1 + \nu q \alpha) u_r. \end{aligned} \quad (180)$$

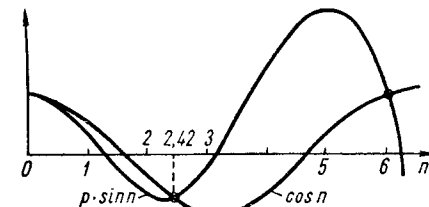
Для определения частот собственных колебаний сферы ω_s необходимо вычислить собственные значения n_s . Методика получения трансцендентного уравнения для определения собственных значений изложена выше. Окончательный вид уравнения будет

$$\xi^\kappa - n_s \delta_1 \kappa \zeta^\kappa = 0. \quad (181)$$

Верхний индекс κ у функций означает, что они должны быть взяты при $q = \kappa$. Значения функций ξ^κ и ζ^κ принимаются по формулам (178) и (179) при $q = \kappa$.

Уравнение (181) может быть решено графическим способом. Интересно отметить, что при больших значениях n_s для цилиндра и сферы равной толщины будут близко совпадать. Это следует из того, что асимптотические представления функций φ_i при больших n_s для цилиндра и сферы сходны. В этом можно убедиться, сравнив асимптотические представления функций φ_i для сферы с формулами (158). Для сферы

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_4 = \frac{\sin n(1-q)}{q}; \\ \varphi_2 &= -\varphi_3 = \frac{\cos n(1-q)}{q}; \end{aligned}$$



поэтому при $\kappa > 0,3$ и $n > 20$ корни уравнения (181) с достаточной точностью определяются формулой (159).

Фиг. 14 График трансцендентного уравнения сплошной сферы.

Область первого значения n_s можно найти из следующих соображений: уравнение (181) при $\kappa \rightarrow 1$ дает значение корня, равное $n_1 = 1,49$ (при $\nu = 1/6$). Этот случай соответствует очень тонкой сферической оболочке. Наоборот, если устремить $\kappa \rightarrow 0$, то мы получим другой крайний случай — сплошную сферу. Функции φ_i при этом будут

$$\begin{aligned} \varphi_1^\kappa &= \frac{2}{\kappa n} \quad \varphi_3^\kappa = \frac{n \cos n - \sin n}{n^2 \kappa^2}; \\ \varphi_2^\kappa &= \frac{2}{\kappa n} \quad \varphi_4^\kappa = \frac{2n \cos n + (n^2 - 2) \sin n}{n^3 \kappa^2}. \end{aligned} \quad (182)$$

Воспользовавшись выражениями (182), построим трансцендентное уравнение для сплошной сферы

$$\cos n = \frac{(1 - 2\delta_1) + \delta_1 n^2}{n(1 - 2\delta_1)} \sin n; \quad (183)$$

при $\nu = 1/6$; $1 - 2\delta_1 = -4$ уравнение (183) может быть переписано в виде

$$\cos n = \frac{8 - 5n^2}{8n} \sin n.$$

График трансцендентного уравнения сплошной сферы показан на фиг. 14. Его первый корень $n_1 = 2,42$ дает другое крайнее значение n_1 . Таким образом, имеем

$$0 \leq \kappa \leq 1; \quad 2,42 \geq n_s \geq 1,49.$$

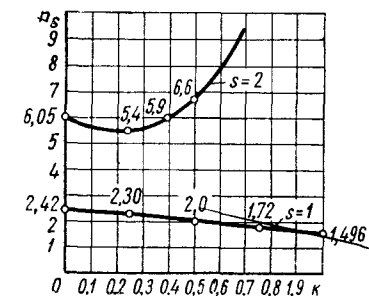
Это ограничение облегчает нахождение первого значения n_s из уравнения (181). Графики первых корней уравнения (181)

при $s = 1$, $s = 2$ показаны на фиг. 15. Для остальных значений n , можно пользоваться графиком на фиг. 11.

Собственные значения найдены при $\nu = 1/6$. В этом случае трансцендентное уравнение имеет вид

$$8n(1-\kappa)(8+5n^2\kappa)\cos n(1-\kappa)+[40n^2(1+\kappa)-64(1+n^2\kappa)-25n^4\kappa^2]\sin n(1-\kappa)=0.$$

Определив собственные значения, находим частоты собственных колебаний ω_s по формуле (160), и далее можно произвести непосредственный расчет по формулам (180).



Фиг. 15. Графики собственных значений для полых сферы при $s = 1$ и $s = 2$.

Расчет двухслойных полых цилиндров. При построении операторов для расчета цилиндра при неосесимметричном нагружении использовалась тригармоническая функция перемещений, но в осесимметричной задаче теории упругости операторы метода начальных функций несложно получить, используя бигармоническую функцию Лява, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{\varrho} + \gamma^2\right)^2 \Phi = \Delta^2 \Phi = 0. \quad (184)$$

Формулы перемещений и напряжений выражаются через функцию Лява следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha\gamma\Phi; & u_3 &= [2(1-\nu)\Delta - \gamma^2]\Phi; \\ u_4 &= \gamma(\nu\Delta - \alpha^2)\Phi; & u_6 &= \alpha[(1-\nu)\Delta - \gamma^2]\Phi; \\ u_7 &= \gamma\left(\nu\Delta - \frac{\alpha}{\varrho}\right)\Phi; & u_9 &= \gamma[(2-\nu)\Delta - \gamma^2]\Phi. \end{aligned} \quad (185)$$

Интегрируем уравнение (184) по независимой переменной ϱ при следующих граничных условиях на начальной поверхности при $\varrho = 1$:

$$u_1 = u_1^0; \quad u_3 = u_3^0; \quad u_4 = u_4^0; \quad u_6 = u_6^0. \quad (186)$$

В этом случае решение уравнения (184) будет

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2(1-\nu)\gamma^4} \left\{ [(3-2\nu)\gamma^2\varphi_1 + \varrho(\varphi_3 - \varphi_4)] + [\gamma^2 - 4(1-\nu)]\varphi_2 \right\} \times \\ &\times \gamma u_1^0 + [\gamma^2(\varphi_1 - \varrho\varphi_4) - 2(1-\nu)\varphi_2] \gamma u_3^0 + [\gamma^2(\varphi_1 - \varrho\varphi_4) - \\ &- 4(1-\nu)\varphi_2] u_4^0 - (\varphi_2 + \varrho\varphi_3) \gamma u_6^0. \end{aligned} \quad (187)$$

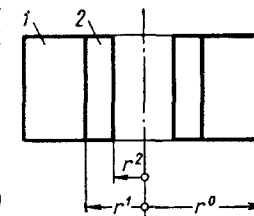
Подставив выражение (187) в (185) и сгруппировав дифференциальные операции над одноименными начальными функциями, получим дифференциальные операторы метода начальных функций в осесимметричной задаче теории упругости в цилиндрических координатах.

Выражения операторов приведены ранее, в табл. 6.

При расчете двухслойного металло-железобетонного цилиндра введем две начальные боковые поверхности. Наружную боковую поверхность железобетонного цилиндра примем за начальную поверхность железобетонного цилиндра, а поверхность сопряжения стального и железобетонного цилиндров — за начальную поверхность стального цилиндра (фиг. 16).

Рассмотрим расчет составного цилиндра при нагружении только внутренним давлением. Если между стальным и железобетонным цилиндрами осуществляется монолитное сопряжение, т. е. отсутствуют взаимные смещения, то граничные условия на боковых поверхностях будут

$$\begin{aligned} r &= r^0; & u_{4a}^0 &= u_{6a}^0 = 0; & r &= r^2; \\ u_{4b}^2 &= -Q(\xi); & u_{6b}^2 &= 0; \\ r &= r'; & u'_{4a} &= u_{4b}^0; & u'_{6a} &= u_{6b}^0; \\ u'_{1a} &= u_{1b}^0; & u'_{3a} &= u_{3b}^0; \end{aligned} \quad (188)$$



Фиг. 16. К расчету двухслойного полого цилиндра:

1 — железобетонный цилиндр; 2 — стальной цилиндр.

Нижние индексы «a» и «b» означают, что функции относятся соответственно к железобетонному и стальному цилиндрам.

Подставляя в граничные условия (188) выражения перемещений и напряжений через начальные функции $u_1^0, u_3^0, u_4^0, u_6^0$, получим систему из шести обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечно высокого порядка с постоянными коэффициентами относительно шести неизвестных начальных функций

$$\begin{aligned} L_{11}^1 u_{1a}^0 + L_{13}^1 u_{3a}^0 &= u_{1b}^0; & L_{31}^1 u_{1a}^0 + L_{33}^1 u_{3a}^0 &= u_{3b}^0; \\ L_{41}^1 u_{1a}^0 + L_{43}^1 u_{3a}^0 &= u_{4b}^0; & L_{61}^1 u_{1a}^0 + L_{63}^1 u_{3a}^0 &= u_{6b}^0; \\ L_{41}^2 u_{1b}^0 + L_{43}^2 u_{3b}^0 + L_{44}^2 u_{4b}^0 + L_{46}^2 u_{6b}^0 &= -Q(\xi); \\ L_{61}^2 u_{1b}^0 + L_{63}^2 u_{3b}^0 + L_{64}^2 u_{4b}^0 + L_{66}^2 u_{6b}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (189)$$

Верхние индексы 1 и 2 у операторов означают, что они берутся при $r = r^1$ и $r = r^2$ (фиг. 16).

Прежде чем приступить к решению системы (189), введем для удобства выкладок новые операторы

$$\xi_1 = \sum_{\kappa} L_{1\kappa} L'_{\kappa 1}; \quad \xi_1 = \sum_{\kappa} L_{1\kappa} L'_{\kappa 3};$$

$$\xi_2 = \sum_{\kappa} L_{3\kappa} L'_{\kappa 1}; \quad \xi_3 = \sum_{\kappa} L_{3\kappa} L'_{\kappa 3};$$

$$\xi_4 = \sum_{\kappa} L_{4\kappa} L'_{\kappa 1}; \quad \xi_4 = \sum_{\kappa} L_{4\kappa} L'_{\kappa 3};$$

$$\xi_5 = \sum_{\kappa} L_{6\kappa} L'_{\kappa 1}; \quad \xi_6 = \sum_{\kappa} L_{6\kappa} L'_{\kappa 3};$$

здесь κ принимает значения $\kappa = 1; 3; 4; 6$.

Введем также в рассмотрение новую функцию $F = F(\xi)$ по формулам

$$u_{1a}^0 = -\xi_6^2 F = \sum_{\kappa} L_{6\kappa}^2 L'_{\kappa 3} F;$$

$$u_{3a}^0 = \xi_6^2 F = \sum_{\kappa} L_{6\kappa}^2 L'_{\kappa 1} F;$$

при этом система (189) сведется к одному разрешающему уравнению для функции F

$$(\xi_4^2 \xi_6^2 - \xi_4^2 \xi_6^2) F = -Q(\xi). \quad (190)$$

Теперь перемещения и напряжения в стальном и железобетонном цилиндрах также можно выразить через одну разрешающую функцию F :

$$\begin{aligned} u_{1a} &= (L_{11} \xi_6^2 - L_{13} \xi_6^2) F; & u_{3a} &= (L_{31} \xi_6^2 - L_{33} \xi_6^2) F; \\ u_{4a} &= (L_{41} \xi_6^2 - L_{43} \xi_6^2) F; & u_{6a} &= (L_{61} \xi_6^2 - L_{63} \xi_6^2) F; \\ u_{1b} &= (\xi_1 \xi_6^2 - \xi_1 \xi_6^2) F; & u_{3b} &= (\xi_3 \xi_6^2 - \xi_3 \xi_6^2) F; \\ u_{4b} &= (\xi_4 \xi_6^2 - \xi_4 \xi_6^2) F; & u_{6b} &= (\xi_6 \xi_6^2 - \xi_6 \xi_6^2) F. \end{aligned} \quad (191)$$

Выражения функций u_7 и u_8 можно получить, используя уравнения закона Гука.

Общее решение уравнения (190) можно представить в виде

$$F = \tilde{F} + \bar{F},$$

где \tilde{F} — общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (190);

\bar{F} — частный интеграл уравнения (190).

Общее решение однородного уравнения будет

$$\tilde{F} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{t_n \xi},$$

где t_n — корни трансцендентного уравнения

$$\xi_4^2(t_n) \xi_6^2(t_n) - \xi_4^2(t_n) \xi_6^2(t_n) = 0,$$

которое можно получить из выражения (190), подставив в операторы величину t_n вместо символа γ . Для нахождения частного интеграла нагрузки на внутренней поверхности стального цилиндра следует представить в виде ряда Фурье. Тогда частный интеграл также можно найти в виде ряда Фурье.

Используя формулы (191), можно рассчитать двухслойный цилиндр, нагруженный осесимметричной нагрузкой по боковым поверхностям и торцам. Граничные условия на торцах удовлетворяются при решении уравнения (190).

Расчет элементов в виде сплошных цилиндров

Расчет цилиндров при неосесимметричном нагружении. Сплошные цилиндры применяются в виде железобетонных архитравов и плунжеров гидропрессов (фиг. 17, а). Находят применение также архитравы, представляющие собой части сплошных цилиндров, отсеченные по диаметру (фиг. 17, б).

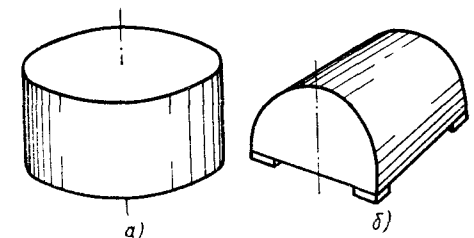
Условия нагружения сплошных цилиндров, применяющихся в гидропрессах, подчас довольно сложны, так же как и условия их закрепления и сопряжения с другими элементами. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть некоторые вопросы расчета сплошных цилиндров в общем случае нагружения при различных граничных условиях.

Общее решение задачи о равновесии сплошного цилиндра может быть получено из решения для полого цилиндра [8]. Подробное рассмотрение задачи о равновесии сплошного цилиндра при осесимметричном нагружении имеется в монографии [2], там же приведена библиография работ, посвященных рассмотрению различных задач о сплошном цилиндре в общем случае нагружения.

Операторы метода начальных функций для сплошного цилиндра могут быть получены из операторов для полого цилиндра путем предельного перехода. Для этого в выражениях операторов следует произвести следующую замену, условно обозначенную стрелкой:

$$r^0 \rightarrow r'; \quad \kappa \rightarrow \frac{1}{\kappa}; \quad \gamma \rightarrow \kappa\gamma; \quad q \rightarrow \frac{q}{\kappa},$$

и затем умножить все элементы матриц на величину $(\kappa\gamma)^n$. Если после этого устремить κ к нулю, то матрицы операторов полого цилиндра перейдут в матрицы операторов сплошного цилиндра. Выражения операторов приведены в табл. 23.



Фиг. 17. Железобетонные цилиндрические архитравы.

L	Коэффициент	u_r^0	u_φ^0	$\kappa \gamma u_z^0$
u_r	$\frac{J_n}{Q}$ γJ_{n+1}	$bcm + gQ^2\gamma^2$ $-gm - an$	$-\beta(bdm - eQ^2\gamma^2)$ $-\beta(em + a)$	$bnl + dQ^2\gamma^2$ $-dl - n$
u_φ	$\frac{J_n}{Q}$ γJ_{n+1}	βbdm $\beta(a + em)$	bcm $-gm - an$	βbl $\beta(1 + l)$
u_z	$\frac{\gamma J_n}{Q\gamma^2 J_{n+1}}$	$-bc$ g	βbd βe	$-dl - n(2 - 3n)$ d
σ_r	$\frac{J_n}{Q^2}$ $\frac{\gamma}{Q} J_{n+1}$	$-bcdm - [d + 3n^2 - n^3 + gl] Q^2\gamma^2$ $(g + en^2)m + a^2n - gQ^2\gamma^2$	$\beta[b d^2 m - (el + 3 - en) Q^2\gamma^2]$ $\beta[(3 - en)m + a^2 - eQ^2\gamma^2]$	$-bcl - (b + 2n^2) Q^2\gamma^2$ $gl + an - dQ^2\gamma^2$
$\tau_{r\varphi}$	$\frac{J_n}{Q^2}$ $\frac{\gamma}{Q} J_{n+1}$	$-\beta[b d^2 m - (a + el) Q^2\gamma^2]$ $-\beta[(3 - en)m + a^2]$	$-bcdm - (gl + an) Q^2\gamma^2$ $(n^2e + g)m + a^2n$	$\beta[-bdl + (1 + \frac{l-n}{2}) Q^2\gamma^2]$ $-\beta(el + a)$
τ_{rz}	$\frac{\gamma}{Q} J_n$ $\gamma^2 J_{n+1}$	$bcl + gQ^2\gamma^2$ $-an - gl$	$-\beta(bdl - eQ^2\gamma^2)$ $-\beta(el + a)$	$-n^2(b + \frac{l+n}{2}) + dQ^2\gamma^2 - n^2$

σ_r^0	$\tau_{r\varphi}^0$	$\kappa \gamma \tau_{rz}^0$
$bnm + dQ^2\gamma^2$ $-dm - n$	$-\beta(bm - Q^2\gamma^2)$ $-\beta(m + 1)$	$nb + Q^2\gamma^2$ $-d$
βbm $\beta(m + 1)$	nbm $-dm - n$	βb β
$-nb$ d	βb β	$1 - m - 3n$ 1
$-bcm - (dl + g) Q^2\gamma^2$ $gm + an - dQ^2\gamma^2$	$\beta[bdm - (l + e) Q^2\gamma^2]$ $\beta(em + a - Q^2\gamma^2)$	$-bc + (l + 3n - 2) Q^2\gamma^2$ $g - Q^2\gamma^2$
$-\beta[bdm - (l + 1) Q^2\gamma^2]$ $-\beta(em + a)$	$-bcm - (dl + n) Q^2\gamma^2$ $gm + an$	$\beta(-bd + Q^2\gamma^2)$ $-\beta e$
$nbm + dQ^2\gamma^2$ $-dl - n$	$-\beta(bl - Q^2\gamma^2)$ $-\beta(l + 1)$	$nb - n(l + n) + Q^2\gamma^2$ $l - b$

L	Коэффициент	u_r^0	u_φ^0	$k\gamma u_z^0$
σ_φ	$\frac{J_n}{\varrho^2}$ $\frac{\gamma}{\varrho} J_{n+1}$	$bcdm + (l-d) g \varrho^2 \gamma^2$ $-(g + en^2)m - a^2n$	$-\beta [bd^2m - (l-d) e \varrho^2 \gamma^2]$ $-\beta [(3-ne)m + a^2]$	$bcl + d(l-d) \varrho^2 \gamma^2$ $-gl - an$
σ_z	$\frac{\gamma^2 J_n}{\varrho \gamma^3 J_{n+1}}$	$gl - 2d - n^3$ g	$\beta (el - 3 + an)$ βe	$-e + 2n^2$ d
τ_φ	$\frac{\gamma}{\varrho} J_n$ $\gamma^2 J_{n+1}$	βbdl $\beta (a + el)$	bcl $-gl - an$	$-\beta n \left(b + \frac{l+n}{2}\right)$ $\beta \left(1 + \frac{l-n}{2}\right)$
Φ	$\frac{1}{\gamma^2} J_n$ $\frac{\varrho}{\gamma} J_{n+1}$	$2[2d(ln - g) + e \varrho^2 \gamma^2]$ $-4(3 - en)$	$(4bcd + 2g \varrho^2 \gamma^2) \frac{\beta}{n^2}$ -8β	$dm + 6n^2 + 7n - 2 + \varrho^2 \gamma^2$ -2
ϑ	$2 \gamma^2 J_n$	$-g(l-d)$	$-\beta e(l-d)$	$-d(l-d)$
σ	$\gamma^2 J_n$	$g(l+n-4)$	$\beta e(l+n-4)$	$d(l+n-4)$

Обозначения:

$$4(1-v) - n = m; \quad 1+n = a; \quad n(1-n) = c;$$

$$2(1-v) - n = l; \quad 1-2n = b;$$

σ_r^0	$\tau_{r\varphi}^0$	$k\gamma \tau_{rz}^0$
$bcm + d(l-d) \varrho^2 \gamma^2$ $-gm - na$	$-\beta [bdm - (l-d) \varrho^2 \gamma^2]$ $-\beta (em + a)$	$bc + (l-d) \varrho^2 \gamma^2$ $-g$
$dl + (n^2 - 2d)$ d	$\beta (l-a)$ β	$-l - 3n - 1$ 1
βbl $\beta (1+l)$	nbl $-dl - n$	$\beta (b-l-n)$ β
$-4bd - 2\varrho^2 \gamma^2$ $-4e$	$(2bc + d \varrho^2 \gamma^2) \frac{\beta}{n^2}$ $-2g \frac{\beta}{n^2}$	$m + 4n - 3$ -2
$-d(l-d)$	$-\beta (l-d)$	$-(l-d)$
$d(l+n-4)$	$\beta (l+n-4)$	$(l+n-4)$

чения:

$$2-n = e; \quad \beta^2 = -n^2$$

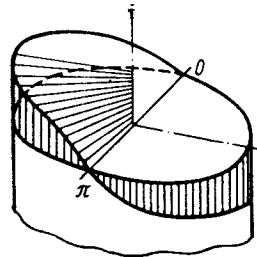
$$1-n = d; \quad 1+n+n^2 = g$$

Физический смысл такого преобразования матриц состоит в следующем: начальная поверхность как бы переносится с наружной на внутреннюю поверхность цилиндра, и затем внутренний радиус цилиндра устремляется к нулю. Внутренняя поверхность цилиндра при этом остается ненагруженной.

Важной особенностью такого предельного перехода является то, что полученные матрицы операторов ограничены при $q = 0$ в центре цилиндра, так как в них не входят цилиндрические функции второго рода. Это является следствием следующих свойств функций φ_i при предельном переходе:

$$\begin{aligned} \text{при } k \rightarrow 0 \quad \lim (k\gamma)^n \varphi_1 &= \lim (k\gamma)^{n+1} \varphi_2 = -J_n; \\ \text{„ } n \neq 0 \quad \lim (k\gamma)^n \varphi_3 &= \lim (k\gamma)^{n+1} \varphi_4 = -J_{n+1}; \\ \text{„ } n = 0 \quad k\varphi_1 &= k\varphi_3 = 0, \quad k\gamma\varphi_2 = -J_0, \quad k\gamma\varphi_4 = -J_1. \end{aligned}$$

Операторы для сплошного цилиндра обладают теми же свойствами, что и операторы для полого цилиндра, т. е. с ними можно обращаться как с алгебраическими величинами.



Фиг. 18. График функции $J_m e^{i\varphi}$.

Матрицы операторов при любых значениях n определяют некоторые напряженные состояния цилиндра. Зависимость решений от угла φ дает показательная функция $e^{in\varphi}$, на которую умножаются решения.

Если изобразить график функции $e^{i\varphi}$ в координатах q, φ в аксонометрической проекции (фиг. 18), то видно, что функция должна накладывать особенность на осесимметричное напряженное состояние сплошного цилиндра в точке $q = 0$. Однако из табл. 24 видно, что при $n = 1$ все операторы в точке $q = 0$ тождественно равны нулю, что исключает особенность, налагаемую функцией $e^{i\varphi}$. Это свойство операторов проявляется при всех остальных значениях n , кроме $n = \infty$, а последний случай не представляет практического интереса.

Если n принять равным $1/2$, то особенность, налагаемая на решение задачи о равновесии сплошного цилиндра функцией $e^{in\varphi}$ при $n = 0$, также исключается благодаря тому, что все операторы при $q = 0$ обращаются в нуль. Эта особенность остается при других не целых n , что следует учитывать при расчете либо исключая точку $q = 0$, либо переходя к полному цилиндру. В табл. 24 и 25 приведены для сравнения матрицы операторов сплошного цилиндра при $n = 1$ и $n = 1/2$.

Сохраняя прежние индексы у операторов, основные дифференциальные формулы перемещений и напряжений запишем

в том же виде, что и формулы, относящиеся к полному цилиндру:

$$u_n = \sum_{k=1}^6 L_{nk} u_k^0.$$

Методика введения разрешающих функций напряжений и перемещений также остается прежней. Разница состоит лишь в том, что у сплошного цилиндра одна наружная боковая поверхность и в связи с этим количество вариантов граничных условий снижается с 64 до 8. Поэтому задача построения однородных решений для сплошного цилиндра приводит к восьми разрешающим уравнениям.

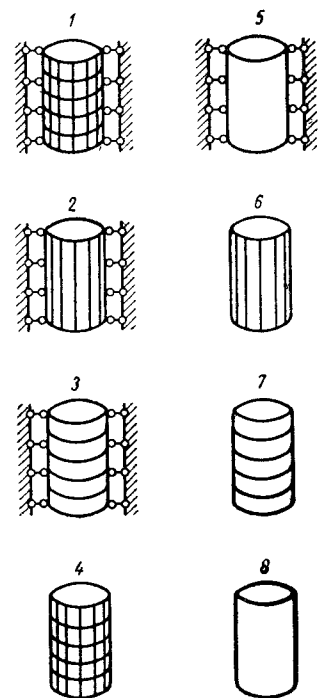
Вид однородных разрешающих уравнений зависит только от граничных условий на наружной боковой поверхности цилиндра при $q = 1$. Уравнения можно представить в виде

$$(J_n^3 \gamma A_k - J_n^2 J_{n+1} B_k + J_n J_{n+1}^2 \gamma C_k - J_{n+1}^3 \gamma^2 D_k) \Phi_k = 0, \quad (192)$$

где A_k, B_k, C_k, D_k — полиномы, зависящие от $n\gamma$.

Выражения полиномов при различных k , в зависимости от граничных условий на боковой поверхности цилиндра, приведены в табл. 26. На фиг. 19 показаны схемы различных граничных условий на боковой поверхности цилиндра при $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$ и 8. Вертикальные линии на боковой поверхности цилиндра условно обозначают продольные пазы, которые препятствуют повороту боковой поверхности и соответствуют случаю, когда $u_\varphi = 0$. Горизонтальные линии обозначают поперечные пазы, которые препятствуют вертикальным смещениям боковой поверхности цилиндра, т. е. означают, что $u_z = 0$. Равенство нулю радиальных смещений условно обозначено шарнирными опорами. Случай, когда $u_r = 0$, реализуется в сплошном цилиндре, помещенном в жесткую гладкую трубу.

Решив трансцендентные уравнения, соответствующие уравнениям (192), можно построить однородные решения, которые позволяют рассчитать сплошной цилиндр или часть сплошного цилиндра, нагруженного только по торцам. Методика расчета



Фиг. 19. Схемы граничных условий на боковой поверхности цилиндра.

$$\sqrt{\frac{\rho\pi}{2}} 2(1-\nu) \gamma^2\text{-кратные}$$

L	Коэффи- циент	u_r^0	u_φ^0	u_z^0
u_r	$\frac{1}{8\rho} \sin \rho\gamma$	$-3(9-8\nu) + 6\rho^2\gamma^2$	$-\beta 6[(9-8\nu) - 2\rho^2\gamma^2]$	$-2[(5-4\nu) - 2\rho^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma}{8} \cos \rho\gamma$	$3(9-8\nu)$	$\beta 6(9-8\nu)$	$2(5-4\nu)$
u_φ	$\frac{1}{8\rho} \sin \rho\gamma$	$\beta 6(9-8\nu)$	$-3(9-8\nu)$	$\beta 4(5-4\nu)$
	$\frac{\gamma}{8} \cos \rho\gamma$	$-\beta 6(9-8\nu)$	$3(9-8\nu)$	$-\beta 4(5-4\nu)$
u_z	$\frac{\gamma}{4} \sin \rho\gamma$	3	$\beta 6$	$-2(1-2\nu)$
	$\frac{\rho\gamma^2}{4} \cos \rho\gamma$	-3	$-\beta 6$	$-\frac{1}{2}$
σ_r	$\frac{1}{16\rho^2} \sin \rho\gamma$	$3[3(9-8\nu) - 8(2-\nu)\rho^2\gamma^2]$	$6[3(9-8\nu) - 8(2-\nu)\rho^2\gamma^2]$	$2[3(5-4\nu) - 8\rho^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma}{16\rho} \cos \rho\gamma$	$-3[3(9-8\nu) - 4\rho^2\gamma^2]$	$-6[3(9-8\nu) - 4\rho^2\gamma^2]$	$-2[3(5-4\nu) - 4\rho^2\gamma^2]$
$\tau_{r\varphi}$	$\frac{1}{16\rho^2} \sin \rho\gamma$	$-\beta 6[3(9-8\nu) - 2(5-4\nu)\rho^2\gamma^2]$	$3[3(9-8\nu) - 2(5-4\nu)\rho^2\gamma^2]$	$-\beta 4[3(3-4\nu) - 2(3-2\nu)\rho^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma}{16\rho} \cos \rho\gamma$	$\beta 18(9-8\nu)$	$-9(9-8\nu)$	$\beta 12(5-4\nu)$

операторы при $n = \frac{1}{2}$

σ_r^0	$\tau_{r\varphi}^0$	τ_{rz}^0
$-2[(9-8\nu) - 2\rho^2\gamma^2]$	$-4\beta[(9-8\nu) - 2\rho^2\gamma^2]$	$-4(1-2\rho^2\gamma^2)$
$2(9-8\nu)$	$\beta 4(9-8\nu)$	4
$\beta 4(9-8\nu)$	$-2(9-8\nu)$	$\beta 8$
$-\beta 4(9-8\nu)$	$2(9-8\nu)$	$-\beta 8$
$\frac{1}{2}$	β	$-4(3-4\nu)$
$-\frac{1}{2}$	$-\beta$	-1
$2[3(9-8\nu) - 8(2-\nu)\rho^2\gamma^2]$	$4\beta[3(9-8\nu) - 8(2-\nu)\rho^2\gamma^2]$	$4(3-2\nu\rho^2\gamma^2)$
$-2[3(9-8\nu) - 4\rho^2\gamma^2]$	$-4\beta[3(9-8\nu) - 4\rho^2\gamma^2]$	$-4(3-4\rho^2\gamma^2)$
$-\beta 4[3(9-8\nu) - 2(5-4\nu)\rho^2\gamma^2]$	$2[3(9-8\nu) - 2(5-4\nu)\rho^2\gamma^2]$	$-\beta 8(3-2\rho^2\gamma^2)$
$\beta 12(9-8\nu)$	$-6(9-8\nu)$	$\beta 24$

L	Коэффициент	u_r^0	u_φ^0	u_z^0
τ_{rz}	$\frac{\gamma}{8Q} \sin Q\gamma$	$-3[(5-4\nu)-2Q^2\gamma^2]$	$-\beta 6[(5-4\nu)-2Q^2\gamma^2]$	$-2[(2-\nu)-2Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma^2}{8} \cos Q\gamma$	$3(5-4\nu)$	$\beta 6(5-4\nu)$	2
σ_φ	$\frac{1}{16Q^2} \sin Q\gamma$	$-3[3(9-8\nu)-4(1-2\nu)Q^2\gamma^2]$	$-\beta 6[3(9-8\nu)-4(1-2\nu)Q^2\gamma^2]$	$-2[3(5-4\nu)-4(1-2\nu)Q^2\gamma^2]$
	$\frac{\gamma}{16Q} \cos Q\gamma$	$9(9-8\nu)$	$\beta 18(9-8\nu)$	$6(5-4\nu)$
σ_z	$\frac{\gamma^2}{4} \sin Q\gamma$	$3(1-2\nu)$	$\beta 2(3-2\nu)$	-2
	$\frac{Q\gamma^3}{4} \cos Q\gamma$	-3	$-\beta 6$	-2
$\tau_{\varphi z}$	$\frac{\gamma}{8Q} \sin Q\gamma$	$\beta 6(5-4\nu)$	$-3(5-4\nu)$	$\beta 4(2-\nu)$
	$\frac{\gamma^2}{8} \cos Q\gamma$	$-\beta 6(5-4\nu)$	$3(5-4\nu)$	$-\beta 4(3-2\nu)$
Φ	$\frac{1}{\gamma^2} \sin Q\gamma$	$-(9-2\nu)+3Q^2\gamma^2$	$-2(4-3Q^2\gamma^2)$	$\frac{11-8\nu}{4}+Q^2\gamma^2$
	$\frac{Q}{\gamma} \cos Q\gamma$	9	$\beta 8$	2
θ	$\frac{\gamma^2}{2} \sin Q\gamma$	$-3(1-2\nu)$	$-\beta 6(1-2\nu)$	$-2(1-2\nu)$
σ	$\frac{\gamma^2}{2} \sin Q\gamma$	$-3(1+\nu)$	$-\beta 6(1+\nu)$	$-2(1+\nu)$

σ_r^0	$\tau_{r\varphi}^0$	τ_{rz}^0
$-2[(5-4\nu)-2Q^2\gamma^2]$	$-\beta 4[(5-4\nu)-2Q^2\gamma^2]$	$4[(1-2\nu)+2Q^2\gamma^2]$
$2(5-4\nu)$	$\beta 4(5-4\nu)$	$-4(3-4\nu)$
$-2[3(9-8\nu)-4(1-2\nu)Q^2\gamma^2]$	$-\beta 4[3(9-8\nu)-4(1-2\nu)Q^2\gamma^2]$	$-4[3-4(1-2\nu)Q^2\gamma^2]$
$6(9-8\nu)$	$\beta 12(9-8\nu)$	12
$2(1-2\nu)$	$\beta 4(1-2\nu)$	8ν
-2	$\beta 4$	4
$\beta 4(5-4\nu)$	$-2(5-4\nu)$	$-\beta 8(1-2\nu)$
$-\beta 4(5-4\nu)$	$2(5-4\nu)$	$-\beta 8$
$-2(3+Q^2\gamma^2)$	$-\beta 2(3-Q^2\gamma^2)$	$\frac{1-8\nu}{2}$
6	$\beta 6$	2
$-2(1-2\nu)$	$-\beta 4(1-2\nu)$	$-4(1-2\nu)$
$-2(1+\nu)$	$-\beta 4(1+\nu)$	$-4(1+\nu)$

L	Коэффициент	u_r^0	u_φ^0	u_z^0
u_r	γJ_0	$5-4\nu$	$\beta(5-4\nu)$	1
	$\frac{J_1}{\varrho}$	$-2(5-4\nu)+\varrho^2\gamma^2$	$-\beta[2(5-4\nu)-\varrho^2\gamma^2]$	$-2(1-\nu)$
u_φ	γJ_0	$-\beta(5-4\nu)$	$(5-4\nu)$	$-2(1-\nu)\beta$
	$\frac{J_1}{\varrho}$	$\beta 2(5-4\nu)$	$-2(5-4\nu)$	$\beta(3-2\nu)$
u_z	$\varrho\gamma^2 J_0$	-1	$-\beta$	0
	γJ_1	2	2β	1
σ_r	$\frac{\gamma}{\varrho} J_0$	$-2(5-4\nu)+\varrho^2\gamma^2$	$-\beta[2(5-4\nu)-\varrho^2\gamma^2]$	$-(3-2\nu)$
	$\frac{J_1}{\varrho^2}$	$4(5-4\nu)-(\varrho^2-2\nu)\varrho^2\gamma^2$	$\beta[4(5-4\nu)-(\varrho^2-2\nu)\varrho^2\gamma^2]$	$2(3-2\nu)-\varrho^2\gamma^2$
$\tau_{r\varphi}$	$\frac{\gamma}{\varrho} J_0$	$\beta 4(3-2\nu)$	$-4(3-2\nu)$	$\beta(3-2\nu)$
	$\frac{J_1}{\varrho^2}$	$-(3-2\nu)(8-\varrho^2\gamma^2)$	$(3-2\nu)(8-\varrho^2\gamma^2)$	$-\beta[2(3-2\nu)-(1-\nu)\varrho^2\gamma^2]$

σ_r^0	$\tau_{r\varphi}^0$	τ_{rz}^0
1	$\beta 4(1-\nu)$	0
$-4(1-\nu)$	$-\beta[(11-12\nu)-\varrho^2\gamma^2]$	$-1+\varrho^2\gamma^2$
$-4(1-\nu)\beta$	1	$-\beta$
$(5-4\nu)\beta$	$-(5-4\nu)$	β
0	$-\beta$	-1
1	β	$-(3-4\nu)$
$-(5-4\nu)$	$-\beta[(5-4\nu)-\varrho^2\gamma^2]$	$-1+\varrho^2\gamma^2$
$2(5-4\nu)-\varrho^2\gamma^2$	$\beta[2(5-4\nu)-2(2-\nu)\varrho^2\gamma^2]$	$2(1-\nu\varrho^2\gamma^2)$
$\beta(5-4\nu)$	$-(5-4\nu)$	β
$-\beta 2[(5-4\nu)-(1-\nu)\varrho^2\gamma^2]$	$2(5-4\nu)-\varrho^2\gamma^2$	$-\beta(2-\varrho^2\gamma^2)$

L	Коэффици- циент	u_r^0	u_φ^0	u_z^0
τ_{rz}	$\gamma^2 J_0$	$(3 - 2\nu)$	$\beta (3 - 2\nu)$	1
	$\frac{\gamma}{\varrho} J_1$	$-2(3 - 2\nu) + \varrho^2 \gamma^2$	$\beta [2(3 - 2\nu) + \varrho^2 \gamma^2]$	$-(2 - \nu)$
σ_φ	$\frac{\gamma}{\varrho} J_0$	$2(5 - 4\nu)$	$\beta 2(5 - 4\nu)$	$(3 - 2\nu)$
	$\frac{1}{\varrho^2} J_1$	$-[4(5 - 4\nu) - (1 - 2\nu)\varrho^2 \gamma^2]$	$-\beta [4(5 - 4\nu) - (1 - 2\nu)\varrho^2 \gamma^2]$	$-2(3 - 2\nu)$
σ_z	$\varrho \gamma^3 J_0$	-1	$-\beta$	0
	$\gamma^2 J_1$	$2(1 - \nu)$	$\beta 2(1 - \nu)$	1
$\tau_{\varphi z}$	$\gamma^2 J_0$	$-\beta (3 - 2\nu)$	$(3 - 2\nu)$	$-\beta (1 - \nu)$
	$\frac{\gamma}{\varrho} J_1$	$\beta 2(3 - 2\nu)$	$-2(3 - 2\nu)$	$\beta (2 - \nu)$
Φ	$\frac{\varrho}{\gamma} J_0$	8	8β	2
	$\frac{1}{\gamma^2} J_1$	$-2(8 - \varrho^2 \gamma^2)$	$-2\beta (8 - \varrho^2 \gamma^2)$	$7 + \varrho^2 \gamma^2$
ϑ	$2\gamma^2 J_1$	$-(1 - 2\nu)$	$-\beta (1 - 2\nu)$	0
σ	$\gamma^2 J_1$	$-2(2 - \nu)$	$-\beta 2(2 - \nu)$	0

σ_r^0	$\tau_{r\varphi}^0$	τ_{rz}^0
1	$\beta 2(1 - \nu)$	$2(1 - \nu)$
$-(3 - 2\nu)$	$-\beta [(3 - 2\nu) - \varrho^2 \gamma^2]$	$-[(7 - 6\nu) - \varrho^2 \gamma^2]$
$(5 - 4\nu)$	$\beta (5 - 4\nu)$	1
$-2(5 - 4\nu)$	$-\beta [2(5 - 4\nu) - (1 - 2\nu)\varrho^2 \gamma^2]$	$-2 + (1 - 2\nu)\varrho^2 \gamma^2$
0	$-\beta$	-1
1	$\beta (1 - 2\nu)$	$-(3 - 2\nu)$
$-\beta 2(1 - \nu)$	1	$-\beta$
$\beta (3 - 2\nu)$	$-(3 - 2\nu)$	$-\beta (1 - 2\nu)$
4	2β	2
$-2(4 - \varrho^2 \gamma^2)$	-4β	-4ν
0	$-\beta (1 - 2\nu)$	$-(1 - 2\nu)$
0	$-\beta 2(2 - \nu)$	$-2(2 - \nu)$

Полиномы разрешающих уравнений сплошного цилиндра

κ	A_κ	B_κ	C_κ	D_κ	$a = 1 + n$
1	n	$p + \gamma^2$	s	1	$b = 1 - 2n$
2	n^2	np	q	$2t$	$c = n(1 - n)$
3	$2nm + \gamma^2$	$2p + 2(a + t)\gamma^2$	$2s + \gamma^2$	2	$d = 1 - n$
4	nm	$p + m\gamma^2$	s	1	$m = 1 + t$
5	n^2m	$np + 2nt\gamma^2$	$q + t\gamma^2$	$2t$	$p = 2n \times$ $\times (n + 2t)$
6	$n^2m - 2n\gamma^2$	$np - 4n^2\gamma^2 - 2\gamma^4$	$q - 6n\gamma^2$	$2(t - \gamma^2)$	$s = 3n + 2t$
7	$2c(a + 2t) +$ $+ m\gamma^2$	$2dap +$ $+ 2(a - n^2 +$ $+ 2t)\gamma^2$	$2ads + \gamma^2$	$2ad$	$q = n \times$ $\times (n + 6t)$
8	$n^2d(a + 2t) -$ $- 2c\gamma^2 - \gamma^4$	$acp - 2c \times$ $\times (2n - t) \times$ $\times \gamma^2 - 2a\gamma^4$	$adq -$ $- (6n - 2n^2 -$ $- t)\gamma^2 - \gamma^4$	$2(ad - \gamma^2)$	$t = 2(1 - v)$

сплошного цилиндра в этом случае не отличается от методики расчета полого. Построение частных решений для расчета цилиндра, нагруженного по боковой поверхности, также не вызывает затруднений, так как все операторы являются целыми функциями от γ^2 .

Наибольшее значение для расчета цилиндрических архитравов имеет случай задания однородных статических граничных условий на боковой поверхности, причем основной расчетной нагрузкой для архитрава является осесимметричная нагрузка, поэтому основное внимание будет уделено методике расчета цилиндров при симметричном относительно оси распределении напряжений и перемещений.

Осесимметричная задача для сплошного цилиндра. Построение решений, удовлетворяющих однородным статическим граничным условиям на боковой поверхности. В частном случае, при $n = 0$, матрица операторов для сплошного цилиндра распадается на две. Одна соответствует симметричному относительно оси распределению напряжений без кручения, другая — осесимметричному чистому кручению. Задача кручения здесь не рассматривается. Разрешающее уравнение для четырех возможных комбинаций граничных условий на боковой поверхности цилиндра имеет вид:

$$(J_0^2 E_\kappa + J_0 J_1 F_\kappa + J_1^2 C_\kappa) \Phi_\kappa = 0, \quad (193)$$

где E_κ , F_κ , C_κ — коэффициенты, зависящие от заданных граничных условий на боковой поверхности. Значения их даны в табл. 27.

Полиномы разрешающих уравнений при $n = 0$

κ	1	2	3	4
E_κ	$-\gamma$	0	$-(3 - 2v)\gamma$	$-\gamma^2$
F_κ	$4(1 - v)$	0	$4(1 - v)$	0
C_κ	$-\gamma$	$-2(1 - v)$	$-\gamma$	$2(1 - v) - \gamma^2$
Граничные условия	$u_r = 0$ $u_z = 0$	$u_r = 0$ $\tau_{rz} = 0$	$\sigma_r = 0$ $u_z = 0$	$\sigma_r = 0$ $\tau_{rz} = 0$

Схемы граничных условий на боковой поверхности цилиндра приведены на фиг. 20.

Решение уравнения (193) при $\kappa = 4$, хотя и несколько в иной форме, дано в работе [16]; однако, имея в виду методическую сторону вопроса, уместно разобрать здесь построение однородных решений, используя метод, который пригоден также и для решения уравнения (192), т. е. для более общего случая, при любом конечном действительном или комплексном n .

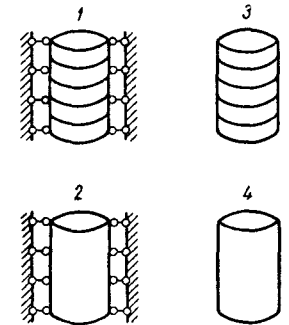
При $\kappa = 4$ уравнение (193) имеет вид

$$\{ 2(1 - v) J_1^2(\gamma) - \gamma^2 [J_1^2(\gamma) + J_0^2(\gamma)] \} \Phi = 0. \quad (194)$$

Соответствующее характеристическое трансцендентное уравнение можно получить, заменив символ γ на параметр t_m . Структура уравнения при этом не меняется, поэтому выписывать его отдельно не имеет смысла; можно прямо считать уравнение (194) одновременно разрешающим и характеристическим трансцендентным уравнением.

Уравнение (194) имеет бесчисленное множество комплексных попарно сопряженных корней. Его можно решить, например, графическим способом. Обозначив

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re} t_n; \quad c = \operatorname{Re} J_0(t_m); \quad e = \operatorname{Re} J_1(t_m); \\ b &= \operatorname{Im} t_n; \quad d = \operatorname{Im} J_0(t_m); \quad f = \operatorname{Im} J_1(t_m), \end{aligned} \quad (195)$$

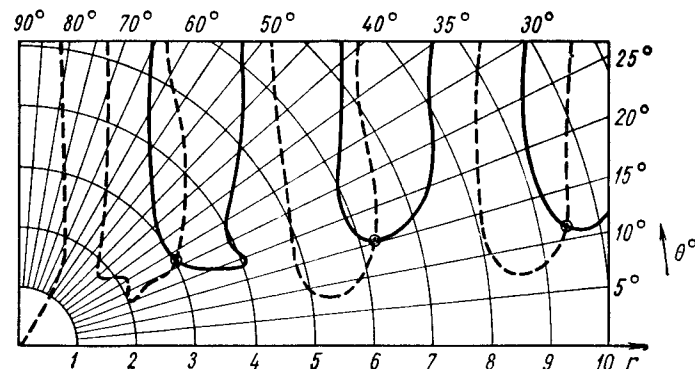


Фиг. 20. Схемы осесимметричных граничных условий на боковой поверхности цилиндра.

и приравняв нулю отдельно действительную и мнимую часть уравнения, его можно представить в виде системы:

$$\begin{cases} [(cd + ef) 4ab - (c^2 - d^2 + e^2 - f^2)(a^2 - b^2) + \\ + 2(1 - \nu)(e^2 - f^2)] = 0; \\ [(cd + ef) 2(a^2 - b^2) + (c^2 - d^2 + e^2 - f^2) 2ab - 4(1 - \nu)ef] = 0. \end{cases}$$

Задавая значения a и b , можно найти по таблицам функций Бесселя комплексного аргумента величины c, d, e, f и построить графики обоих уравнений. Точками пересечения кривых опреде-



Фиг. 21. График трансцендентного уравнения в полярных координатах r, θ .

Сплошной линией обозначена мнимая часть уравнения; пунктирной — действительная.

ляются корни уравнения (194). График уравнения в полярных координатах r, θ показан на фиг. 21.

Подробные таблицы функций Бесселя комплексного аргумента приведены, например, в монографии [15].

Для уточнения значений корней можно воспользоваться методом последовательных приближений в форме Ньютона. Для этого потребуются формулы дифференцирования функций Бесселя комплексного аргумента:

$$z = re^{i\theta}; \quad z_r = \frac{z}{r}; \quad z_\theta = iz;$$

$$J_0(z)_r = -\frac{z}{r} J_1(z); \quad J_1(z)_r = \frac{1}{r} [zJ_0(z) - J_1(z)];$$

$$J'_0(z)_\theta = -izJ_1(z); \quad J'_1(z)_\theta = i[zJ_0(z) - J_1(z)].$$

Нетрудно заметить, что для того, чтобы получить производную от функции Бесселя по модулю комплексной переменной, достаточно умножить производную по переменной z на величину $\frac{z}{r}$;

для того чтобы получить производную по аргументу комплексной переменной z , нужно умножить производную по переменной z на величину iz :

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(z) = \frac{z}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} J_0(z), \quad \frac{\partial}{\partial \theta} J_0(z) = iz \frac{\partial}{\partial z} J_0(z).$$

Уравнение (194) удобно записать в виде

$$\Phi(r, \theta) = 0. \quad (196)$$

Если $t = re^{i\theta}$ — приближенный корень уравнения (196), то по методу Ньютона

$$\Phi'_r \Delta r + \Phi'_\theta \Delta \theta + \Phi = 0. \quad (197)$$

Производные от уравнения (197) по r и по θ будут

$$\Phi'_r = \frac{2}{r} [2(1 - \nu) J_1 \cdot (tJ_0 - J_1) - t^2 J_0^2];$$

$$\Phi'_\theta = 2i [2(1 - \nu) J_1 \cdot (tJ_0 - J_1) - t^2 J_0^2],$$

где

$$J_0 = J_0(t); \quad J_1 = J_1(t); \quad t = re^{i\theta} = a + bi.$$

Теперь нетрудно найти выражения для вычисления поправок к приближенному значению корня

$$\Delta r = -\frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2 + \tilde{a}_1 \tilde{a}_2}{2(\bar{a}_2^2 + \tilde{a}_2^2)}; \quad \Delta \theta = \frac{(\bar{a}_1 \bar{a}_2 - \tilde{a}_1 \tilde{a}_2)}{2(\bar{a}_2^2 + \tilde{a}_2^2)}; \quad (198)$$

здесь обозначено

$$\bar{a}_1 = -(c^2 - d^2 + e^2 - f^2)(a^2 - b^2) + 4ab(cd + ef) + 2(1 - \nu)(e^2 - f^2);$$

$$\tilde{a}_1 = -(c^2 - d^2 + e^2 - f^2) 2ab - 2(a^2 - b^2)(cd + ef) + 4(1 - \nu)ef;$$

$$\bar{a}_2 = -2(1 - \nu)(e^2 - f^2) - (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + 4abcd + 2(1 - \nu)[a(ce - df) - b(cf + de)];$$

$$\tilde{a}_2 = -2(1 - \nu)2ef - (a^2 - b^2)2cd - (c^2 - d^2)2ab + 2(1 - \nu)[b(ce - df) + a(cf + de)].$$

Процесс последовательных приближений заключается в том, что после нахождения поправок, их прибавляют с учетом знаков к приближенному значению корня, и после этого расчет повторяют сначала, т. е. снова находят по таблицам функций Бесселя величины c, d, e, f и по формулам (198) новые поправки. Уточнение

следует проводить до тех пор, пока величины поправок не будут меньше заданной погрешности. Значения первых трех корней уравнения при $\nu = 0,15$ и $\nu = 0,30$ можно брать из табл. 28.

Таблица 28
Значения первых трех корней трансцендентного уравнения соответствующего однородным статическим граничным условиям на боковой поверхности цилиндра

$\nu = 0,15$			$\nu = 0,30$	
n	r	θ	r	θ
1	2,982	27,50°	3,044	26,58°
2	6,252	15,19°	6,277	15,12°
3	9,429	11,18°	9,445	11,16°

Из графика уравнения (194) и табл. 28 видно, что модули корней возрастают, причем разница между модулями примерно равна π , а угол θ постепенно уменьшается. Пользуясь этим свойством корней, можно решить уравнение (194) и вычислить значения корней при $q > 10$, применив асимптотические представления функций Бесселя первого рода комплексного аргумента нулевого и первого порядка малых θ и больших r . Эти асимптотические представления функций Бесселя будут полезны и в дальнейшем при расчете.

Для построения асимптотических представлений можно воспользоваться разложением функций Бесселя первого рода комплексного аргумента в ряд Маклорена по θ . При этом потребуются формулы для дифференцирования функций Бесселя первого рода комплексного аргумента. Штрих в формулах обозначает дифференцирование по θ ; $z = re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} [z^n J_0(z)]' &= i [nz^n J_0(z) - z^{n+1} J_1(z)]; \\ [z^n J_1(z)]' &= i [z^{n+1} J_0(z) + (n-1) z^n J_1(z)]. \end{aligned}$$

Пользуясь этими формулами, можно вычислить начальные значения производных функций $J_0(z)$ и $J_1(z)$. Эти начальные значения производных содержат функции Бесселя только действительного аргумента. В результате разложения получаются двойные бесконечные ряды, которые в одном направлении содержат функции, зависящие от r , а коэффициентами при них служат бесконечные ряды по переменной $x = r\theta$. После суммирования двойные ряды свертываются в одинарные. Окончательные выражения

для асимптотических представлений могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} J_0(r, \theta) &= J_0(r) [\operatorname{ch} x (f_1 - if_5) + \operatorname{sh} x (f_2 + if_6)] + \\ &+ J_1(r) [\operatorname{ch} x (f_3 - if_7) - \operatorname{sh} x (f_4 + if_8)]; \\ J_1(r, \theta) &= -J_0(r) [\operatorname{ch} x (\varphi_1 - i\varphi_5) - \operatorname{sh} x (\varphi_2 - i\varphi_6)] + \\ &+ J_1(r) [\operatorname{ch} x (\varphi_3 - i\varphi_7) + \operatorname{sh} x (\varphi_4 + i\varphi_8)]; \end{aligned} \quad (199)$$

функции $f_1 \dots f_8$ и $\varphi_1 \dots \varphi_8$ выписаны в табл. 29.

При $\kappa = r\theta \ll 1$ и $r \gg 1$ формулы (199) упрощаются:

$$\begin{aligned} J_0(re^{i\theta}) &= J_0(r) \operatorname{ch} r\theta - iJ_1(r) \operatorname{sh} r\theta; \\ J_1(re^{i\theta}) &= J_1(r) \operatorname{ch} r\theta + iJ_0(r) \operatorname{sh} r\theta. \end{aligned} \quad (200)$$

Вычислим, пользуясь формулами, значения $J_0(re^{i\theta})$ и $J_1(re^{i\theta})$ при $r = 10$, $\theta = 0,0873 \approx 5^\circ$:

$$\begin{aligned} J_0(10) &= -0,246; \operatorname{sh} 0,873 = 0,988; J_0(re^{i\theta}) = -0,345 - i0,430; \\ J_1(10) &= 0,0435; \operatorname{ch} 0,873 = 1,406; J_1(re^{i\theta}) = 0,0612 - i0,243. \end{aligned}$$

Табличные значения:

$$J_0(re^{i\theta}) = -0,345 - i0,0492; J_1(re^{i\theta}) = 0,0635 - i0,246.$$

По модулю максимальная погрешность составляет 14%. Погрешность этого примера можно значительно уменьшить, если воспользоваться более точной формулой, учтя еще один член ряда по формуле (199). В этом случае погрешность вычисления будет в пределах 3%. Если воспользоваться асимптотическими представлениями функций Бесселя первого рода при больших q , то формулы (200) можно переписать в следующем виде:

$$J_0(re^{i\theta}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} [\sin r (\operatorname{ch} r\theta - i \operatorname{sh} r\theta) + \cos r (\operatorname{ch} r\theta + i \operatorname{sh} r\theta)];$$

$$J_1(re^{i\theta}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} [\sin r (\operatorname{ch} r\theta + i \operatorname{sh} r\theta) - \cos r (\operatorname{ch} r\theta - i \operatorname{sh} r\theta)].$$

Найдя значения корней трансцендентного уравнения, можно приступить к построению однородных решений.

Формулы перемещений и напряжений при выражении их через разрешающую функцию Φ имеют вид

$$u_r = \frac{(1+\nu)r^0}{E\gamma^2} [-\Psi - 2(1-\nu)J_1J_1'] \Phi;$$

$$u_z = \frac{(1+\nu)r^0}{E\gamma^2} [\varphi - 2(1-\nu)J_0J_1'] \Phi; \quad (201)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{q\gamma} [\Psi - q\gamma\varphi + 2(1-\nu)J_1J_1'] \Phi; \quad \sigma_z = \frac{1}{\gamma} [\varphi - 2J_0J_1'] \Phi;$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{q\gamma^2} [-\Psi - 2\nu q\gamma J_0J_1' - 2(1-\nu)J_1J_1'] \Phi; \quad \tau_{rz} = -\frac{\Psi}{\gamma} \Phi,$$

где $\varphi = \gamma (J_0J_0' + qJ_1J_1')$; $\Psi = \gamma (J_1J_0' - qJ_0J_1')$; $J_0' = J_0(\gamma)$.

Ряды для асимптотических представлений функций Бесселя комплексного аргумента

f_1	$1 - \frac{x^4 + 3x^2}{8Q^2} + \frac{3x^6 + 22x^4 + 63x^2 + 405x^2}{1152Q^4} + \dots$	f_3	$\frac{x^2}{2Q} - \frac{9x^4 + x^6}{48Q^3} + \dots$
f_2	$\frac{2x^3 + 9x}{24Q^2} + \frac{120x^7 - 84x^5 - 1980x^3 - 4050x}{11520Q^4} + \dots$	f_4	$\frac{x}{2Q} - \frac{9x + 4x^3 - x^5}{48Q^3} + \dots$
f_7	$\frac{3x + 2x^3}{24Q^2} + \frac{120x^7 - 204x^5 - 1620x^3 - 2430x}{11520Q^4} + \dots$	f_5	$\frac{x}{2Q} + \frac{x^5 - 6x^3 - 9x}{48Q^3} + \dots$
f_8	$1 - \frac{1 + x^2 + x^4}{8Q^2} + \frac{3x^6 + 10x^4 + 69x^2 + 243x^2 + 243}{1152Q^4} + \dots$	f_6	$\frac{1 + x^2}{2Q} - \frac{x^6 + 4x^4 + 9x^2 + 9}{48Q^3} + \dots$
φ_3	$1 - \frac{x^4 - x^2}{8Q^2} + \frac{15x^6 - 10x^4 - 765x^2 - 2295x^2}{5760Q^4} + \dots$	φ_1	$\frac{x^2}{2Q} - \frac{x^6 + x^4 - 27x^2}{48Q^3} + \dots$
φ_4	$\frac{2x^3 - 15x}{24Q^2} + \frac{60x^7 + 198x^5 + 1770x^3 + 2295x}{5760Q^4} + \dots$	φ_2	$\frac{x}{2Q} + \frac{x^5 + 8x^3 + 27x}{48Q^3} + \dots$
φ_5	$\frac{2x^3 - 9x}{24Q^2} + \frac{60x^7 + 258x^5 + 2430x^3 + 2025x}{5760Q^4} + \dots$	φ_7	$\frac{x}{2Q} + \frac{x^5 + 10x^3 + 9x}{48Q^3} + \dots$
φ_6	$1 - \frac{3x^4 + 3x^2 - 9}{24Q^2} + \frac{15x^6 + 50x^4 - 975x^2 - 3105x^2 - 2025}{5760Q^4} + \dots$	φ_8	$\frac{x^2 - 1}{2Q} - \frac{x^6 - 2x^4 - 21x^2 - 9}{48Q^3} + \dots$

Выражение разрешающей функции Φ при комплексных, попарно-сопряженных корнях характеристического уравнения может быть принято в виде

$$\tilde{\Phi} = \sum_{n=1}^8 [e^{-a_n \xi} (C_{1n} \sin b_n \xi + C_{2n} \cos b_n \xi) + e^{a_n \xi} (C_{3n} \sin b_n \xi + C_{4n} \cos b_n \xi)] .$$

Такой формой решения удобно пользоваться при расчете полубесконечного цилиндра, так как в этом случае возрастающая ветвь функций отбрасывается.

При расчете короткого цилиндра решение удобнее взять в другой форме:

$$\tilde{\Phi} = \sum_{n=1}^8 [C_{1n} \operatorname{sh} a_n \xi \sin b_n \xi + C_{2n} \operatorname{sh} a_n \xi \cos b_n \xi + C_{3n} \operatorname{ch} a_n \xi \sin b_n \xi + C_{4n} \operatorname{ch} a_n \xi \cos b_n \xi] . \quad (202)$$

Ниже будет показано, что такая форма решения позволяет при постановке граничных условий по оси z уменьшить в два раза порядок системы уравнений для определения произвольных постоянных C_{in} .

Формулы (201) перемещений и напряжений при выражении их через разрешающую функцию Φ содержат дифференциальные операторы, представляющие собой произведения символических функций Бесселя,

$$J_0(q\gamma) J_0(\gamma); J_0(q\gamma) J_1(\gamma); J_1(q\gamma) J_0(\gamma); J_1(q\gamma) J_1(\gamma). \quad (203)$$

При построении однородных решений для расчета сплошного цилиндра необходимо взять операторы (203) от функций Φ . Перед тем как это сделать, для упрощения дальнейших выкладок введем в дополнение к (195) следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} J_0(qt_n); & n &= fx + ey; & p &= c\xi - d\eta; \\ y &= \operatorname{Im} J_0(qt_n); & m &= ex - fy; & s &= c\eta + d\xi; \\ \xi &= \operatorname{Re} J_1(qt_n); & \kappa &= e\xi - f\eta; & t &= cx - dy; \\ \eta &= \operatorname{Im} J_1(qt_n); & l &= f\xi + e\eta; & v &= cy + dx. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $q = 0$

$$m = e; n = f; t = e; v = d; p = s = \kappa = l = 0;$$

при $q = 1$

$$\kappa = e^2 - f^2; m = ce - df; p = ce - df; t = c^2 - d^2; \\ l = 2ef; n = cf + de; s = cf + de; v = 2cd.$$

Введем также обозначения для гипербола-тригонометрических функций:

$$\operatorname{sh} a_n \zeta \cdot \sin b_n \zeta = \gamma_n; \quad \operatorname{ch} a_n \zeta \cdot \sin b_n \zeta = \lambda_n, \\ \operatorname{sh} a_n \zeta \cdot \cos b_n \zeta = \delta_n; \quad \operatorname{ch} a_n \zeta \cdot \cos b_n \zeta = \mu_n. \quad (204)$$

Значения функций γ_n , δ_n , λ_n и μ_n можно брать по таблицам, приведенным, например, в работе [17]. Выражение (202) в обозначениях (204) примет вид

$$\tilde{\Phi} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \gamma_n + C_{2n} \delta_n + C_{3n} \lambda_n + C_{4n} \mu_n).$$

Введем в рассмотрение четыре функции, составленные из гипербола-тригонометрических функций (204) с произвольными постоянными (индекс n у произвольных постоянных в дальнейших выражениях опущен):

$$Z_1 = C_1 \gamma_n + C_2 \delta_n + C_3 \lambda_n + C_4 \mu_n; \\ Z_3 = C_1 \lambda_n + C_2 \mu_n + C_3 \gamma_n + C_4 \delta_n; \\ Z_2 = C_1 \mu_n - C_2 \lambda_n + C_3 \delta_n - C_4 \gamma_n; \\ Z_4 = C_1 \delta_n - C_2 \gamma_n + C_3 \mu_n - C_4 \lambda_n. \quad (205)$$

Для функций (205) справедливы следующие дифференциальные и интегральные формулы:

$$\gamma Z_1 = a Z_3 + b Z_4, \quad \gamma^2 Z_1 = (a^2 - b^2) Z_1 + 2ab Z_2;$$

$$\frac{Z_1}{\gamma^2} = \frac{(a^2 - b^2) Z_1 - 2ab Z_2}{(a^2 + b^2)^2};$$

$$\gamma Z_2 = a Z_4 - b Z_3; \quad \gamma^2 Z_2 = (a^2 - b^2) Z_2 - 2ab Z_1; \quad \gamma Z_3 = a Z_1 + b Z_2;$$

$$\gamma^2 Z_3 = (a^2 - b^2) Z_3 + 2ab Z_4; \quad \frac{Z_2}{\gamma^2} = \frac{(a^2 - b^2) Z_2 + 2ab Z_1}{(a^2 + b^2)^2};$$

$$\gamma Z_4 = a Z_2 + b Z_1; \quad \gamma^2 Z_4 = (a^2 - b^2) Z_4 - 2ab Z_3;$$

$$\frac{Z_3}{\gamma^2} = \frac{(a - b^2) Z_3 - 2ab Z_4}{(a^2 + b^2)^2}; \quad \frac{Z_4}{\gamma^2} = \frac{(a^2 - b^2) Z_4 + 2ab Z_3}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Продолав необходимые подготовительные вычисления, можно теперь произвести линейные и дифференциальные операции над

функцией $\tilde{\Phi}$, которые формально обозначены произведениями символических функций Бесселя (203). Нетрудно проверить, что дифференциальные операции (203) над функцией $\tilde{\Phi}_n$, соответствующей n -му корню уравнения (202), приводят к следующим выражениям:

$$J_0(q\gamma) J_0(\gamma) \tilde{\Phi} = t Z_1 + v Z_2; \quad J_1(q\gamma) J_0(\gamma) \tilde{\Phi} = p Z_3 + s Z_4; \\ J_0(q\gamma) J_1(\gamma) \tilde{\Phi} = m Z_3 + n Z_4; \quad J_1(q\gamma) J_1(\gamma) \tilde{\Phi} = \kappa Z_1 + l Z_2. \quad (206)$$

Воспользовавшись выражениями (201) и (206), нетрудно построить окончательные формулы перемещений и напряжений сплошного цилиндра, нагруженного осесимметричной нагрузкой только по торцам.

$$u_z = \frac{(1 + \nu) r^0}{E} (R_1 Z_3 + R_2 Z_4); \quad u_r = \frac{(1 + \nu) r^0}{E} (R_3 Z_1 + R_4 Z_2); \\ \sigma_\varphi = R_7 Z_1 + R_8 Z_2; \quad \sigma_z = R_9 Z_1 + R_{10} Z_2; \\ \sigma_r = R_5 Z_1 + R_6 Z_2; \quad \tau_{rz} = R_{11} Z_3 + R_{12} Z_4. \quad (207)$$

Функции R_i вычисляются по формулам

$$R_1 = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} [a(q\kappa + t) - b(ql + v) - 2(1 - \nu)m]; \quad R_3 = \frac{A}{a^2 + b^2};$$

$$R_2 = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} [b(q\kappa + t) + a(ql + v) - 2(1 - \nu)n]; \quad R_4 = \frac{B}{a^2 + b^2};$$

$$R_5 = -\frac{1}{q(a^2 + b^2)} [A + (q\kappa + t)(a^2 + b^2)q];$$

$$R_7 = \frac{1}{q(a^2 + b^2)} [A - 2\nu(am + bn)q];$$

$$R_6 = \frac{1}{q(a^2 + b^2)} [B - (ql + v)(a^2 + b^2)q];$$

$$R_8 = -\frac{1}{q(a^2 + b^2)} [B + 2\nu(an - bm)q];$$

$$R_9 = \frac{1}{(a^2 + b^2)} [(q\kappa + t)(a^2 + b^2) - 2(am + bn)]; \quad R_{11} = (qm - p);$$

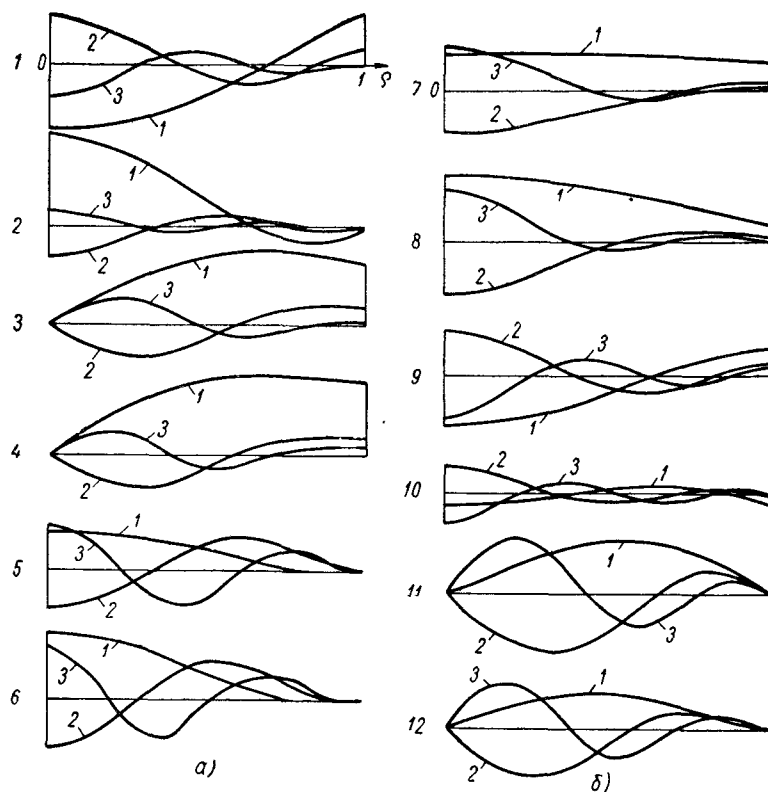
$$R_{10} = \frac{1}{(a^2 + b^2)} [(ql + v)(a^2 + b^2) - 2(an - bm)]; \quad R_{12} = (qn - s).$$

Здесь обозначено

$$A = a(qm - p) + b(qn - s) - 2(1 - \nu) \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \kappa + \frac{2ab}{a^2 + b^2} l \right];$$

$$B = b(qm - p) - a(qn - s) + 2(1 - \nu) \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} l - \frac{2ab}{a^2 + b^2} \kappa \right].$$

Значения функций \bar{R}_i для первых трёх корней уравнения (194) приведены в табл. 30. Функции R_i вычислены при $\nu = 0,15$ (для железобетонного цилиндра) и при $\nu = 0,30$ (для стального цилиндра). Значения функций даны через 0,05 для $0 \leq \varrho \leq 1$. Графики функций R_i показаны на фиг. 22, а и б.



Фиг. 22. Графики функций R_i однородных решений для сплошного цилиндра;

1 — первый корень; 2 — второй; 3 — третий корень; а — $i = 1, 2, \dots, 6$; б — $i = 7, \dots, 12$.

Из таблиц и графиков видно, что при увеличении n (порядкового номера корня) функции R_i затухают. Это затухание проявляется не только в том, что значения функций уменьшаются по абсолютной величине, но еще и в том, что увеличивается количество волн кривой, которые укладываются в пределах $0 \leq \varrho \leq 1$, т. е. кривая графика функции большее число раз пересекает ось. Такие функции (при больших n) обладают большой степенью самоуравновешенности. Это значит, что если на торце цилиндра

Таблица 30
Значения функций R_i для первых трех корней трансцендентного уравнения при $\nu = 0,15$ и $\nu = 0,30$

ϱ	$r = 2,9822; \theta = 27,4990^\circ; \nu = 0,15$											
	$R_1 \cdot 100$	$R_2 \cdot 100$	$R_3 \cdot 100$	$R_4 \cdot 100$	$R_5 \cdot 10$	$R_6 \cdot 10$	$R_7 \cdot 10$	$R_8 \cdot 10$	$R_9 \cdot 10$	$R_{10} \cdot 10$	$R_{11} \cdot 10$	$R_{12} \cdot 10$
0,00	-8,9847	15,866	0,000	0,000	1,9620	4,2239	1,9618	4,2239	-7,2435	-2,1446	0,000	0,000
0,05	-8,9444	15,724	1,1952	1,6960	1,9534	4,1940	1,9625	4,2135	-7,1960	-2,1092	0,40424	0,38919
0,10	-8,8230	15,303	2,3765	3,3628	1,9270	4,1049	1,9639	4,1823	-7,0540	-2,0045	0,80270	0,76652
0,15	-8,6184	14,614	3,5302	4,9722	1,8833	3,9591	1,9662	4,1307	-6,8185	-1,8347	1,1895	1,12045
0,20	-8,3276	13,675	4,6425	6,4976	1,8219	3,7606	1,9690	4,0592	-6,4914	-1,6066	1,5587	1,4403
0,25	-7,9466	12,510	5,6998	7,9149	1,7429	3,5148	1,9720	3,9686	-6,0756	-1,3297	1,9040	1,7161
0,30	-7,4709	11,152	6,6889	9,2035	1,6463	3,2285	1,9748	3,8599	-5,5748	-1,0158	2,2190	1,9396
0,35	-6,8962	9,6869	7,5968	10,346	1,5277	2,9095	1,9769	3,7342	-4,9389	-0,67854	2,4969	2,1040
0,40	-6,2188	8,0090	8,4113	11,332	1,4028	2,5668	1,9778	3,5928	-4,3393	-0,33359	2,7308	2,2044
0,45	-5,4362	6,3161	9,1211	12,152	1,2582	2,2102	1,9768	3,4373	-3,6188	0,002230	2,91307	2,2381
0,50	-4,5477	4,6103	9,7165	12,805	1,1008	1,8497	1,9736	3,2693	-2,8419	0,31116	3,0386	2,2050
0,55	-3,5553	2,9469	10,189	13,295	0,93372	1,4959	1,9675	3,0906	-2,0200	0,57505	3,0984	2,1074
0,60	-2,4642	1,3833	10,534	13,632	0,76083	1,1590	1,9581	2,9030	-1,1665	0,77586	3,0886	1,9500
0,65	-1,2838	0,0222	10,747	13,829	0,58713	0,84889	1,9450	2,7085	-0,29674	0,89628	2,9975	1,7408
0,70	-0,0277	-1,2119	10,830	13,907	0,41874	0,57471	1,9278	2,5090	0,57159	0,92029	2,8260	1,4899
0,75	1,2852	-2,1299	10,788	13,890	0,26295	0,34438	1,9064	2,3066	1,4188	0,83383	2,5683	1,2105
0,80	2,6306	-2,7236	10,629	13,807	0,12814	0,16430	1,8806	2,1032	2,2229	0,62541	2,2227	0,91814
0,85	3,9782	-2,9460	10,370	13,688	0,023786	0,038955	1,8506	1,9008	2,9605	0,28678	1,7890	0,63050
0,90	5,2922	-2,7567	10,030	13,567	-0,029465	1,8166	1,7790	1,7011	3,6061	-0,18646	1,2699	0,36729
0,95	6,5306	-2,1244	9,6381	13,476	-0,041386	1,7790	1,5060	1,5060	4,1333	-0,79425	0,67064	0,14973
1,00	7,6464	-1,0284	9,2262	13,448	0,000	0,000	1,7383	1,3168	4,5147	-1,5315	0,000	0,000

$r = 6,2522; \theta = 15,195^\circ, \nu = 0,15$												
Q	$R_{1 \cdot 10}$	$R_{2 \cdot 10}$	$R_{3 \cdot 10}$	$R_{4 \cdot 10}$	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}
0,00	0,68928	-0,48303	0,000	0,000	-0,24342	-0,33047	-0,24342	-0,33047	0,66136	0,41279	0,000	0,000
0,05	0,67620	-0,46880	-0,13188	-0,14700	-0,23704	-0,31781	-0,24187	-0,32597	0,64674	0,39871	-0,082033	-0,087996
0,10	0,63751	-0,42744	-0,25657	-0,28195	-0,21822	-0,28103	-0,23724	-0,31270	0,60372	0,35794	-0,15922	-0,16797
0,15	0,57482	-0,36274	-0,36728	-0,39395	-0,18794	-0,22353	-0,22954	-0,29135	0,53488	0,29472	-0,22694	-0,23275
0,20	0,49090	-0,28060	-0,45799	-0,47433	-0,14781	-0,15065	-0,21886	-0,26300	0,44440	0,21557	-0,28108	-0,27674
0,25	0,38971	-0,18843	-0,52384	-0,51745	-0,10006	-0,069064	-0,20599	-0,22909	0,33789	0,12865	-0,31822	-0,29654
0,30	0,27644	-0,094596	-0,56146	-0,52119	-0,047514	0,013920	-0,18904	-0,19129	0,22212	0,042718	-0,33596	-0,29127
0,35	0,15737	-0,0071717	-0,56926	-0,48708	0,0065788	0,091006	-0,17035	-0,15143	0,10470	-0,033609	-0,33308	-0,26265
0,40	0,039757	0,066469	-0,54765	-0,42007	0,058638	0,15577	-0,14962	-0,11138	-0,00642	-0,033196	-0,30975	-0,21485
0,45	-0,068617	0,12063	-0,49908	-0,32790	0,10503	0,20327	-0,12731	-0,072943	-0,10347	-0,13092	-0,26787	-0,15394
0,50	-0,15992	0,15187	-0,42802	-0,22013	0,14234	0,23056	-0,10401	-0,037711	-0,17947	-0,14444	-0,21066	-0,087254
0,55	-0,22701	0,15337	-0,34065	-0,10711	0,16775	0,23695	-0,080394	-0,070280	-0,22887	-0,13450	-0,142956	-0,022464
0,60	-0,26417	0,14507	-0,24446	0,0012684	0,17336	0,22409	-0,057183	-0,018113	-0,24821	-0,10493	-0,070785	0,033308
0,65	-0,26797	0,11346	-0,14760	0,096658	0,17652	0,19566	-0,035128	-0,037124	-0,23661	-0,062167	-0,000928	0,074415
0,70	-0,23796	0,071109	-0,058089	0,17320	0,16010	0,15689	-0,014947	0,049807	-0,19613	-0,014539	0,053651	0,097432
0,75	-0,17723	0,025258	0,017067	0,22810	0,13258	0,11388	-0,002718	0,056376	-0,13190	0,028792	0,10453	0,10166
0,80	-0,092593	-0,014098	0,072732	0,26179	0,09046	0,072685	0,017357	0,057397	-0,051933	0,059078	0,12861	0,083043
0,85	0,0055994	-0,041320	0,10643	0,26767	0,061457	0,038470	0,028630	0,053730	0,033410	0,069281	0,12888	0,065424
0,90	0,10412	-0,050189	0,11889	0,28133	0,029034	0,014672	0,036398	0,046437	0,11227	0,055259	0,10506	0,037014
0,95	0,18803	-0,038855	0,11429	0,27943	0,0068691	0,023698	0,040740	0,036686	0,17249	0,016702	0,060042	0,012433
1,00	0,24227	-0,004917	0,10000	0,27835	0,000	0,000	0,041946	0,025649	0,20300	-0,042347	0,000	0,000

$r = 9,4292; \theta = 11,184^\circ; \nu = 0,15$												
Q	$R_1 \cdot 10^3$	$R_2 \cdot 10^3$	$R_3 \cdot 10^3$	$R_4 \cdot 10^3$	$R_5 \cdot 10^2$	$R_6 \cdot 10^2$	$R_7 \cdot 10^2$	$R_8 \cdot 10^2$	$R_9 \cdot 10^2$	$R_{10} \cdot 10^2$	$R_{11} \cdot 10^2$	$R_{12} \cdot 10^2$
0,00	-50,159	24,163	0,000	0,000	25,674	31,234	25,674	31,234	-63,351	-46,765	0,000	0,000
0,05	-47,959	22,636	13,323	14,139	24,023	28,458	25,202	30,254	-60,294	-43,560	12,231	13,268
0,10	-41,616	18,344	24,913	25,667	19,288	20,689	23,812	27,431	-51,544	-34,594	22,820	23,993
0,15	-31,876	12,098	33,275	32,510	12,099	9,4939	21,590	23,097	-38,302	-21,680	30,347	30,175
0,20	-19,917	5,0600	37,357	33,556	3,4294	-2,8943	18,635	17,753	-22,398	-7,3856	33,808	30,782
0,25	-7,2289	-1,5018	36,710	28,860	-5,5147	-14,053	15,153	11,998	-6,0397	4,5340	32,760	25,959
0,30	4,5542	-6,4727	31,566	19,612	-13,453	-21,884	11,358	6,4466	8,5018	14,742	27,489	16,970
0,35	13,875	-9,1201	22,822	7,8444	-19,219	-25,049	7,5024	1,6441	19,244	19,827	18,848	5,8970
0,40	19,507	-9,2344	11,914	-4,0221	-21,960	-23,237	3,8553	-2,0033	24,827	17,590	8,3045	-4,8450
0,45	20,788	-7,1527	0,5935	-13,712	-21,303	-17,187	0,67189	-4,2752	24,771	12,047	-2,3529	-13,064
0,50	17,797	-3,6594	-9,3677	-19,574	-17,462	-8,4875	-1,8338	-5,1548	19,600	4,1351	-11,306	-17,282
0,55	11,405	0,21526	-16,498	-20,897	-11,235	0,82964	-3,5167	-4,8138	10,788	-3,7983	-17,052	-17,056
0,60	3,1642	3,4514	-19,908	-17,997	-3,8799	8,7772	-4,3224	-3,5708	0,50200	-9,5863	-18,721	-13,029
0,65	-4,9683	5,2906	-19,464	-12,053	3,1283	13,881	-4,2965	-1,8279	-8,8143	-11,851	-16,297	-6,7227
0,70	-11,039	5,4201	-15,813	-4,7367	8,4180	15,505	-3,5804	0,0004	-14,968	-10,314	-10,664	-0,090268
0,75	-13,566	4,0404	-10,224	2,2528	11,053	13,947	-2,3905	1,5551	-16,539	-5,8834	-3,4510	5,0338
0,80	-11,948	1,7952	-4,2680	7,6368	10,789	10,284	-0,98495	2,5847	-13,266	-0,37045	3,3294	7,4591
0,85	-6,7080	-0,42474	0,59104	10,853	8,1785	5,9872	0,37699	2,9750	-6,1983	4,0572	7,7751	6,9850
0,90	0,53509	-1,7579	3,4107	12,115	4,4588	2,4401	1,4763	2,7496	-2,4774	5,5708	8,6255	4,4589
0,95	7,3965	-1,6573	4,0605	12,214	1,2354	0,46973	2,1671	2,0464	9,9346	3,3264	5,6842	1,5090
1,00	11,326	0,10210	3,2943	12,115	0,000	0,000	2,3955	1,0737	13,445	2,1296	0,000	0,000

$r = 3,0440; v = 0,30; \theta = 26,584^\circ$												
Q	$R_1 \cdot 100$	$R_2 \cdot 100$	$R_3 \cdot 100$	$R_4 \cdot 100$	$R_5 \cdot 10$	$R_6 \cdot 10$	$R_7 \cdot 10$	$R_8 \cdot 10$	$R_9 \cdot 10$	$R_{10} \cdot 10$	$R_{11} \cdot 10$	$R_{12} \cdot 10$
0,00	-10,037	14,272	0,000	0,000	2,2312	3,9506	2,2312	3,9506	-7,3652	-1,7739	0,000	0,000
0,05	-9,9863	14,137	1,3021	1,5708	2,2194	3,9202	2,2306	3,9398	-7,3144	-1,7406	0,43966	0,36955
0,10	-9,8351	13,736	2,5875	3,1124	2,1842	3,8299	2,2288	3,9074	-7,1626	-1,6419	0,87236	0,72716
0,15	-9,5817	13,082	3,8394	4,5964	2,1257	3,6822	2,2257	3,8539	-6,9113	-1,4821	1,2911	1,0613
0,20	-9,2242	12,191	5,0416	5,9965	2,0441	3,4813	2,2211	3,7799	-6,5632	-1,2685	1,6887	1,3611
0,25	-8,7603	11,090	6,1781	7,2887	1,9401	3,2331	2,2146	3,6662	-6,1221	-1,0104	2,0581	1,6171
0,30	-8,1878	9,8110	7,2333	8,4527	1,8143	2,9446	2,2060	3,5739	-5,5930	-0,71986	2,3920	1,8209
0,35	-7,5051	8,3922	8,1928	9,4723	1,6880	2,6243	2,1948	3,4443	-4,9824	-0,41082	2,6828	1,9662
0,40	-6,7115	6,8770	9,0431	10,336	1,5030	2,2815	2,1806	3,2990	-4,2983	-0,096812	2,9233	2,0486
0,45	-5,8082	5,3136	9,7723	11,038	1,3216	1,9262	2,1630	3,1396	-3,5504	0,19942	3,1062	2,0662
0,50	-4,7986	3,7535	10,370	11,576	1,1271	1,5691	2,1417	2,9678	-2,7509	0,46645	3,2244	2,0194
0,55	-3,6892	2,2508	10,830	11,957	0,92340	1,2205	2,1162	2,7858	-1,9112	0,68470	3,2714	1,9115
0,60	-2,4902	0,86086	11,146	12,189	0,71584	0,89105	2,0863	2,5955	-1,0486	0,83703	3,2413	1,7483
0,65	-1,2159	-0,36109	11,317	12,290	0,50984	0,59028	2,0517	2,3990	-0,18004	0,90735	3,1292	1,5384
0,70	0,11481	-1,3614	11,346	12,279	0,31312	0,32695	2,0123	2,1985	0,67523	0,88428	2,9316	1,2933
0,75	1,4776	-2,0896	11,242	12,181	0,13361	0,10840	1,9682	1,9961	1,4959	0,74680	2,6463	1,0268
0,80	2,8431	-2,4999	11,016	12,025	-0,019612	-0,059860	1,9195	1,7939	2,2590	0,49482	2,2736	0,75508
0,85	4,1763	-2,5531	10,687	11,841	-0,13667	-0,17442	1,86640	1,5939	2,9401	0,12014	1,8159	0,49633
0,90	5,4370	-2,2185	10,279	11,660	-0,20710	-0,23445	1,8095	1,3980	3,5138	-0,37856	1,2782	0,27028
0,95	6,5799	-1,4753	9,8238	11,514	-0,22014	-0,240189	1,7493	1,2079	3,9542	-0,59758	0,66905	0,097746
1,00	7,5556	-0,31431	9,3574	11,432	0,000	0,000	1,6866	1,0252	4,2354	-1,7280	0,000	0,000

$r = 6,2771; v = 0,30; \theta = 15,124^\circ$												
Q	$R_1 \cdot 100$	$R_2 \cdot 100$	$R_3 \cdot 100$	$R_4 \cdot 100$	$R_5 \cdot 10$	$R_6 \cdot 10$	$R_7 \cdot 10$	$R_8 \cdot 10$	$R_9 \cdot 10$	$R_{10} \cdot 10$	$R_{11} \cdot 10$	$R_{12} \cdot 10$
0,00	7,0814	-4,6850	0,000	0,000	-2,5180	-3,2333	-2,5180	-3,2333	6,7088	3,9671	0,000	0,000
0,05	6,9439	-4,5449	-1,3553	-1,4333	-2,4503	-3,1075	-2,5011	-3,1884	6,5581	3,8289	-0,84530	-0,86208
0,10	6,5373	-4,1377	-2,6351	-2,7471	-2,2510	-2,7421	-2,4507	-3,0561	6,1153	3,4290	-1,6396	-1,6444
0,15	5,8798	-3,5013	-3,7681	-3,8336	-1,9307	-2,1716	-2,3676	-2,8434	5,4075	2,8095	-2,3344	-2,2755
0,20	5,0019	-2,6947	-4,6914	-4,6071	-1,5072	-1,4493	-2,2519	-2,5611	4,4787	2,0356	-2,8868	-2,7003
0,25	3,9472	-1,7918	-5,3549	-5,0125	-1,0051	-0,64230	-2,1059	-2,2239	3,3875	1,1882	-3,2615	-2,8854
0,30	2,7715	-0,87444	-5,7242	-5,0300	-0,45474	0,17581	-1,9318	-1,8486	2,2047	0,35450	-3,4341	-2,8227
0,35	1,5420	-0,023804	-5,7842	-4,6763	0,10891	0,93257	-1,7328	-1,4538	1,0092	-0,38145	-3,3933	-2,5307
0,40	0,33485	0,68807	-5,5406	-4,0016	0,64798	1,5641	-1,5133	-1,0582	0,11683	-0,98100	-3,2500	-2,19698
0,45	-0,76911	1,2058	-5,0208	-3,0841	1,1245	2,0217	-1,2786	-0,67975	-1,0944	-1,2990	-2,7015	-1,4460
0,50	-1,6900	1,4965	-4,2725	-2,0195	1,5033	2,2771	-1,0351	-0,33448	-1,8526	-1,4104	-2,1064	-0,78920
0,55	-2,3560	1,5540	-3,3613	-0,91061	1,7559	2,3247	-0,78994	-0,035608	-2,3367	-1,2928	-1,4078	-0,15571
0,60	-2,7116	1,3993	-2,3664	0,14478	1,8639	2,1824	-0,55083	0,20720	-2,5136	-0,98608	-0,66862	0,38382
0,65	-2,7254	1,0783	-1,3691	1,0653	1,8222	1,8881	-0,32546	0,38827	-2,3772	-0,55608	0,041385	0,77462
0,70	-2,3971	0,65728	-0,45442	1,7946	1,6415	1,4951	-0,12114	0,50612	-1,9514	-0,086462	0,65140	0,98462
0,75	-1,7626	0,21435	0,30779	2,3076	1,3487	1,0643	0,55786	0,56325	-1,2914	0,33191	1,0971	1,0093
0,80	-0,89550	-0,16993	0,86695	2,6108	0,98606	0,65697	0,20037	0,56574	-0,48089	0,61358	1,3286	0,87332
0,85	0,096168	-0,42353	1,1994	2,7402	0,60812	0,32049	0,30953	0,52252	0,37358	0,69139	1,3180	0,62823
0,90	1,0768	-0,49352	1,3155	2,7526	0,27596	0,090356	0,38227	0,44450	1,1519	0,52819	1,06574	0,34591
0,95	1,8957	-0,35522	1,2597	2,7143	0,049928	-0,025895	0,41986	0,34355	1,7325	0,12574	0,60455	0,10936
1,00	2,4039	-0,018576	1,1084	2,6873	0,000	0,000	0,42569	0,23142	2,0071	-0,47072	0,000	0,000

$r = 9,4465; \nu = 0,30; \theta = 11,160^\circ$											
q	$R_{1,100}$	$R_{2,100}$	$R_{3,100}$	$R_{4,100}$	$R_{5,100}$	$R_{6,100}$	$R_{7,100}$	$R_{8,100}$	$R_{9,100}$	$R_{10,100}$	$R_{11,100}$
0,00	-5,1032	2,3712	0,000	0,000	2,6178	3,0768	2,6178	3,0768	-6,4063	-4,5710	0,000
0,05	-4,8767	2,2202	1,3547	1,3902	2,4476	2,8012	2,5688	2,9794	-6,0946	-4,2546	1,2463
0,10	-4,2242	1,7969	2,5314	2,5215	1,9596	2,0305	2,4246	2,6987	-5,2028	-3,3701	2,3234
0,15	-3,2240	1,1792	3,3764	3,1887	1,2200	0,9211	2,1934	2,2682	-3,8548	-2,0977	3,0855
0,20	-1,9990	0,48534	3,7829	3,2826	0,33051	-0,30417	1,8889	1,7380	-2,2386	-0,69251	3,4302
0,25	-0,70412	-0,15963	3,7061	2,8102	-0,58350	-1,4041	1,5302	1,1679	-0,55077	0,57256	3,3154
0,30	0,49232	-0,64558	3,1721	1,8910	-1,3899	-2,1704	1,1406	0,61936	0,88714	1,4670	2,7675
0,35	1,4314	-0,90064	2,2747	0,72810	-1,9694	-2,4717	0,74663	0,14646	1,9642	1,8532	1,8810
0,40	1,9899	-0,90523	1,1626	-0,43804	2,2363	-2,2790	0,37595	-0,21080	2,5144	1,7146	0,80617
0,45	2,1035	-0,69407	0,015369	-1,3826	-2,1550	-1,6686	0,054523	-0,43040	2,4924	1,1547	-0,27353
0,50	1,7846	-0,34599	-0,98674	-1,9439	-1,7506	-0,080042	-0,19623	-0,51190	1,9554	0,36845	-1,1743
0,55	1,1255	0,036375	-1,6955	-2,0548	-1,1073	0,12214	-0,36220	-0,47290	1,0561	-0,41048	-1,7423
0,60	0,28680	0,35225	-2,0232	-1,7502	-0,35550	0,90196	-0,43866	-0,34569	0,016263	-0,97019	-1,8955
0,65	-0,53218	0,52768	-1,9699	-1,1498	0,35417	1,3945	-0,43113	-0,17068	-0,91674	-1,1762	-1,6352
0,70	-1,1350	0,53347	-1,5745	-0,42114	0,88330	1,5395	-0,35470	0,010776	-1,5236	-1,0065	-0,026195
0,75	-1,3755	0,39147	-0,99793	0,26738	1,1393	1,3704	-0,23190	0,16318	-1,6652	-0,55586	-0,32159
0,80	-1,1981	0,16703	-0,39047	0,79085	1,1009	0,9661	-0,089141	0,26204	-1,3209	-0,0076241	0,36023
0,85	-0,66087	-0,051019	0,10070	1,0366	0,89698	0,56605	0,047384	0,29669	-0,60192	0,42278	0,80050
0,90	0,068942	-0,17811	0,38244	1,2089	0,44516	0,21508	0,15587	0,27028	0,26818	0,55693	0,87608
0,95	0,74995	-0,16210	0,44929	1,2084	0,11781	0,022170	0,22216	0,19720	1,0047	0,31733	0,57240
1,00	1,1282	0,000	0,38450	1,1907	0,000	0,000	0,24149	0,098646	1,3370	-0,23416	0,000

будет приложена нагрузка, график которой аналогичен, например, графику функции R_9 (при $n = 3$), то ее воздействие по мере удаления от торца будет быстро затухать.

Действительно, функции Z_1, Z_2 будут затухать, как $e^{-a\zeta}$ ($a \approx 9$). Если погрешность расчета составляет 3%, то можно считать, что функции Z_1, Z_2 будут полностью затухать на расстоянии $0,4r^0$ от торца цилиндра, и на этом расстоянии от торца влияние функции R_9 уже не будет сказываться на распределении напряжений. Для четвертого корня $a \approx 12$, для пятого $a \approx 15$ затухание соответствующих однородных решений будет происходить еще быстрее на расстоянии $0,3r^0$ и $0,24r^0$. Поэтому для приближенного расчета цилиндра достаточно воспользоваться тремя корнями разрешающего уравнения. Граничные условия на торцах цилиндра при этом можно будет удовлетворить с точностью до трех членов ряда.

Отметим также, что все однородные решения получены в действительной форме, и это существенно облегчает расчет.

Использование однородных решений для расчета цилиндра, нагруженного по торцам. Расчет короткого сплошного цилиндра на осесимметричную нагрузку по торцам разобьем на два этапа. На первом этапе цилиндр целесообразно рассчитать на некоторые единичные нагрузки по торцам, и на втором этапе, комбинируя единичные нагрузки, получить расчет на фактическую нагрузку. Такой подход к расчету позволяет использовать результаты расчета на единичные нагрузки для проверки данного цилиндра на различные комбинации нагрузок. Законы распределения по торцам единичных нормальных нагрузок удобно принять по ортогональной системе функций $J_0(\alpha_n \varrho)$, а касательных нагрузок — по ортогональной системе функций $J_1(\beta_n \varrho)$.

Таким образом, задача первого этапа расчета состоит в том, чтобы разложить имеющиеся однородные решения для сплошного цилиндра в ряды Фурье-Бесселя. В виде этих разложений нужно представить напряжения σ_z и τ_{rz} на торцах цилиндра.

$$\sigma_z(\varrho) = \sum_1^n a_{\kappa} J_0(\alpha_{\kappa} \varrho); \quad \tau_{rz}(\varrho) = \sum_1^n b_{\kappa} J_1(\beta_{\kappa} \varrho).$$

В разложении достаточно ограничиться тремя членами ряда и соответственно этому использовать первые три однородные решения. В этом случае напряжения σ_z и τ_{rz} на торцах цилиндра будут выражаться суммой трех однородных решений:

$$\begin{aligned} \sigma_z(\varrho) &\approx \sum_{\kappa=1}^3 (R_9^{\kappa} Z_1^{\kappa} + R_{10}^{\kappa} Z_2^{\kappa}) = \sum_1^3 a_{\kappa} J_0(\alpha_{\kappa} \varrho); \\ \tau_{rz}(\varrho) &\approx \sum_{\kappa=1}^3 (R_{11}^{\kappa} Z_3^{\kappa} + R_{12}^{\kappa} Z_4^{\kappa}) = \sum_1^3 b_{\kappa} J_1(\beta_{\kappa} \varrho). \end{aligned} \quad (208)$$

Для коэффициентов Фурье-Бесселя имеем выражения

$$a_k = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 \rho \sigma_z(\rho) J_0(\alpha_n \rho) d\rho;$$

$$b_n = \frac{2}{J_2^2(\beta_n)} \int_0^1 \rho \tau_{rz}(\rho) J_1(\beta_n \rho) d\rho.$$

Произвольную осесимметричную нагрузку, приложенную к торцам цилиндра, в этом случае также следует представить в виде рядов Фурье-Бесселя

$$Q(\rho) \approx \sum_1^3 q_k J_0(\alpha_k \rho); \quad P(\rho) \approx \sum_1^3 p_n J_1(\beta_n \rho); \quad (209)$$

здесь $Q(\rho)$ — нормальная нагрузка;

$P(\rho)$ — касательная нагрузка;

q_k и p_n — известные коэффициенты Фурье-Бесселя, определяемые по формулам

$$q_k = \frac{2}{J_1^2(\alpha_k)} \int_0^1 \rho Q(\rho) J_0(\alpha_k \rho) d\rho;$$

$$p_n = \frac{2}{J_2^2(\beta_n)} \int_0^1 \rho P(\rho) J_1(\beta_n \rho) d\rho. \quad (210)$$

Сначала производится расчет на единичные нормальные нагрузки, т. е. в разложении (209) принимается последовательно $q_1 = 1$, затем $q_2 = 1$ и, наконец, $q_3 = 1$ (p_n при этом приравняются нулю). Затем аналогично этому производится расчет на единичные касательные нагрузки.

Если приравнять напряжение $\sigma_z(\rho)$ на торце цилиндра приложенной нагрузке $Q(\rho)$, а напряжение τ_{rz} нулю, то выражения (208) и (209) приводят к следующим соотношениям:

$$a_n = q_n; \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3). \quad (211)$$

Соотношения (211) дают три системы алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных, входящих в функции $Z_1^k, Z_2^k, Z_3^k, Z_4^k$. Каждому однородному решению соответствуют четыре произвольные постоянные; следовательно, при использовании трех однородных решений необходимо найти 12 произвольных постоянных.

Произвольные постоянные определяются из граничных условий на торцах цилиндра, при $\xi = l$ и $\xi = -l$

$$\sigma_z(\rho) = Q(\rho), \quad \tau_{rz} = 0; \quad \sigma_z(\rho) = 0, \quad \tau_{rz} = 0. \quad (212)$$

Имея расчет по такой схеме, можно рассчитать цилиндр, нагруженный нормальной нагрузкой по обоим торцам, так как в полученном решении можно поменять направление координатных осей и, используя принцип независимости действия сил, скомбинировать из имеющихся решений фактическую нагрузку по торцам. Рассчитав цилиндр на единичные нормальные нагрузки, аналогичным методом можно рассчитать цилиндр на единичные касательные нагрузки по одному из торцов.

Соотношения (211) и граничные условия (212) дают для определения двенадцати произвольных постоянных систему из двенадцати уравнений при каждом n в выражении (211). Значит систему придется решать 3 раза для каждой единичной нормальной нагрузки и 3 раза для каждой единичной касательной нагрузки.

Первоначально система, записанная относительно функций Z_i , имеет вид (213).

Значения коэффициентов можно взять из табл. 31.

Функции Z_i содержат гипербола-тригонометрические функции $\gamma_n, \delta_n, \lambda_n, \mu_n$. На торцах цилиндра при $\xi = \pm l$ эти функции по абсолютной величине равны, а нечетные функции δ_n, λ_n отличаются по знаку. Поэтому, если сложить попарно, а затем попарно вычесть уравнения системы (213), содержащие одинаковые функции Z при $\xi = \pm l$, то система (213) распадается на две системы по шесть уравнений с шестью неизвестными (214) и (215).

Коэффициенты систем уравнений будут

$$d_{nm} = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 R_9^m \rho J_0(\alpha_n \rho) d\rho;$$

$$f_{nm} = \frac{2}{J_2^2(\beta_n)} \int_0^1 R_{11}^m \rho J_1(\beta_n \rho) d\rho;$$

$$l_{nm} = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 R_{10}^m \rho J_0(\alpha_n \rho) d\rho;$$

$$g_{nm} = \frac{2}{J_2^2(\beta_n)} \int_0^1 R_{12}^m \rho J_1(\beta_n \rho) d\rho.$$

Правые части систем (214) и (215) представляют собой квадратные таблицы с единичной главной диагональю и остальными элементами, равными нулю. Решив системы (214) и (215) при единичных нагрузках, нужно умножить полученные произвольные постоянные на коэффициенты q_n и p_n , определенные по формулам (210). После этого можно вычислить функции Z_i^k при различном значении ξ . Окончательные расчетные формулы перемещений

Z_1^1	Z_2^1	Z_2^2	Z_1^2	Z_1^3	Z_2^3	Z_1^4	Z_3^2	Z_4^1	Z_3^3	Z_4^2	Z_4^3	1	2	3	4	5	6
$\uparrow \qquad \$																	

(213)

Таблица 31

Значения коэффициентов Фурье-Бесселя функций R_i

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$		d_{nm}			l_{nm}			f_{nm}			g_{nm}															
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3													
Железобетон, $\nu = 0,15$														1	-7,38	0,155	0,0447	-0,244	-0,113	0,0207	11,2	-4,06	-0,472	7,19	-1,74	-0,684
														2	-11,98	9,20	-0,275	-3,94	2,85	0,615	-1,94	-9,70	4,96	0,937	-8,04	1,511
														3	9,84	6,11	-9,69	-0,714	6,19	-3,84	0,858	2,24	9,09	-0,470	-0,797	8,79
$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$		d_{nm}			l_{nm}			f_{nm}			g_{nm}															
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3													
Сталь, $\nu = 0,30$														1	-7,49	0,179	0,0412	0,144	-0,177	0,0158	11,8	-3,92	-0,487	6,47	-1,58	-0,656
														2	-11,2	9,23	-0,237	-3,36	2,55	0,630	-2,00	-9,99	4,93	1,18	-7,88	1,37
														3	8,69	6,73	-9,82	-1,23	6,25	-3,64	0,629	2,17	9,27	-0,543	-0,676	9,18

Примечание. Все коэффициенты в таблице увеличены в 20 раз.

$2C_{11}$	$2C_{41}$	$2C_{12}$	$2C_{42}$	$2C_{13}$	$2C_{43}$	1	2	3	4	5	6
$d_{11}\lambda_1 + l_{11}\mu_1$	$d_{11}\mu_1 - l_{11}\nu_1$	$d_{12}\lambda_2 + l_{12}\mu_2$	$d_{12}\mu_2 - l_{12}\nu_2$	$d_{13}\lambda_3 + l_{13}\mu_3$	$d_{13}\mu_3 - l_{13}\nu_3$	1	0	0	0	0	0
$d_{21}\lambda_1 + l_{21}\mu_1$	$d_{21}\mu_1 - l_{21}\nu_1$	$d_{22}\lambda_2 + l_{22}\mu_2$	$d_{22}\mu_2 - l_{22}\nu_2$	$d_{23}\lambda_3 + l_{23}\mu_3$	$d_{23}\mu_3 - l_{23}\nu_3$	0	1	0	0	0	0
$d_{31}\lambda_1 + l_{31}\mu_1$	$d_{31}\mu_1 - l_{31}\nu_1$	$d_{32}\lambda_2 + l_{32}\mu_2$	$d_{32}\mu_2 - l_{32}\nu_2$	$d_{33}\lambda_3 + l_{33}\mu_3$	$d_{33}\mu_3 - l_{33}\nu_3$	0	0	1	0	0	0
$f_{11}\lambda_1 + g_{11}\delta_1$	$f_{11}\delta_1 - g_{11}\lambda_1$	$f_{12}\lambda_2 + g_{12}\delta_2$	$f_{12}\delta_2 - g_{12}\lambda_2$	$f_{13}\lambda_3 + g_{13}\delta_3$	$f_{13}\delta_3 - g_{13}\lambda_3$	0	0	0	1	0	0
$f_{21}\lambda_1 + g_{21}\delta_1$	$f_{21}\delta_1 - g_{21}\lambda_1$	$f_{22}\lambda_2 + g_{22}\delta_2$	$f_{22}\delta_2 - g_{22}\lambda_2$	$f_{23}\lambda_3 + g_{23}\delta_3$	$f_{23}\delta_3 - g_{23}\lambda_3$	0	0	0	0	1	0
$f_{31}\lambda_1 + g_{31}\delta_1$	$f_{31}\delta_1 - g_{31}\lambda_1$	$f_{32}\lambda_2 + g_{32}\delta_2$	$f_{32}\delta_2 - g_{32}\lambda_2$	$f_{33}\lambda_3 + g_{33}\delta_3$	$f_{33}\delta_3 - g_{33}\lambda_3$	0	0	0	0	0	1
$2C_{21}$	$2C_{31}$	$2C_{32}$	$2C_{32}$	$2C_{23}$	$2C_{33}$	1	2	3	4	5	6
$d_{11}\delta_1 - l_{11}\lambda_1$	$d_{11}\lambda_1 + l_{11}\delta_1$	$d_{12}\delta_2 - l_{12}\lambda_2$	$d_{12}\lambda_2 + l_{12}\delta_2$	$d_{13}\delta_3 - l_{13}\lambda_3$	$d_{13}\lambda_3 + l_{13}\delta_3$	1	0	0	0	0	0
$d_{21}\delta_1 - l_{21}\lambda_1$	$d_{21}\lambda_1 + l_{21}\delta_1$	$d_{22}\delta_2 - l_{22}\lambda_2$	$d_{22}\lambda_2 + l_{22}\delta_2$	$d_{23}\delta_3 - l_{23}\lambda_3$	$d_{23}\lambda_3 + l_{23}\delta_3$	0	1	0	0	0	0
$d_{31}\delta_1 - l_{31}\lambda_1$	$d_{31}\lambda_1 + l_{31}\delta_1$	$d_{32}\delta_2 - l_{32}\lambda_2$	$d_{32}\lambda_2 + l_{32}\delta_2$	$d_{33}\delta_3 - l_{33}\lambda_3$	$d_{33}\lambda_3 + l_{33}\delta_3$	0	0	1	0	0	0
$f_{11}\mu_1 - g_{11}\nu_1$	$f_{11}\nu_1 + g_{11}\mu_1$	$f_{12}\mu_2 - g_{12}\nu_2$	$f_{12}\nu_2 + g_{12}\mu_2$	$f_{13}\mu_3 - g_{13}\nu_3$	$f_{13}\nu_3 + g_{13}\mu_3$	0	0	0	1	0	0
$f_{21}\mu_1 - g_{21}\nu_1$	$f_{21}\nu_1 + g_{21}\mu_1$	$f_{22}\mu_2 - g_{22}\nu_2$	$f_{22}\nu_2 + g_{22}\mu_2$	$f_{23}\mu_3 - g_{23}\nu_3$	$f_{23}\nu_3 + g_{23}\mu_3$	0	0	0	0	1	0
$f_{31}\mu_1 - g_{31}\nu_1$	$f_{31}\nu_1 + g_{31}\mu_1$	$f_{32}\mu_2 - g_{32}\nu_2$	$f_{32}\nu_2 + g_{32}\mu_2$	$f_{33}\mu_3 - g_{33}\nu_3$	$f_{33}\nu_3 + g_{33}\mu_3$	0	0	0	0	0	1

и напряжений будут теперь содержать только известные функции R_i^k и Z_i^k .

$$\begin{aligned}
 u_z &= \frac{(1+\nu)r^0}{E} \sum_1^3 (R_1^k Z_3^k + R_2^k Z_4^k); \\
 u_r &= \frac{(1+\nu)r^0}{E} \sum_1^3 (R_3^k Z_1^k + R_4^k Z_2^k); \\
 \sigma_r &= \sum_1^2 (R_5^k Z_1^k + R_6^k Z_2^k); \quad \sigma_z = \sum_1^3 (R_9^k Z_1^k + R_{10}^k Z_2^k); \\
 \sigma_\phi &= \sum_1^3 (R_7^k Z_1^k + R_8^k Z_2^k); \quad \tau_{rz} = \sum_1^3 (R_{11}^k Z_3^k + R_{12}^k Z_4^k).
 \end{aligned} \quad (216)$$

Рассмотренный способ расчета сплошного цилиндра с использованием трех однородных решений отличается некоторыми трудностями, которые состоят в решении систем из шести уравнений с шестью неизвестными. Поэтому такой способ расчета можно рекомендовать для окончательной проверки напряжений и перемещений в запроектированной конструкции.

Во время проектирования удобнее пользоваться менее точным, но зато более простым способом расчета сплошного цилиндра, основанным на использовании одного однородного решения. Ниже будет показано, что и этот приближенный расчет дает достаточно полное и наглядное представление о работе сплошного цилиндра при осесимметричном нагружении по торцам.

Граничные условия на торцах цилиндра при этом приближенном способе расчета ставятся для напряжения σ_z с точностью до момента и для напряжений τ_{rz} с точностью до равнодействующей. Как и в предыдущем случае, достаточно рассмотреть нагружение цилиндра только по одному торцу осесимметричной нормальной нагрузкой.

Граничные условия в этом случае запишутся так:

$$\begin{aligned}
 \zeta &= l \left\{ r_0^3 \int_0^1 \sigma_z q^2 dq = 1, \int_0^1 \tau_{rz} q dq = 0; \right. \\
 \zeta &= -l \left\{ \int_0^1 \sigma_z q^2 dq = 0, \int_0^1 \tau_{rz} q dq = 0. \right.
 \end{aligned} \quad (217)$$

Расчет проводится на момент, равный единице, поэтому полученное решение следует умножить на фактический момент от нагрузки по торцу. Подставляя в выражения (217) формулы (205) и (207), можно получить для определения произвольных постоянных, входящих в функции Z_i , систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Так же, как и в предыдущем случае, эта

система распадается на две. Окончательные выражения произвольных постоянных будут

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{T_1\delta - T_2\lambda}{2D_1}; \quad C_2 = \frac{T_1\gamma + T_2\mu}{2D_2}; \\ C_3 &= \frac{T_1\mu - T_2\gamma}{2D_2}; \quad C_4 = \frac{T_1\lambda + T_2\delta}{2D_1}; \end{aligned} \quad (218)$$

$D_{1,2} = (M_1T_1 + M_2T_2)(\gamma\delta - \mu\lambda) \mp (M_1T_2 - M_2T_1)(\gamma\lambda + \mu\delta)$.
Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^1 R_9 \varrho^2 d\varrho; \quad T_1 = \int_0^1 R_{11} \varrho d\varrho; \\ M_2 &= \int_0^1 R_{10} \varrho^2 d\varrho; \quad T_2 = \int_0^1 R_{12} \varrho d\varrho. \end{aligned} \quad (219)$$

Для первого однородного решения

$$M_1 = 0,04086; \quad M_2 = 0,002345; \quad P_1 = 0,1055; \quad P_2 = 0,06232.$$

Значения произвольных постоянных, вычисленных по формулам (218), приведены в табл. 32 при различных $\frac{h}{r_0}$ ($\nu = 0,15$).

Графики C_n показаны на фиг. 23.

Таблица 32

Значения произвольных постоянных C_n в зависимости от относительной длины цилиндра l

l	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
C_1	-7,04	-4,57	-1,59	0,473	1,26	1,29
C_2	144	28,7	12,6	6,66	3,58	1,82
C_3	-183	-19,2	-3,28	0,352	1,26	1,29
C_4	12,6	11,7	9,30	6,19	3,55	1,73

Имея значения произвольных постоянных, можно найти по формулам (205) значения функций Z_i при различных ζ и по формулам (207) перемещения и напряжения от единичного момента в любой точке цилиндра. Для вычисления искомых величин перемещений и напряжений достаточно умножить полученные результаты на действительную величину момента от нагрузки. Вычисленные значения функций Z_i можно использовать для расчета цилиндра на единичный момент при $\zeta = -l$, но при этом следует учесть, что функции Z_1 и Z_2 при перемене координатных осей ведут себя как четные функции, т. е. не меняют знака, а функции Z_3 и Z_4 ведут себя как нечетные функции и меняют знак на обратный. В этом можно легко убедиться, рассмотрев формулы (204), (205) и (207).

Построение частных решений. Расчет цилиндра, нагруженного по боковой поверхности. Может оказаться, что нагрузка на боковой поверхности цилиндра не будет равномерно распределенной. Если, например, цилиндрический архитрав прессы подвергается изгибу, то целесообразно увеличить интенсивность бокового обжатия в растянутой зоне. Для расчета цилиндра на неравномерную нагрузку по боковой поверхности необходимо найти частный интеграл уравнения (194).

Для построения частного интеграла уравнения (194) произвольную нагрузку $Q(\zeta)$ следует представить в виде ряда Фурье

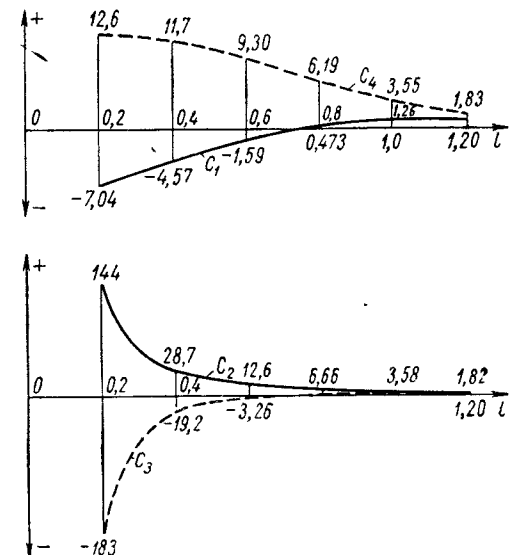
$$Q(\zeta) = \sum_1^n (\alpha_k \cos k\omega\zeta + \beta_k \sin k\omega\zeta); \quad (\omega = \frac{\pi}{l}). \quad (220)$$

Достаточно рассмотреть расчет цилиндра только на нагрузку, самоуравновешенную по высоте, так как расчет на равномерно-распределенную нагрузку можно производить по элементарным формулам. Частный интеграл уравнения (194) разыскиваем в виде ряда Фурье с неопределенными коэффициентами:

$$\bar{\Phi} = \sum_1^n (\gamma_k \cos k\omega\zeta + \delta_k \sin k\omega\zeta). \quad (221)$$

Для определения коэффициентов γ_k и δ_k нужно подставить (221) в левую часть уравнения (194). Предварительно возьмем операторы $[J_0(\gamma)]^2$ и $[J_1(\gamma)]^2$ от функции $\bar{\Phi}$:

$$\begin{aligned} J_0^2(\gamma) \bar{\Phi} &= \sum_1^n [I_0(k\omega)]^2 (\gamma_k \cos k\omega\zeta + \delta_k \sin k\omega\zeta); \\ J_1^2(\gamma) \bar{\Phi} &= \sum_1^n [I_1(k\omega)]^2 (\gamma_k \cos k\omega\zeta + \delta_k \sin k\omega\zeta). \end{aligned} \quad (222)$$



Фиг. 23. Графики значений произвольных постоянных в зависимости от относительной высоты цилиндра, нагруженного единичным моментом по торцу.

Используя выражения (222), находим неопределенные коэффициенты γ_k и δ_k и получаем окончательное выражение частного интеграла уравнения (194)

$$\bar{\Phi} = \sum_1^n \frac{\alpha_k \cos \kappa \omega \zeta + \beta_k \sin \kappa \omega \zeta}{f(\kappa \omega)}, \quad (223)$$

где

$$f(\kappa \omega) = - \left[1 + \frac{2(1-\nu)}{\kappa^2 \omega^2} \right] \cdot [I_1(\kappa \omega)] + [I_0(\kappa \omega)]^2.$$

Интересно отметить, что частный интеграл дифференциального уравнения (194) бесконечно высокого порядка при $l < 1$ представляет собой быстро сходящийся ряд. Для того чтобы убедиться в этом, оценим величину функции $f(\kappa \omega)$. Значения функции $f(\kappa \omega)$ приводятся (табл. 33) при $\omega = 2$, $l = 1,57$, $\omega = 3$, $l = 1,05$.

Таблица 33

Значения функции $f(\kappa \omega)$ в зависимости от относительной длины цилиндра

κ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega = 1$	2,466	8,805	42,40	233,0	1375	8460	53610	3469 · 10 ²	2282 · 10 ³	1519 · 10 ⁴
$\omega = 2$	8,805	233,0	8460	3469 · 10 ²	1519 · 10 ⁴					
$\omega = 3$	42,40	8460	2282 · 10 ³							

Для построенных частных решений необходимо подставить в формулы (201) выражение (223) вместо разрешающей функции $\bar{\Phi}$. При этом к функции $\bar{\Phi}$ придется применить операции по выражениям (203). Это нетрудно сделать, выразив тригонометрические функции через показательные по формулам Эйлера.

$$\begin{aligned} J_0(q\gamma) J_0(\gamma) \bar{\Phi} &= \sum_1^n [I_0(\kappa \omega q) \cdot I_0(\kappa \mu)] \frac{\alpha_k \cos \kappa \omega \zeta + \beta_k \sin \kappa \omega \zeta}{f(\kappa \omega)}; \\ J_0(q\gamma) J_1(\gamma) \bar{\Phi} &= - \sum_1^n [I_0(\kappa \omega q) \cdot I_1(\kappa \omega)] \frac{\beta_k \cos \kappa \omega \zeta + \alpha_k \sin \kappa \omega \zeta}{f(\kappa \omega)}; \\ J_1(q\gamma) J_0(\gamma) \bar{\Phi} &= - \sum_1^n [I_1(\kappa \omega q) \cdot I_0(\kappa \omega)] \frac{\beta_k \cos \kappa \omega \zeta + \alpha_k \sin \kappa \omega \zeta}{f(\kappa \omega)}; \\ J_1(q\gamma) J_1(\gamma) \bar{\Phi} &= - \sum_1^n [I_1(\kappa \omega q) \cdot I_1(\kappa \omega)] \frac{\alpha_k \cos \kappa \omega \zeta + \beta_k \sin \kappa \omega \zeta}{f(\kappa \omega)}. \end{aligned} \quad (224)$$

Воспользовавшись выражениями (224), по формулам (201) строим частные решения для расчета цилиндра на нагрузку по боковой поверхности:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{(1+\nu) r^0}{E} \sum_1^n \frac{\bar{R}_1 \alpha_k \sin \kappa \omega \zeta + \bar{R}_2 \beta_k \cos \kappa \omega \zeta}{\kappa^2 \omega^2 f(\kappa \omega)}; \\ u_r &= \frac{(1+\nu) r^0}{E} \sum_1^n \frac{\bar{R}_3 \alpha_k \cos \kappa \omega \zeta + \bar{R}_4 \beta_k \sin \kappa \omega \zeta}{\kappa^2 \omega^2 f(\kappa \omega)}; \\ \sigma_r &= \sum_1^n \frac{\bar{R}_5 \alpha_k \cos \kappa \omega \zeta + \beta_k \sin \kappa \omega \zeta \cdot \bar{R}_6}{\kappa^2 \omega^2 \cdot f(\kappa \omega)}; \\ \sigma_\varphi &= \sum_1^n \frac{\bar{R}_7 \cdot \alpha_k \cos \kappa \omega \zeta + \bar{R}_8 \beta_k \sin \kappa \omega \zeta}{\kappa^2 \omega^2 \cdot f(\kappa \omega)}; \\ \sigma_z &= \sum_1^n \frac{\bar{R}_9 \cdot \alpha_k \cos \kappa \omega \zeta + \bar{R}_{10} \beta_k \sin \kappa \omega \zeta}{\kappa \omega \cdot f(\kappa \omega)}; \\ \tau_{rz} &= \sum_1^n \frac{\bar{R}_{11} \cdot \alpha_k \sin \kappa \omega \zeta + \bar{R}_{12} \beta_k \cos \kappa \omega \zeta}{f(\kappa \omega)}. \end{aligned} \quad (225)$$

Функции \bar{R}_i определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= \bar{\varphi} \kappa \omega - 2(1-\nu) \bar{J}_0 \bar{J}_1'; \\ \bar{R}_5 &= \frac{1}{q} [\bar{\Psi} \kappa \omega - q \bar{\varphi} \kappa^2 \omega^2 - 2(1-\nu) \bar{J}_1 \bar{J}_1']; \\ \bar{R}_2 &= -\bar{\varphi} \kappa \omega - 2(1-\nu) \bar{J}_0 \bar{J}_1'; \\ \bar{R}_6 &= \frac{1}{q} [-\bar{\Psi} \kappa \omega - q \bar{\varphi} \kappa^2 \omega^2 - 2(1-\nu) \bar{J}_1 \bar{J}_1']; \\ \bar{R}_3 &= \bar{\Psi} \kappa \omega - 2(1-\nu) \bar{J}_1 \bar{J}_1'; \\ \bar{R}_7 &= \frac{1}{q} [(-\bar{\Psi} + 2\nu q \bar{J}_0 \bar{J}_1') \kappa \omega - 2(1-\nu) \bar{J}_1 \bar{J}_1']; \\ \bar{R}_4 &= \bar{\Psi} \kappa \omega - 2(1-\nu) \bar{J}_1 \bar{J}_1'; \\ \bar{R}_8 &= \frac{1}{q} [(\bar{\Psi} + 2\nu q \bar{J}_0 \bar{J}_1') \kappa \omega - 2(1-\nu) \bar{J}_1 \bar{J}_1']; \\ \bar{R}_9 &= -\bar{\varphi} \kappa \omega + 2 \bar{J}_0 \bar{J}_1'; \quad \bar{R}_{11} = \bar{\Psi}; \quad \bar{R}_{12} = \bar{\varphi}; \\ \bar{R}_{10} &= -\bar{\varphi} \kappa \omega - 2 \bar{J}_0 \bar{J}_1'; \quad \bar{\varphi} = \bar{J}_0 \bar{J}_0' - q \bar{J}_1 \bar{J}_1'; \quad \bar{\Psi} = \bar{J}_1 \bar{J}_0' - q \bar{J}_0 \bar{J}_1', \end{aligned}$$

где

$$\bar{J}_0 = I_0(\kappa\omega q); \quad \bar{J}'_0 = I_0(\kappa\omega);$$

$$\bar{J}_1 = I_1(\kappa\omega q); \quad \bar{J}'_1 = I_1(\kappa\omega).$$

Сопряжение сплошных цилиндров по торцам. Ортогонализация искоемых контактных напряжений и перемещений к системе функций q^n (метод моментов). Структура формул для расчета сплошного цилиндра позволяет использовать их и в том случае, когда необходимо рассчитать сопряжение по торцам двух или более сплошных цилиндров. При этом может быть использован любой метод, приводящий к системе алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных, входящих в функции Z_i . Эта система может быть получена из условия равенства перемещений и напряжений в сопряжении. При расчете сопряжения удобнее рассматривать не напряжения, а некоторые числовые последовательности, соответствующие перемещениям и напряжениям. В качестве таких последовательностей введем последовательности определенных интегралов функций, или последовательности «моментов» этих функций:

$$\sigma_z \rightarrow \int_0^1 \sigma_z q^2 dq, \int_0^1 \sigma_z q^3 dq, \dots, \int_0^1 \sigma_z q^n dq;$$

$$\tau_{rz} \rightarrow \int_0^1 \tau_{rz} q dq, \int_0^1 \tau_{rz} q^2 dq, \dots, \int_0^1 \tau_{rz} q^{(n-1)} dq.$$

Нетрудно заметить, что первые члены последовательностей, с точностью до постоянных, равны изгибающему моменту для напряжений σ_z и поперечной силе для напряжений τ_{rz} . Последовательности моментов перемещений запишем в виде

$$u_r \rightarrow \int_0^1 u_r dq, \int_0^1 u_r q dq, \dots, \int_0^1 u_r q^k dq;$$

$$u'_z \rightarrow \int_0^1 u'_z dq, \int_0^1 u'_z q dq, \dots, \int_0^1 u'_z q^k dq.$$

Первые члены последовательностей, с точностью до постоянных, равны радиальному смещению и углу поворота в сопряжении. Штрихом обозначена производная вертикального перемещения по относительному радиусу. Вместо вертикального перемещения u_z рассматривается угол поворота поверхности в каждой точке, так как это упрощает расчет сопряжения.

Можно показать, что если все моменты каких-либо двух непрерывных функций на участке $0 \leq q \leq 1$ равны, то эти функции тождественно равны.

При приближенном расчете сопряжения приравниваются не все моменты, а лишь несколько. В этом случае большое значение приобретает оценка погрешности приближенного приравнивания функций.

Погрешность приближенного приравнивания функций оценивается при помощи полиномов с единичными моментами. Оказывается, что для практического приближенного расчета сопряжения достаточно приравнивать функции с точностью до трех моментов.

Если в сопряжении приравниваются напряжения, то погрешность будет представлять собой напряжение, равнодействующая которого равна нулю. Кроме того, еще несколько моментов этой функции также равны нулю. График такой функции имеет вид кривой, много раз пересекающей ось (фиг. 24). Такие напряжения

обладают большой степенью самоуравновешенности и, как показано в работе [18], быстро затухают в некотором удалении от плоскости сопряжения.

Если рассматривать напряженное и деформированное состояние конструкции в удалении от сопряжения, то точность расчета в целом будет зависеть лишь от точности расчета каждого из сопрягаемых элементов.

Рассмотрим применение метода к расчету сопряжения двух сплошных цилиндров разного радиуса. Пусть это будет сопряжение верхнего цилиндрического архитрава и плиты подштампового блока, которую также можно назвать цилиндром (фиг. 25). Радиус верхнего цилиндра обозначим r_0^0 , радиус нижнего цилиндра r_n^0 .

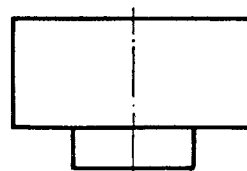
Введем безразмерные координаты $q = \frac{r}{r_0^0}$ и $\zeta = \frac{z}{r_0^0}$; для верхнего цилиндра обозначим их q_0 и ζ_0 , а для нижнего цилиндра q_n и ζ_n .

Оси координат каждого цилиндра показаны на фиг. 25.

Половину высоты цилиндра обозначим h . На верхнем торце цилиндра переменная ζ принимает значение $\zeta = \frac{h}{r_0^0} = l$, на нижнем торце $\zeta = -l$. Относительная длина верхнего цилиндра обозначена l_0 , нижнего l_n .



Фиг. 24. График напряжений, обладающих большой степенью самоуравновешенности.



Фиг. 25. Схема сопряжения цилиндрического архитрава и подштамповой плиты.

Условия сопряжения:

а) в поверхности сопряжения отсутствуют взаимные радиальные смещения элементов;

б) напряжения σ_z и τ_{rz} верхнего и нижнего цилиндров в зоне сопряжения равны;

в) вертикальные перемещения цилиндра в зоне сопряжения таковы, что форма поверхности нижнего цилиндра в зоне сопряжения точно совпадает с формой поверхности верхнего цилиндра.

Третье условие требует некоторых пояснений. Можно было бы просто потребовать, чтобы вертикальные перемещения верхнего и нижнего цилиндров в зоне сопряжения совпадали, но это условие выполнилось бы только при наличии одной координатной оси для обоих цилиндров. Расчет получается проще, если каждый цилиндр имеет свою координатную ось и начало координат находится в центре цилиндра. Но при таком расположении координатных осей вертикальные перемещения цилиндров в зоне контакта не будут совпадать ни по величине, ни по знаку.

Зона контакта верхнего цилиндра $0 \leq \varrho \leq d$, где $d = \frac{r_n^0}{r_s^0}$.

Зона контакта нижнего цилиндра $0 \leq \varrho \leq 1$. Контактные напряжения $\bar{\sigma}_z$ и $\bar{\tau}_{rz}$ отмечены чертой сверху; их моменты пока нам неизвестны.

Запишем их в виде

$$[\bar{\sigma}_z]_n = a_n; [\bar{\tau}_{rz}] = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots, n);$$

здесь a_n и b_n — искомые моменты контактных напряжений.

$$a_2 = \int_0^d \sigma_z \varrho^2 d\varrho, \quad a_3 = \int_0^d \sigma_z \varrho^3 d\varrho, \dots, \quad a_n = \int_0^d \sigma_z \varrho^n d\varrho;$$

$$b_1 = \int_0^d \tau_{rz} \varrho d\varrho, \quad b_2 = \int_0^d \tau_{rz} \varrho^2 d\varrho, \dots, \quad b_{n-1} = \int_0^d \tau_{rz} \varrho^{n-1} d\varrho.$$

Первая часть расчета сопряжения заключается в том, чтобы определить моменты a_n и b_n . Сначала найдем перемещения верхнего и нижнего цилиндров в зоне контакта от воздействия моментов a_n и b_n и от внешней нагрузки.

Для расчета сплошного цилиндра на осесимметричную нагрузку по торцам воспользуемся методом, изложенным на стр. 196. Метод расчета основан на использовании класса однородных решений для сплошного цилиндра со свободной от загрузения боковой поверхностью.

Формулы перемещений и напряжений при расчете цилиндра на самоуравновешенную нагрузку по торцам имеют вид

$$u_z = \frac{(1+\nu)r^0}{E} \sum_1^n (R_1^k Z_{3k} + R_2^k Z_{4k});$$

$$u_r = \frac{(1+\nu)r^0}{E} \sum_1^n (R_3^k Z_{1k} + R_4^k Z_{2k});$$

$$\sigma_r = \sum_1^n (R_5^k Z_{1k} + R_6^k Z_{2k}), \quad \sigma_\varphi = \sum_1^n (R_7^k Z_{1k} + R_8^k Z_{2k});$$

$$\sigma_z = \sum_1^n (R_9^k Z_{1k} + R_{10}^k Z_{2k}); \quad \tau_{rz} = \sum_1^n (R_{11}^k Z_{3k} + R_{12}^k Z_{4k});$$
(226)

здесь R_i^k — известные функции, соответствующие k -му однородному решению;

$Z_{1k}, Z_{2k}, Z_{3k}, Z_{4k}$ — функции, определяемые из граничных условий по торцам цилиндра;

n — число используемых однородных решений.

Для функций Z_i имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} Z_{1k} &= C_{1k} \gamma_k + C_{2k} \delta_k + C_{3k} \lambda_k + C_{4k} \mu_k; \\ Z_{3k} &= C_{1k} \lambda_k + C_{2k} \mu_k + C_{3k} \gamma_k + C_{4k} \delta_k; \\ Z_{2k} &= C_{1k} \mu_k - C_{2k} \lambda_k + C_{3k} \delta_k - C_{4k} \gamma_k; \\ Z_{4k} &= C_{1k} \delta_k - C_{2k} \gamma_k + C_{3k} \mu_k - C_{4k} \lambda_k, \end{aligned}$$
(227)

где

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \text{sh } \bar{a}_k \zeta \sin \bar{b}_k \zeta; \quad \delta_k = \text{sh } \bar{a}_k \zeta \cos \bar{b}_k \zeta; \quad \bar{a}_k = r_k \cos \theta_k; \\ \lambda_k &= \text{ch } \bar{a}_k \zeta \sin \bar{b}_k \zeta; \quad \mu_k = \text{ch } \bar{a}_k \zeta \cos \bar{b}_k \zeta; \quad \bar{b}_k = r_k \sin \theta_k. \end{aligned}$$

Функции R_i^k , а также величины \bar{r}_k и $\bar{\theta}_k$ для первых трех однородных решений приведены в табл. 30 и 28.

Предположим, что расчет сопряжения выполняется с точностью до трех моментов. В этом случае используются три однородных решения, $n = 3$. Запишем граничные условия на торцах верхнего цилиндра:

$$\text{при } \zeta = l \quad [\sigma_z]_3 = [q_1]_3, \quad [\tau_{rz}]_3 = [P_1]_3; \quad (228)$$

при $\zeta = -l$

$$[\sigma_z]_3 = [q_2]_3 + a_k, \quad [\tau_{rz}]_3 = [P_2]_3 + b_k;$$

здесь q_1 и P_1 — нормальная и касательная нагрузки на верхнем торце;

q_2 и P_2 — нормальная и касательная нагрузки на нижнем торце (квадратными скобками обозначены последовательности моментов; индекс «3» означает, что в последовательностях имеются по три члена).

Если определить из граничных условий (228) функции \bar{Z}_i , то они будут содержать в качестве неизвестных коэффициентов моменты a_k и b_k и, кроме того, коэффициенты, представляющие собой моменты внешней нагрузки. Обозначим найденные таким образом функции при $\zeta = -l$ чертой сверху.

$$\bar{Z}_{ik} = \bar{Z}_{ik}(a_k, b_k, q).$$

Перемещения нижней поверхности верхнего цилиндра запишем при $\zeta_s = -l_s$

$$u_r = \frac{(1 + \nu_s) r_s^0}{E_s} \sum_1^3 (R_3^k \bar{Z}_{1k} + R_4^k \bar{Z}_{2k});$$

$$u_z = \frac{(1 + \nu_s) r_s^0}{E_s} \sum_1^3 (R_1^k \bar{Z}_{3k} + R_2^k \bar{Z}_{4k}).$$

В перемещения входят шесть неизвестных моментов a_k и b_k . В такой же форме запишем выражения перемещений нижнего цилиндра на верхнем торце: при $\zeta_n = l_n$

$$u_r = \frac{(1 + \nu_n) r_n^0}{E_n} \sum_1^3 (R_3^k Z_{1k} + R_4^k Z_{2k});$$

$$u_z = \frac{(1 + \nu_n) r_n^0}{E_n} \sum_1^3 (R_1^k Z_{3k} + R_2^k Z_{4k}).$$

Эти функции определяются из граничных условий на торцах нижнего цилиндра: при $\zeta_n = -l_n$

$$[\sigma_z]_3 = [q_1]_3 + a_k, [\tau_{rz}]_3 = [P_1]_3 + b_k; \quad (229)$$

при $\zeta_n = -l_n$

$$[\sigma_z]_3 = [q_2]_3, [\tau_{rz}]_3 = [P_2]_3.$$

По условию сопряжения цилиндров, радиальные перемещения верхнего и нижнего цилиндров в зоне контакта должны совпадать. Следовательно, можно записать

$${}^0_d [u_r^e]_3 = [u_r^e]_3. \quad (230)$$

Верхний и нижний индексы у квадратной скобки в левой части равенства означают, что последовательности моментов вычисляются на участке $0 < q \leq d$. Условия (230) дают три уравнения, каждое из которых содержит шесть неизвестных моментов.

Другие три уравнения для определения a_k и b_k получим, используя оставшееся условие сопряжения для перемещения u_z . По этому условию должны совпадать формы поверхностей верхнего и нижнего цилиндров в зоне контакта.

Это условие будет выполнено, если приравнять моменты производных от функций u_z на участке $0 \leq q \leq d$:

$${}^0_d [u_z^e]_3 = [u_z^e]_3. \quad (231)$$

Действительно, если производные каких-либо двух функций совпадают в каждой точке, то эти функции могут отличаться только на константу. Это и требуется. Условие (231) дает еще три уравнения для определения коэффициентов a_k и b_k . Следовательно, расчет сопряжения приводит к решению системы шести линейных уравнений с шестью неизвестными моментами a_k и b_k .

Определив a_k и b_k , можно вычислить перемещения и напряжения в любой точке верхнего и нижнего цилиндров по формулам (226), так как они теперь содержат все известные функции.

Расчет сопряжения существенно упрощается, если в зоне контакта отсутствует трение и $\tau_{rz} = 0$. В этом случае $b_k = 0$ и условие (231) дает для определения a_k три уравнения. Условие сопряжения (230) в этом случае не ставится, так как ввиду отсутствия трения возможны взаимные смещения точек цилиндров в зоне контакта.

Основной объем вычислений при расчете сопряжения цилиндров методом моментов падает на расчет каждого из цилиндров на нагрузку по торцам, т. е. на составление и решение систем уравнений, которые получаются из граничных условий (228) и (229). Для облегчения этой работы целесообразно предварительно рассчитать каждый из цилиндров на воздействие по торцам единичных моментов.

Расчет проще производить отдельно на воздействие каждого из моментов, причем нагруженным при этом считать только один, например, верхний торец цилиндра. Имея расчеты на единичные моменты, можно затем рассчитать цилиндр на любое сочетание нагрузок, используя принцип независимости действия сил.

В граничные условия (228) и (229) входят моменты функций σ_z и σ_{rz} . Каждая из этих функций содержит функции, которые не зависят от q , и при вычислении моментов от σ_z и σ_{rz} придется брать интегралы только от функций R_i^k . В виду того, что функции R_i^k известны, моменты от них могут быть вычислены заранее. Это не трудно сделать, например, численным способом.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M_{nm} &= \int_0^1 R_9^m q^{n+1} dq; & T_{nm} &= \int_0^1 R_{11}^m q^n dq; \\ N_{nm} &= \int_0^1 R_{10}^m q^{n+1} dq; & S_{nm} &= \int_0^1 R_{12}^m q^n dq. \end{aligned} \quad (232)$$

здесь m — номер однородного решения,

Значения моментов для первых трех однородных решений можно брать из табл. 34. Граничные условия при расчете цилиндра на единичные моменты при подстановке в них формул (226) с учетом обозначений (232) могут быть записаны в виде

№ уравнений	Z_{11}	Z_{21}	Z_{12}	Z_{22}	Z_{13}	Z_{23}	1	2	3	4	5	6
1'	M_{11}	N_{11}	M_{12}	N_{12}	M_{13}	N_{13}	1	0	0	0	0	0
2'	M_{21}	N_{21}	M_{22}	N_{22}	M_{23}	N_{23}	0	1	0	0	0	0
3'	M_{31}	N_{31}	M_{32}	N_{32}	M_{33}	N_{33}	0	0	1	0	0	0
4'	M_{11}	N_{11}	M_{12}	N_{12}	M_{13}	N_{13}	0	0	0	0	0	0
5'	M_{21}	N_{21}	M_{22}	N_{22}	M_{23}	N_{23}	0	0	0	0	0	0
6'	M_{31}	N_{31}	M_{32}	N_{32}	M_{33}	N_{33}	0	0	0	0	0	0
№ уравнений	Z_{31}	Z_{41}	Z_{32}	Z_{42}	Z_{33}	Z_{43}	1	2	3	4	5	6
7'	T_{11}	S_{11}	T_{12}	S_{12}	T_{13}	S_{13}	0	0	0	1	0	0
8'	T_{21}	S_{21}	T_{22}	S_{22}	T_{23}	S_{23}	0	0	0	0	1	0
9'	T_{31}	S_{31}	T_{32}	S_{32}	T_{33}	S_{33}	0	0	0	0	0	1
10'	T_{11}	S_{11}	T_{12}	S_{12}	T_{13}	S_{13}	0	0	0	0	0	0
11'	T_{21}	S_{21}	T_{22}	S_{22}	T_{23}	S_{23}	0	0	0	0	0	0
12'	T_{31}	S_{31}	T_{32}	S_{32}	T_{33}	S_{33}	0	0	0	0	0	0

В уравнениях 4'—6' и 10'—12' функции Z_i должны быть взяты при $\xi = -l$. Рассчитывая сопряжения с точностью до трех моментов, получим для определения двенадцати произвольных постоянных, входящих в функции Z_i , систему из двенадцати линейных алгебраических уравнений. В функции Z_i входят гиперболические, тригонометрические функции γ_k , δ_k , λ_k , μ_k . При $\xi = -l$ четные функции γ и μ не меняют ни величины, ни знака, а нечетные функции δ и λ меняют знак на обратный.

Воспользовавшись этим свойством функций, сложим и вычтем попарно уравнения с одинаковыми функциями Z_i при $\xi = \pm l$. При этом система распадается на две системы по шесть уравнений с шестью неизвестными. Запишем их в виде

$2C_{11}$		$2C_{41}$	$2C_{12}$	$2C_{42}$	$2C_{13}$	$2C_{43}$	1	2	3	4	5	6
$M_{11}\gamma_1 + N_{11}\mu_1$	$M_{11}\mu_1 - N_{11}\gamma_1$	$M_{12}\gamma_2 + N_{12}\mu_2$	$M_{12}\mu_2 - N_{12}\gamma_2$	$M_{13}\gamma_3 + N_{13}\mu_3$	$M_{13}\mu_3 - N_{13}\gamma_3$	$M_{13}\gamma_3 - N_{13}\mu_3$	1	0	0	0	0	0
$M_{21}\gamma_1 + N_{21}\mu_1$	$M_{21}\mu_1 - N_{21}\gamma_1$	$M_{22}\gamma_2 + N_{22}\mu_2$	$M_{22}\mu_2 - N_{22}\gamma_2$	$M_{23}\gamma_3 + N_{23}\mu_3$	$M_{23}\mu_3 - N_{23}\gamma_3$	$M_{23}\gamma_3 - N_{23}\mu_3$	0	1	0	0	0	0
$M_{31}\gamma_1 + N_{31}\mu_1$	$M_{31}\mu_1 - N_{31}\gamma_1$	$M_{32}\gamma_2 + N_{32}\mu_2$	$M_{32}\mu_2 - N_{32}\gamma_2$	$M_{33}\gamma_3 + N_{33}\mu_3$	$M_{33}\mu_3 - N_{33}\gamma_3$	$M_{33}\gamma_3 - N_{33}\mu_3$	0	0	1	0	0	0
$T_{11}\lambda_1 + S_{11}\delta_1$	$T_{11}\delta_1 - S_{11}\lambda_1$	$T_{12}\lambda_2 + S_{12}\delta_2$	$T_{12}\delta_2 - S_{12}\lambda_2$	$T_{13}\lambda_3 + S_{13}\delta_3$	$T_{13}\delta_3 - S_{13}\lambda_3$	$T_{13}\delta_3 - S_{13}\mu_3$	0	0	0	1	0	0
$T_{21}\lambda_1 + S_{21}\delta_1$	$T_{21}\delta_1 - S_{21}\lambda_1$	$T_{22}\lambda_2 + S_{22}\delta_2$	$T_{22}\delta_2 - S_{22}\lambda_2$	$T_{23}\lambda_3 + S_{23}\delta_3$	$T_{23}\delta_3 - S_{23}\lambda_3$	$T_{23}\delta_3 - S_{23}\mu_3$	0	0	0	0	1	0
$T_{31}\lambda_1 + S_{31}\delta_1$	$T_{31}\delta_1 - S_{31}\lambda_1$	$T_{32}\lambda_2 + S_{32}\delta_2$	$T_{32}\delta_2 - S_{32}\lambda_2$	$T_{33}\lambda_3 + S_{33}\delta_3$	$T_{33}\delta_3 - S_{33}\lambda_3$	$T_{33}\delta_3 - S_{33}\mu_3$	0	0	0	0	0	1
$2C_{21}$		$2C_{31}$	$2C_{22}$	$2C_{32}$	$2C_{23}$	$2C_{33}$	1	2	3	4	5	6
$M_{11}\delta_1 - N_{11}\lambda_1$	$M_{11}\lambda_1 + N_{11}\delta_1$	$M_{12}\delta_2 - N_{12}\lambda_2$	$M_{12}\lambda_2 + N_{12}\delta_2$	$M_{13}\delta_3 - N_{13}\lambda_3$	$M_{13}\lambda_3 + N_{13}\delta_3$	$M_{13}\lambda_3 - N_{13}\mu_3$	1	0	0	0	0	0
$M_{21}\delta_1 - N_{21}\lambda_1$	$M_{21}\lambda_1 + N_{21}\delta_1$	$M_{22}\delta_2 - N_{22}\lambda_2$	$M_{22}\lambda_2 + N_{22}\delta_2$	$M_{23}\delta_3 - N_{23}\lambda_3$	$M_{23}\lambda_3 + N_{23}\delta_3$	$M_{23}\lambda_3 - N_{23}\mu_3$	0	1	0	0	0	0
$M_{31}\delta_1 - N_{31}\lambda_1$	$M_{31}\lambda_1 + N_{31}\delta_1$	$M_{32}\delta_2 - N_{32}\lambda_2$	$M_{32}\lambda_2 + N_{32}\delta_2$	$M_{33}\delta_3 - N_{33}\lambda_3$	$M_{33}\lambda_3 + N_{33}\delta_3$	$M_{33}\lambda_3 - N_{33}\mu_3$	0	0	1	0	0	0
$T_{11}\mu_1 - S_{11}\gamma_1$	$T_{11}\gamma_1 + S_{11}\mu_1$	$T_{12}\mu_2 - S_{12}\gamma_2$	$T_{12}\gamma_2 + S_{12}\mu_2$	$T_{13}\mu_3 - S_{13}\gamma_3$	$T_{13}\gamma_3 + S_{13}\mu_3$	$T_{13}\gamma_3 - S_{13}\mu_3$	0	0	0	1	0	0
$T_{21}\mu_1 - S_{21}\gamma_1$	$T_{21}\gamma_1 + S_{21}\mu_1$	$T_{22}\mu_2 - S_{22}\gamma_2$	$T_{22}\gamma_2 + S_{22}\mu_2$	$T_{23}\mu_3 - S_{23}\gamma_3$	$T_{23}\gamma_3 + S_{23}\mu_3$	$T_{23}\gamma_3 - S_{23}\mu_3$	0	0	0	0	1	0
$T_{31}\mu_1 - S_{31}\gamma_1$	$T_{31}\gamma_1 + S_{31}\mu_1$	$T_{32}\mu_2 - S_{32}\gamma_2$	$T_{32}\gamma_2 + S_{32}\mu_2$	$T_{33}\mu_3 - S_{33}\gamma_3$	$T_{33}\gamma_3 + S_{33}\mu_3$	$T_{33}\gamma_3 - S_{33}\mu_3$	0	0	0	0	0	1

Численные значения моментов первых трех однородных решений сплошного цилиндра

v	m \ n	$M_{nm} \cdot 10^3$			$N_{nm} \cdot 10^3$			$T_{nm} \cdot 10^3$			$S_{nm} \cdot 10^3$		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
0,15	1	40,81	-3,225	0,7095	2,360	-0,5652	1,224	105,33	-19,00	7,876	62,29	-9,418	5,330
	2	49,41	1,569	0,0177	0,6317	1,403	1,134	65,42	4,142	0,8762	34,89	5,388	2,469
	3	49,48	5,552	0,4125	-1,066	2,491	1,521	44,55	10,54	1,605	21,74	8,059	2,938
0,30	1	40,30	-3,24	0,703	0,215	-0,438	0,728	105,02	-19,05	8,02	59,9	-8,56	5,036
	2	48,5	1,775	0,065	-1,89	1,97	0,715	65,28	4,30	1,00	30,37	5,54	1,855
	3	48,36	5,78	0,406	-3,65	2,387	0,785	46,00	10,69	1,755	18,58	7,95	2,76

Полученные матрицы могут быть использованы не только при расчете сопряжения, но и просто при расчете цилиндра на осесимметричную нагрузку по торцам. Граничные условия по торцам в этом случае удовлетворяются с точностью до трех моментов.

Подставив в правые части систем вместо единичных моментов моменты от приложенной нагрузки, можно рассчитать цилиндр сначала на нагрузку по одному торцу, затем на нагрузку по другому торцу и результаты сложить.

После определения произвольных постоянных C_i можно вычислить функции Z_{im} и дальнейший расчет производить по формулам (226), которые будут содержать уже все известные функции.

При расчете сопряжения произвольные постоянные, полученные при расчете на единичные воздействия, следует умножить на неизвестные моменты a_k и b_k , действующие в сопряжении, и на моменты от внешней нагрузки q . В результате этого каждая произвольная постоянная будет содержать коэффициенты, зависящие от внешней нагрузки, и коэффициенты a_k и b_k . Эти же коэффициенты перейдут затем в функции Z_{im} .

Используя граничные условия сопряжения (230) и (231), получим для определения шести неизвестных моментов в сопряжении a_k и b_k систему из шести линейных уравнений. Если сопряжение рассчитывается при отсутствии трения, то все $b_k = 0$

и условие сопряжения (231) дает для определения трех неизвестных моментов систему из трех уравнений.

Ортогонализация искомым контактным напряжениям и перемещениям к системе функций Бесселя $J_0(\alpha_k q)$, $J_1(\beta_k q)$. Расчет сопряжения методом моментов имеет преимущество при приближенном решении задачи с точностью до двух-трех моментов. При необходимости дальнейшего уточнения решения целесообразно избрать другой способ расчета, основанный на представлении искомым контактных напряжений и перемещений в виде рядов Фурье-Бесселя. При этом способе расчета также воспользуемся классом однородных решений для сплошного цилиндра со свободной от нагружения боковой поверхностью.

Искомые контактные напряжения представим в виде рядов Фурье-Бесселя с неопределенными коэффициентами a_k и b_k

$$\sigma_z = \sum_1^n a_k J_0(\alpha_k q); \quad \tau_{rz} = \sum_1^n b_k J_1(\beta_k q). \quad (233)$$

Если производится расчет сопряжения цилиндров одинакового радиуса, то $q = \frac{r}{r^0}$, где r^0 — радиусы цилиндров. Если рассчитывается сопряжение цилиндров разного радиуса, то разложение принимается по большому радиусу и $q = \frac{r}{r^0}$, где r^0 — радиус большего цилиндра. В данном случае он назван верхним цилиндром. Разложение принимается по большому радиусу в связи с тем, что кроме контактных напряжений на верхний цилиндр может в плоскости сопряжения действовать еще внешняя нагрузка, распределенная по всей площади торца, и для ее разложения в ряд Фурье-Бесселя удобнее брать функции, зависящие от q .

Рассмотрим случай, когда в зоне сопряжения должно обеспечиваться равенство радиальных перемещений и равенство производных по q от вертикальных перемещений, т. е. формы поверхностей верхнего и нижнего цилиндров в зоне сопряжения должны совпадать. Нормальные и касательные напряжения в зоне сопряжения цилиндров также должны совпадать.

Как и при расчете методом моментов, прежде всего рассчитываем каждый из цилиндров на единичные воздействия в зоне сопряжения и на внешнюю нагрузку. За единичные воздействия удобно принять каждый из членов разложения (233).

Для упрощения дальнейших выкладок ограничимся в разложениях (233) тремя первыми членами ($n = 3$). В этом случае при расчете цилиндров будем использовать первые три однородные решения, а весь расчет сопряжения будет выполнен с точностью до трех членов ряда.

Для коэффициентов Фурье-Бесселя в разложениях (233) имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 q_\theta \sigma_z(q) J_0(\alpha_n q_\theta) dq_\theta; \\ b_n &= \frac{2}{J_2^2(\beta_n)} \int_0^1 q_\theta \tau_{rz}(q) J_1(\beta_n q_\theta) dq_\theta. \end{aligned} \quad (234)$$

Подставив в выражения (234) формулы напряжений σ_z и τ_{rz} при $n = 3$, перепишем их в виде

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{m=1}^3 (d_{nm} Z_1^m + l_{nm} Z_2^m); \\ b_n &= \sum_{m=1}^3 (f_{nm} Z_3^m + g_{nm} Z_4^m) \quad (n = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

где d_{nm} , l_{nm} , f_{nm} , g_{nm} — коэффициенты Фурье-Бесселя функций R_{im} .

$$d_{nm} = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 R_{i9}^m q J_0(\alpha_n q) dq;$$

$$l_{nm} = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 R_{i10}^m q J_0(\alpha_n q) dq;$$

$$f_{nm} = \frac{2}{J_2^2(\beta_n)} \int_0^1 R_{i11}^m q J_1(\beta_n q) dq;$$

$$g_{nm} = \frac{2}{J_2^2(\beta_n)} \int_0^1 R_{i12}^m q J_1(\beta_n q) dq,$$

значения этих коэффициентов приведены в табл. 31.

При расчете цилиндров на нагрузку по торцам необходимо внешнюю нагрузку также представить в виде рядов Фурье-Бесселя. Запишем ее в виде

$$Q(q) = \sum_1^n q_\kappa J_0(\alpha_\kappa q), \quad P(q) = \sum_1^n P_\kappa J_1(\beta_\kappa q),$$

здесь $Q(q)$ — нормальная и $P(q)$ — касательная нагрузки на каком-либо торце.

Входящие в функции Z_i^m произвольные постоянные, как отмечалось выше, находим из граничных условий по торцам каж-

дого цилиндра. Для верхнего цилиндра эти граничные условия будут:

$$\begin{cases} \text{при } \zeta = l \\ \text{при } \zeta = -l \end{cases} \left\{ \begin{aligned} \sum_{m=1}^3 (d_{nm} Z_{1m} + l_{nm} Z_{2m} - q_{1n}) &= 0, \\ \sum_{m=1}^3 (f_{nm} Z_{3m} + g_{nm} Z_{4m} - P_{1n}) &= 0, \\ \sum_{m=1}^3 (d_{nm} Z_{1m} + l_{nm} Z_{2m} - q_{2n} - a_n) &= 0, \\ \sum_{m=1}^3 (f_{nm} Z_{3m} + g_{nm} Z_{4m} - P_{2n} - b_n) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Для нижнего цилиндра граничные условия запишем в виде

$$\begin{cases} \text{при } \zeta = l \\ \text{при } \zeta = -l \end{cases} \left\{ \begin{aligned} \sum_{m=1}^3 (d_{nm} Z_{1m} + l_{nm} Z_{2m} - q_{1n} - a_n) &= 0, \\ \sum_{m=1}^3 (f_{nm} Z_{3m} + g_{nm} Z_{4m} - P_{1n} - b_n) &= 0, \\ \sum_{m=1}^3 (d_{nm} Z_{1m} + l_{nm} Z_{2m} - q_{2n}) &= 0, \\ \sum_{m=1}^3 (f_{nm} Z_{3m} + g_{nm} Z_{4m} - P_{2n}) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Для определения произвольных постоянных, входящих в функции Z_{im} , мы получили для каждого цилиндра систему из двенадцати линейных алгебраических уравнений. При применении приема, описанного на стр. 215, 230, каждая из систем распадается на две системы по шесть уравнений с шестью неизвестными.

Расчет существенно облегчается, если каждая из этих систем решена предварительно с единичной правой частью, т. е. в том случае, если правая часть каждой системы представляет собой квадратную таблицу с единичной главной диагональю и остальными элементами, равными нулю. Эта работа легко может быть запрограммирована и выполнена на вычислительной машине. Системы приведены на стр. 231 для случая нагружения одного только верхнего торца цилиндра.

Окончательные выражения функций Z_{im} получим, сложив выражения функций Z_{im} от каждого воздействия. Их можно записать в следующем виде:

$$Z_{im} = Z_{im}(a_\kappa, b_\kappa, q_\kappa, P_\kappa).$$

Для определения коэффициентов a_κ и b_κ воспользуемся условиями сопряжения: радиальные перемещения цилиндров на участке

сопряжения, а так же производные по q вертикальных перемещений должны совпадать.

Перемещения цилиндров в плоскости сопряжений также представим в виде разложений в ряды Фурье-Бесселя:

$$u_r = \sum_1^n (s_{km} Z_{1m} + t_{km} Z_{2m}) J_1(\beta_k \varrho_n);$$

$$u'_z = \sum_1^n (v_{km} Z_{3m} + w_{km} Z_{4m}) J_0(\alpha_k \varrho_n).$$

Для коэффициентов Фурье-Бесселя имеем выражения

$$s_{nm} = \frac{2}{J_2^2(\beta_n)} \int_0^1 R_3^m \varrho_n J_1(\beta_n \varrho_n) d\varrho_n;$$

$$t_{nm} = \frac{2}{J_2^2(\beta_n)} \int_0^1 R_4^m \varrho_n J_1(\beta_n \varrho_n) d\varrho_n;$$

$$v_{nm} = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 (R_1^m)' \varrho_n J_0(\alpha_n \varrho_n) d\varrho_n;$$

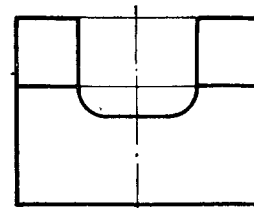
$$w_{nm} = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 (R_2^m)' \varrho_n J_0(\alpha_n \varrho_n) d\varrho_n.$$

Разложения приняты по радиусу меньшего цилиндра. В данном случае это удобно, так как участок интегрирования при этом получается $0 \leq \varrho \leq 1$. Интегралы можно вычислить, заменив их суммами и воспользовавшись таблицами [19]. Графики функций $(R_1^m)'$ и $(R_2^m)'$ также проще всего построить путем численного дифференцирования функций R_1^m и R_2^m .

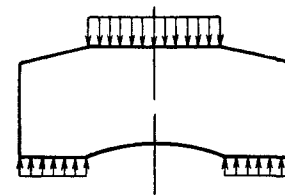
Приравняв в сопряжении радиальные перемещения и производные вертикальных перемещений нижнего и верхнего цилиндров, получим для определения шести коэффициентов a_k и b_k систему из шести линейных алгебраических уравнений. Решив эту систему, найдем a_k и b_k и выражения функций Z_{im} . Дальнейший расчет каждого из цилиндров не представляет затруднения, так как они были рассчитаны предварительно на единичные воздействия. В случае, если в сопряжении отсутствует трение, все $b_k = 0$, и для определения трех коэффициентов a_k получим систему из трех уравнений.

Использование однородных решений для приближенного расчета цилиндров с неплоскими торцами. Сплошной цилиндр с неплоскими торцами может найти применение в качестве дна железобетонного гидравлического цилиндра. Криволинейное очер-

тание торца в этом случае снижает концентрацию напряжений в зоне сопряжения стенки цилиндра с дном (фиг. 26). Весьма рационально применить архитрав с неплоским торцом. Даже небольшая выемка оказывается весьма эффективной, так как меняет характер распределения напряжений у торца и устраняет растяжения (фиг. 27).



Фиг. 26. Гидравлический цилиндр с дном.



Фиг. 27. Архитрав в виде сплошного цилиндра с неплоскими торцами.

Рациональная форма поверхности выемки может быть найдена экспериментальным путем или теоретически. Для приближенного расчета сплошного цилиндра с неплоскими торцами можно воспользоваться найденными однородными решениями для сплошного цилиндра с ненагруженной боковой поверхностью.

Поверхностные напряжения, действующие на торцевой поверхности сплошного цилиндра, при симметричном относительно оси распределении напряжений определяются следующими формулами:

$$\sigma_N = \sigma_r \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau_{rz} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_N = \tau_{rz} \cos 2\alpha + (\sigma_z - \sigma_r) \frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Направление осей показано на фиг. 28.

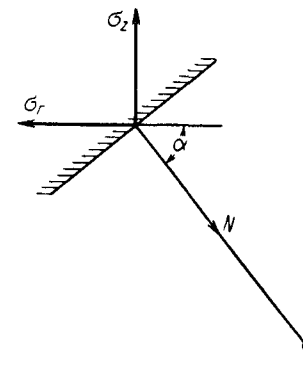
При приближенном расчете произвольную осесимметричную нагрузку, приложенную к поверхности торца, разложим по двум направлениям. Нормальная нагрузка Q_N раскладывается на

$$q(\varrho) = Q_N \sin \alpha, \quad q(\zeta) = Q_N \cos \alpha;$$

касательная нагрузка T_N раскладывается на

$$t(\varrho) = T_N \cos \alpha, \quad t(\zeta) = T_N \sin \alpha.$$

Кроме того, нагрузка, параллельная оси z , разбивается на равномерно распределенную по площади проекции торца и на



Фиг. 28. К определению поверхностных напряжений.

самоуравновешенную по этой же площади. Расчет на равномерно распределенную нагрузку производится отдельно, так как она вызывает простое сжатие цилиндра.

Для расчета цилиндра на вертикальную нагрузку, самоуравновешенную по площади проекции неплоского торца, можно применить метод ортогонализации, изложенный на стр. 213—221.

Поверхностные напряжения также следует разложить по двум направлениям

$$\sigma_N(q) = \sigma_N \sin \alpha, \quad \sigma_N(\xi) = \sigma_N \cos \alpha,$$

$$\tau_N(q) = \tau_N \cos \alpha, \quad \tau_N(\xi) = \tau_N \sin \alpha.$$

При приближенном удовлетворении граничных условий на торцах цилиндра нагрузку и используемые однородные решения разложим в ряды Фурье-Бесселя по переменной q . При этом разность функций $q(q) - \sigma_N(q)$ удобно ортогонализировать к системе функций $J_0(\alpha_k q)$, а переменный угол α следует представить в виде $\alpha(q)$. Разность функций $t(q) - \tau_N(q)$ удобно ортогонализировать к системе функций $J_1(\beta_k q)$. При приближенном расчете достаточно ограничиться тремя членами ряда в разложении нагрузки и использовать три однородные решения для сплошного цилиндра. Коэффициенты разложения определяются численным методом.

При расчете цилиндра на нагрузку, перпендикулярную оси z , следует применить ортогонализацию к системе функций $\sin k\omega\zeta$ и $\cos k\omega\zeta$, где $\omega = \frac{\pi}{l}$; l — относительная длина нагруженного участка цилиндра.

При использовании трех однородных решений расчет приводит к системам линейных алгебраических уравнений шестого порядка. Складывая результаты расчета цилиндра с криволинейными торцами на составляющие поверхностных нагрузок, параллельные и перпендикулярные оси z , получим распределение напряжений в цилиндре от заданной нагрузки.

Если нагрузку и поверхностные напряжения не раскладывать по двум направлениям, то при расчете придется вычислять криволинейные интегралы.

Примеры расчета полых и сплошных цилиндров

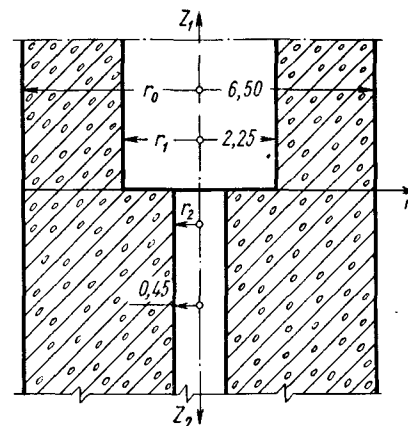
Сопряжение полых цилиндров по торцам. Требуется рассчитать сопряжение архитрава и стен железобетонной цилиндрической станины гидропресса. Железобетонная станина совмещена с рабочим гидравлическим цилиндром. Внутреннее давление жидкости воспринимается стенами станины и цилиндрическим архитравом. Необходимо найти перемещение внутренней поверхности цилиндра в зоне уплотнений и напряжения в наиболее опасных местах конструкции.

Расчет можно разделить на два этапа: сначала рассчитать конструкцию только на нагрузку, передаваемую жидкостью на

стены станины, а затем на нагрузку от давления жидкости на днище цилиндра, воспринимаемую архитравом, и после этого результаты сложить. Ввиду того, что оба расчета производятся по одной методике, мы ограничимся первым случаем нагружения.

Цилиндрический архитрав станины имеет круглый канал для подвода жидкости к цилиндру, поэтому он может рассматриваться как полый цилиндр. Для упрощения расчета стены цилиндрической станины и архитрав будем рассматривать как полубесконечные полые цилиндры. Таким образом, требуется рассчитать сопряжение двух полых цилиндров разной толщины, один из которых нагружен равномерным внутренним давлением (фиг. 29).

Для приближенного расчета полых цилиндров воспользуемся формулами



Фиг. 29. К расчету сопряжения полых цилиндров разной толщины.

$$u_r = \frac{q}{E} \frac{(1-\nu)\kappa^2 r^0}{(1-\kappa^2)q} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} + q^2 \right] \Phi;$$

$$\sigma_\varphi = q \frac{\kappa^2(1+q^2)}{q^2(1-\kappa^2)} \Phi; \quad \sigma_r = -q \frac{\kappa^2(1-q^2)}{q^2(1-\kappa^2)};$$

$$u_z = -\frac{q}{E} \frac{(1-\nu)\kappa^2 r^0}{2(1-\kappa^2)} \left\{ \frac{4\nu}{1-\nu} \int_0^\xi \Phi d\zeta + \right. \\ \left. + \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{1-\kappa^2}{2} + 2 \ln q \right) + \frac{2\kappa^2 \ln \kappa}{1-\kappa^2} + q^2 \right] \gamma \Phi \right\}; \quad (235)$$

$$\tau_{rz} = q \frac{\kappa^2(1-q^2)}{2(1-\nu)(1-\kappa^2)} \times \\ \times \left[\frac{(1-\nu)(\kappa^2-q^2)}{4(1+\nu)} - \frac{\kappa^2 \ln \kappa}{1-\kappa^2} + \frac{q^2 \ln q}{1-q^2} \right] \gamma^3 \Phi; \\ \sigma_z = q \frac{\kappa^2}{2(1-\nu)(1-\kappa^2)} \times \\ \times \left[\frac{(1-\nu)(1+\kappa^2-2q^2)}{2(1+\nu)} - \frac{2\kappa^2 \ln \kappa}{1-\kappa^2} - 2 \ln q - 1 \right] \gamma^2 \Phi. \quad (235)$$

Параметры цилиндров: $\kappa_\theta = 0,346$; $\kappa_H = 0,0692$; $r^0 = 6,5$ м; $\nu = 0,15$. Индекс « θ » означает, что величина относится к верхнему цилиндру, « H » — что величина относится к нижнему цилиндру. Подставляя в формулы (235) значения параметров верхнего и нижнего цилиндров, приведем их к виду

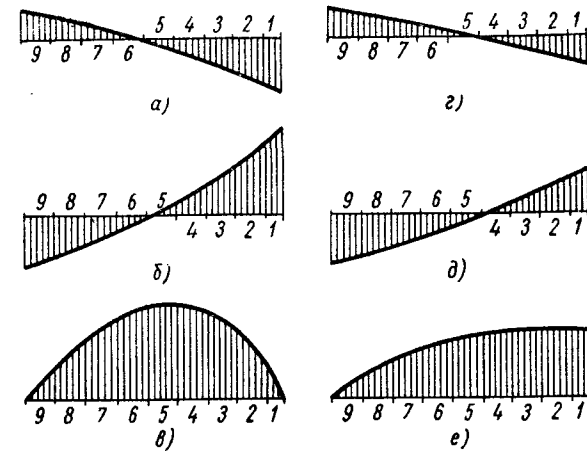
$$\begin{aligned} u_r^\theta &= \frac{q}{E} \left(\frac{1,016}{q} + 0,751q \right) \Phi_\theta; \quad u_r^H = \frac{q}{E} \left(\frac{0,0359}{q} + 0,0263q \right) \Phi_H; \\ u_z^\theta &= -\frac{q}{E} \left[0,265 \int_0^z \Phi_\theta d\zeta + (0,115 + 1,021\ln q + 0,376q^2) \gamma \Phi_\theta \right]; \\ u_z^H &= -\frac{q}{E} \left[0,00938 \int_0^z \Phi_H d\zeta + (0,00860 + \right. \\ &\quad \left. + 0,0360 \ln q + 0,0133q^2) \gamma \Phi_H \right]; \end{aligned} \quad (236)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^\theta &= q \left(-0,0239 - 0,1602 \ln q - 0,0592q^2 \right) \gamma^2 \Phi_\theta (m/m^2); \\ \sigma_z^H &= q \left(-0,00171 - 0,00209q^2 - 0,00566 \ln q \right) \gamma^2 \Phi_H (m/m^2); \\ \tau_{rz}^\theta &= q \left(\frac{0,01355}{q} - 0,0282q + 0,0148q^3 + 0,0800q \ln q \right) \gamma^3 \Phi_\theta (m/m^2); \\ \tau_{rz}^H &= q \left(\frac{3,91 \cdot 10^{-5}}{q} - 5,63 \cdot 10^{-4}q + 5,23 \cdot 10^{-4}q^3 + \right. \\ &\quad \left. + 2,83 \cdot 10^{-3}q \ln q \right) \gamma^3 \Phi_H (m/m^2). \end{aligned}$$

Графики функций показаны на фиг. 30.

Входящая в расчетные формулы функция Φ содержит четыре произвольные постоянные, которые должны быть определены из условий монолитного сопряжения верхнего и нижнего цилиндров. Эти условия состоят в том, что в плоскости сопряжения элементов радиальные перемещения равны, вертикальные перемещения элементов отличаются только по знаку, т. е. нет раскрытия шва. Нормальные напряжения равны, а касательные напряжения отличаются только по знаку; эти условия сопряжения могут быть выполнены только интегрально, приближенно. Для их выполнения линию сопряжения разбиваем на участки, и в пределах каждого участка приравняем площади эпюр соответствующих функций. Разбивка на участки представлена на фиг. 31. При расчете сопряжений пятый и шестой участки цилиндров не учиты-

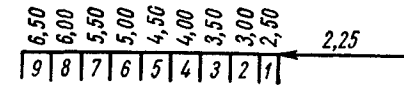
ваются, так как в пределах этих участков эпюры напряжений меняют знаки. Площади эпюр по участкам приведены в табл. 35.



Фиг. 30. Графики функций напряжений и перемещений:

а — функции $u_z^\theta: \left(\frac{q}{E} \Phi_\theta \right) m$; б — функции $\sigma_z^\theta: (q \Phi_\theta'')$; в — функции $\tau_{rz}^\theta: (q \Phi_\theta''')$; г — функции $u_z^H: \left(\frac{q}{E} \Phi_H \right) m$; д — функции $\sigma_z^H: (q \Phi_H'')$; е — функции $\tau_{rz}^H: (q \Phi_H''')$.

Фиг. 31. Разбивка линии сопряжения на участки.



При составлении систем уравнений, для определения произвольных постоянных, входящих в функции Φ_θ и Φ_H , необходимо иметь выражения производных функций $\gamma \Phi$, $\gamma^2 \Phi$ и $\gamma^3 \Phi$.

$$\begin{aligned} \Phi &= 1 + e^{-\bar{a}\bar{z}} (C_1 \sin \bar{b}\bar{z} + C_2 \cos \bar{b}\bar{z}); \\ \gamma \Phi &= e^{-\bar{a}\bar{z}} [C_1 (-\bar{a} \sin \bar{b}\bar{z} + \bar{b} \cos \bar{b}\bar{z}) + \\ &\quad + C_2 (-\bar{b} \sin \bar{b}\bar{z} - \bar{a} \cos \bar{b}\bar{z})]; \\ \gamma^2 \Phi &= e^{-\bar{a}\bar{z}} \{ C_1 [(a^2 - b^2) \sin \bar{b}\bar{z} - 2\bar{a}\bar{b} \cos \bar{b}\bar{z}] + \\ &\quad + C_2 [2\bar{a}\bar{b} \sin \bar{b}\bar{z} + (\bar{a}^2 - \bar{b}^2) \cos \bar{b}\bar{z}] \}; \\ \gamma^3 \Phi &= e^{-\bar{a}\bar{z}} \{ C_1 [-\bar{a}(\bar{a}^2 - 3\bar{b}^2) \sin \bar{b}\bar{z} + \bar{b}(3\bar{a}^2 - \bar{b}^2) \cos \bar{b}\bar{z}] + \\ &\quad + C_2 [-\bar{b}(3\bar{a}^2 - \bar{b}^2) \sin \bar{b}\bar{z} - \bar{a}(\bar{a}^2 - 3\bar{b}^2) \cos \bar{b}\bar{z}] \}. \end{aligned} \quad (237)$$

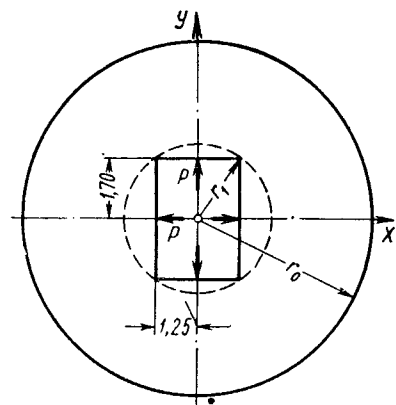
Перемещения внутренней поверхности верхнего цилиндра на высоте 1,5 м (в зоне уплотнений) равны

$$u_r^e = \frac{q}{E} \left(\frac{1,016}{q} + 0,751q \right) [1 - e^{-2,30\zeta} (0,252 \sin 1,36\zeta + 0,427 \cos 1,36\zeta)] \text{ м}$$

при $\zeta = \frac{1,50}{6,50} = 0,231$; $q = \kappa = 0,346$; $u_r^e = 2,29 \frac{q}{E} \text{ м}$.

Если $q = 3200 \text{ т/м}^2$, $E = 3,10 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$, то $u_r^e = 2,36 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Расчет цилиндра с прямоугольной полостью. Для приближенного расчета станины в виде цилиндра с прямоугольной полостью с целью определения необходимого диаметра из условий прочности воспользуемся формулами напряжений на стр. 156 при $n = 2$. Расчет проведем с точностью до равнодействующей нормального напряжения σ_r на внутреннем контуре.



Фиг. 32. Схема нагружения станины.

Схема станины и расчетная схема показаны на фиг. 32.

По первой расчетной схеме станина нагружена только двумя вертикальными линейными нагрузками по 6300 т. По второй расчетной схеме кроме этих нагрузок приложены еще горизонтальные линейные нагрузки по 6300 т.

$$r' = \sqrt{1,7^2 + 1,25^2} = \sqrt{4,44} = 2,11 \text{ м}; \quad P = 6300 \text{ т}.$$

Задаемся $r^0 = 4,22 \text{ м}$; $\kappa = \frac{r'}{r^0} = 0,5$. Длина станины равна 15 м; $q = \frac{6300 \text{ т}}{15 \text{ м}} = 420 \text{ т/м}$.

Складываем частное решение при $n = 2$ и напряженное состояние, соответствующее простому осесимметричному растяжению.

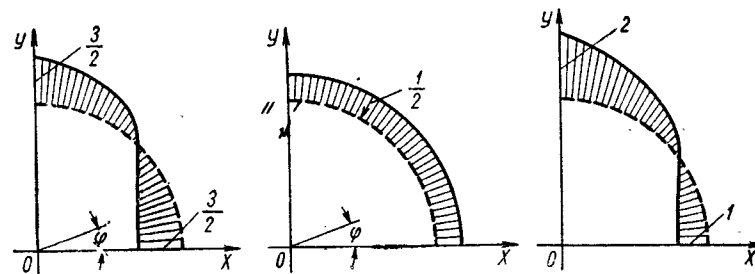
Полученное напряженное состояние имеет равнодействующую по оси X, равную нулю, и равнодействующую по оси Y, равную единице; для напряжений σ_r на контуре при $q = \kappa$

$$\sum Y = \begin{cases} -\frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\varphi \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \sum Y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Распределенная нагрузка $\frac{420}{r'} \text{ т/м} = 199 \text{ т/м}^2$:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad q_1 = \frac{3}{2} \cdot 199 = 298 \text{ т/м}^2.$$

График нагрузки показан на фиг. 33.



Фиг. 33. К определению суммарных напряжений σ_φ при $n = 0$ и $n = 2$.

Определяем напряжения при расчете по первой схеме. Наибольший интерес представляет распределение напряжений σ_φ . Максимальные значения σ_φ будут на оси Y.

$$D\sigma_\varphi = 3[(1 - 2\kappa^{-2} + \kappa^4) - 2(2 + \kappa^2 - 3\kappa^{-2})q^2 - (1 + 2\kappa^2 - 3\kappa^4)q^{-4}] 298 \text{ т/м}^2.$$

На внешней поверхности при $q = 1$

$$D\sigma_\varphi = -12(1 + \kappa^2 - \kappa^{-2} - \kappa^4) \cdot 298 = -12 \cdot 2,69 \cdot 298 \text{ т/м}^2;$$

$$D = -3[6 + (\kappa^4 + \kappa^{-4}) - 4(\kappa^2 + \kappa^{-2})] = -3 \cdot 4,94;$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2,69}{4,94} 4 \cdot 298 \text{ т/м}^2 = -2,18 \cdot 298 = 649 \text{ т/м}^2.$$

На внутренней поверхности при $q = \kappa$

$$D\sigma_\varphi = 3[10 - (\kappa^4 + \kappa^{-4}) - 4(\kappa^2 + \kappa^{-2})] 298 \text{ т/м}^2;$$

$$D\sigma_\varphi = 3 \cdot 23,06 \cdot 298 \text{ т/м}^2;$$

$$\sigma_\varphi = \frac{23,06}{4,94} 298 \text{ т/м}^2 = -4,66 \cdot 298 = -1390 \text{ т/м}^2.$$

На эти напряжения следует наложить напряженное состояние при осевой симметрии

$$\sigma_\varphi = \frac{\kappa^2(1 + q^2)}{q^2(1 - \kappa^2)} 99,5 \text{ т/м}^2;$$

при $q = 1$

$$\sigma_\varphi = \frac{2\kappa^2}{1 - \kappa^2} 99,5 = 0,667 \cdot 99,5 = 66,3 \text{ т/м}^2;$$

при $q = \kappa$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{1 + \kappa^2}{1 - \kappa^2} 99,5 = 1,67 \cdot 99,5 = 166 \text{ т/м}^2.$$

Суммарное значение σ_{φ} :

$$\text{при } q = 1 \quad \sigma_{\varphi} = 649 + 66 = 715 \text{ т/м}^2;$$

$$\text{при } q = \kappa \quad \sigma_{\varphi} = -1390 + 166 = -1124 \text{ т/м}^2.$$



Фиг. 34. Эпюра напряжения σ_{φ} по оси Y .

В течение 0,25 сек давление возросло на 700 т/м², а затем упало до прежней величины. График распределения нагрузки во времени показан на фиг. 35. Требуется вычислить увеличение радиального перемещения и напряжения σ_{φ} .

Параметры цилиндра

$$\kappa = \frac{r'}{r_0} = \frac{0,27}{0,75} = 0,36;$$

$$\nu = 0,2; \quad \delta = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} = 0,75.$$

Модуль упругости бетона цилиндра $E = 4 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$. Константы Ляме $\lambda + 2\mu = 4,44 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = -\frac{4 \cdot 0,2 \cdot 10^6}{1,2 \cdot 0,6} = 1,11 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2;$$

$$2\mu = \frac{E}{(1 + \nu)} = 3,33 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2.$$

Вычисляем распределенную массу цилиндра. Объем 1 м цилиндра $V = \pi (r_0^2 - r_1^2)$,

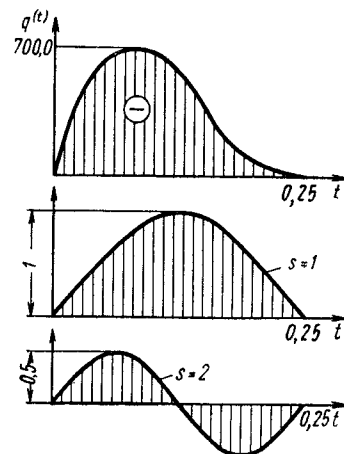
$$V = 3,14 (0,75^2 - 0,27^2) = 1,54 \text{ м}^3.$$

Объемный вес железобетона 2,4 т/м³, вес цилиндра (1 м по высоте) $P = 2,4 \cdot 1,54 = 3,70 \text{ т}$.

$$\text{Масса } M = \frac{P}{g} = \frac{3,70}{9,81} = 0,379 \text{ тн} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^3.$$

Вид эпюры σ_{φ} по оси Y показан на фиг. 34.

Вынужденные колебания полого цилиндра под воздействием нагрузки $q(t)$. Предположим, что во время испытания образца на гидравлическом прессе произошло внезапное повышение давления в цилиндре.



Фиг. 35. График распределения нагрузки $q(t)$ во времени.

Распределенная масса (по внутреннему диаметру) на 1 м высоты

$$m = \frac{M}{2\pi r'} = \frac{0,379}{6,28 \cdot 0,27} = 0,224 \frac{\text{тн} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^3}.$$

Определяем скорость распространения волн:

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}}; \quad \gamma = \frac{m}{\kappa} = 0,224 \frac{\text{тн} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4};$$

$$a = \sqrt{\frac{4,44}{0,224}} 10^3 = 4450 \text{ м/сек}.$$

Вычисляем частоты собственных колебаний цилиндра:

$$\omega_s = n_s \frac{a}{r_0}; \quad \frac{a}{r_0} = \frac{4450}{0,75} = 5940 \text{ 1/сек}.$$

s	1	2	3	4	5	6	7
n_s	1,50	5,30	9,81	14,7	19,6	24,6	29,4
ω_s	8,92	31,5	48,3	87,4	116,5	146	175

(Все величины разделены на 1000.) Значения n_s приняты по табл. 22 и графикам на фиг. 12 и фиг. 13 для $\kappa = 0,36$.

Низшая частота собственных колебаний цилиндра 8920 гц. Разложим нагрузку $q(t)$ в ряд по $\bar{\sigma}_{rs}$:

$$q(t) = \sum_s^n q_s \sin \frac{s\pi}{\Delta t} t.$$

Изменение нагрузки во времени носит плавный характер, поэтому в разложении можно ограничиться двумя членами ряда. Разложение показано на фиг. 35:

$$q(t) = -183 (2 \sin 4\pi t + \sin 8\pi t) \text{ т/м}^2;$$

$$\text{при } t = 1/16$$

$$q(t) = 700 \text{ т/м}^2,$$

$$\text{при } t = 1/4$$

$$q(t) = 0.$$

Вычислим перемещение внутренней поверхности цилиндра. Для этого необходимо определить ξ_{κ} при $s = 1$ и $s = 2$.

$$n_1 = 1,50; \quad n_2 = 5,30 \quad \xi_{\kappa}(\kappa n_s) = n_s x_3 - \delta x_4;$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} [J_1(\kappa n_s) Y_0(n_s) - Y_1(\kappa n_s) J_0(n_s)];$$

$$x_4 = \frac{\pi}{2} [J_1(\kappa n_s) Y_1(n_s) - Y_1(\kappa n_s) J_1(n_s)].$$

Значения функций Бесселя берем по таблицам в работе [15]:
 $J_1(0,36 \cdot 1,5) = 0,260$; $Y_1(0,36 \cdot 1,5) = -1,38$; $Y_1(1,5) = -0,412$;
 $Y_0(1,5) = 0,382$; $J_0(1,5) = 0,512$; $J_1(1,5) = 0,558$;
 $J_1(0,36 \cdot 5,3) = 0,581$; $Y_1(0,36 \cdot 5,3) = -0,559$; $Y_1(5,3) = 0,044$;
 $Y_0(5,3) = -0,337$; $J_0(5,3) = -0,076$; $J_1(5,3) = -0,346$;

$$x_3 = \frac{\pi}{2} [0,260 \cdot 0,382 + 1,38 \cdot 0,512] = 1,28;$$

$$x_4 = \frac{\pi}{2} [-0,260 \cdot 0,412 + 1,38 \cdot 0,558] = 1,04;$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} [-0,581 \cdot 0,337 - 0,559 \cdot 0,076] = -0,374;$$

$$x_4 = \frac{\pi}{2} [0,581 \cdot 0,044 - 0,559 \cdot 0,346] = -0,280;$$

$$\xi_1 = 1,5 \cdot 1,28 - 0,75 \cdot 1,04 = 1,14;$$

$$\xi_2 = -1,5 \cdot 0,374 + 0,75 \cdot 0,28 = -0,351;$$

$$q_1 \xi_1 = -366 \cdot 1,14 = -417 \text{ м/м}^2; \quad q_2 \xi_2 = 183 \cdot 0,357 = 65,3 \text{ м/м}^2;$$

$$u_r(t) = \frac{2(1-\nu^2)\kappa^2 r^0}{E(1-\kappa^2)} \sum_s^2 (417 \sin 4\pi t - 65,3 \sin 8\pi t);$$

$$\frac{2(1-\nu^2)\kappa^2 r^0}{E(1-\kappa^2)} = \frac{2 \cdot 0,96 \cdot 0,13 \cdot 0,75}{4 \cdot 10^6 \cdot 0,87} = 0,0467 \cdot 10^{-6};$$

$$417 \sin 4\pi t = x; \quad 65,3 \sin 8\pi t = y.$$

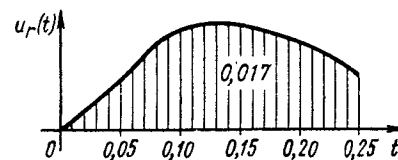
Вычисляем радиальное перемещение

t	0,05	0,10	0,15	0,20
$\sin 4\pi t$	0,587	0,951	0,951	0,590
$\sin 8\pi t$	0,951	0,590	0,363	-0,953
x	245,0	388,0	388,0	246,0
y	-62,1	-38,6	-23,8	62,4
$x + y$	183	347	364	308
$4\pi t$	0,628	1,256	1,885	2,51
$8\pi t$	1,256	2,512	2,77	5,02
$u_r(t)$	0,0085	0,0162	0,0170	0,0144

Величины u_r в таблице даны в мм. График $u_r(t)$ показан на фиг. 36. Максимальное перемещение составляет величину 0,017 мм. От статической нагрузки это перемещение составило бы 0,020 мм.

Напряжение σ_r на внутренней поверхности цилиндра меняется по закону, показанному на фиг. 35.

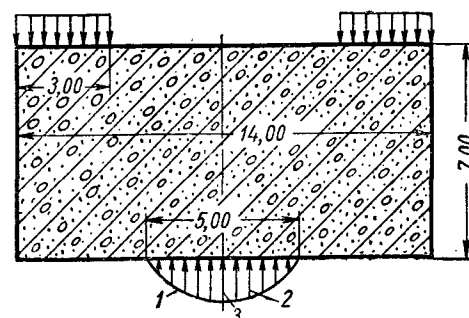
Вычислим максимальную величину напряжения σ_φ на внутренней поверхности цилиндра. Его можно вычислить по формуле (161), но эта приближенная формула в данном случае должна дать результат, близкий к статическому расчету по формуле Ляме, так как нагрузка $q(t)$ действует довольно длительное время. При использовании формулы (161) возьмем максимальное значение $u_r(t)$ по графику на фиг. 36 и вычислим



Фиг. 36. График $u_r(t)$.

$$\sigma_\varphi = 700,0 \frac{2 \cdot 0,13 + \frac{0,2 \cdot 0,8}{0,36} (2 - 0,75 \cdot 0,13)}{0,87} = 700,0 \cdot \frac{1,10}{0,87} = 885,0 \text{ м/м}^2.$$

Напряжение σ_φ от статической нагрузки 700,0 м/м² составило бы 910,0 м/м².



Фиг. 37. Схема нагружения цилиндрического архитрава:

1 — квадратная парабола; 2 — $P = 52 \cdot 200 \text{ м}$;
 3 — $q_{\max} = 5320 \text{ м/м}^2$.

равномерное сжатие во всех точках цилиндра и оно может быть учтено элементарным расчетом.

Параметры цилиндра:

$$r^0 = 7,0 \text{ м}; \quad h = 3,5 \text{ м}; \quad l = \frac{h}{r^0} = 0,500;$$

$$\nu = 0,15; \quad E = 4 \cdot 10^6 \text{ м/м}^2.$$

Расчет начинаем с разбивки нагрузки по торцам на сплошную равномерно распределенную и самоуравновешенную по каждому торцу. По верхнему торцу цилиндр нагружен реактивным давлением анкеров вертикальной арматуры, воспринимающей усилие штампования гидравлического пресса. По нижнему торцу цилиндр нагружен контактным давлением, передаваемым через подштамповый блок. Закон распределения этого давления принят по квадратной параболе.

Суммарное усилие, воспринимаемое цилиндрическим архитравом, равно 52 200 т.

Интенсивность сплошной равномерно распределенной нагрузки

$$q_1 = \frac{52\,200}{\pi 7,0^2} = 339 \text{ т/м}^2.$$

Интенсивность нагрузки в зоне реактивного давления анкеров

$$q = \frac{52\,200}{\pi (7,0^2 - 4,0^2)} = 503 \text{ т/м}^2.$$

Интенсивность самоуравновешенной нагрузки в зоне реактивного давления анкеров

$$503 - 339 = 164 \text{ т/м}^2.$$

По нижнему торцу максимальная ордината параболы эпюры контактного давления определена из условия, чтобы объем эпюры был равен суммарному усилию. Максимальная ордината

$$q_{\max} = 5320 \text{ т/м}^2.$$

Максимальная интенсивность самоуравновешенной нагрузки в зоне контактного давления:

$$q_{3\max} = 5320 - 339 = 4981 \text{ т/м}^2.$$

Уравнение параболы эпюры контактного давления

$$q(\varrho) = (5320 - 41\,700\varrho^2) \text{ т/м}^2.$$

Эпюра самоуравновешенной по каждому торцу нагрузки показана на фиг. 38, б, а распределенной — на фиг. 38, а.

Расчет на равномерно распределенную нагрузку ведем по элементарным формулам.

Радиальное перемещение

$$u_r = q_1 \frac{r_0^2}{E} \varrho = \frac{339 \cdot 0,15 \cdot 7,00}{4 \cdot 10^6} \varrho = 0,089 \varrho \text{ мм.}$$

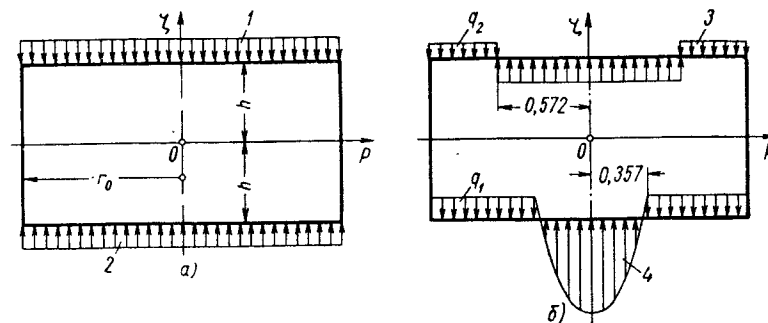
Осевое вертикальное перемещение

$$u_z = -q_1 \frac{r_0^2}{E} \zeta = -\frac{339 \cdot 7,00 \zeta}{4 \cdot 10^6} = -0,593 \zeta \text{ мм.}$$

Все напряжения, кроме σ_z , равны нулю.

$$\sigma_z = -q_1 = -339 \text{ т/м}^2.$$

Расчет на самоуравновешенную нагрузку по торцам ведем по формулам (216) с использованием первого однородного решения. Граничные условия по торцам цилиндра удовлетворяем для напряжений σ_z с точностью до момента и для напряжений τ_{rz} с точностью до равнодействующей.



Фиг. 38. Разбивка нагрузки на торцах архитрава на равномерно распределенную и самоуравновешенную по поверхности каждого торца:

$$1 \text{ и } 2 - q_1 = 339 \text{ т/м}^2; 3 - q_2 = 164 \text{ т/м}^2; 4 - q_{\max} = 4981 \text{ т/м}^2.$$

Вычисляем момент от нагрузки по верхнему торцу:

при $0 \leq \varrho \leq 0,572$; $\zeta = l$

$$r_0^3 q_1 \int_0^{0,572} \varrho^2 d\varrho = 339 \frac{0,572^2 \cdot r_0^3}{3} = r_0^3 \cdot 21,15 \text{ т/м}^2;$$

при $0,572 < \varrho \leq 1$

$$r_0^3 q_2 \int_{0,572}^1 \varrho^2 d\varrho = -\frac{164}{3} (1 - 0,572^3) r_0^3 = -r_0^3 \cdot 44,44 \text{ т/м}^2.$$

Суммарный момент $-44,44 + 21,15 = -23,29 r_0^3 \text{ т/м}^2$.

Момент от нагрузки по нижнему торцу $\zeta = -l$:

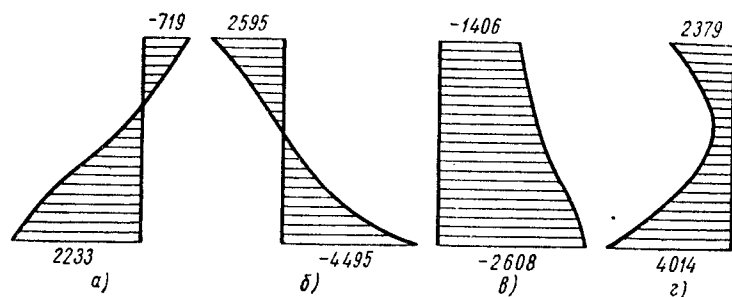
$$\left[-532 \int_0^{0,357} \varrho^2 d\varrho + 41700 \int_0^{0,357} \varrho^4 d\varrho + 339 \int_0^1 \varrho^2 d\varrho \right] r_0^3 =$$

$$= -80,69 + 48,36 + 113 = 80,68 r_0^3 \text{ т/м}^2.$$

Граничные условия на торцах цилиндра запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} M_1 Z_1 + M_2 Z_2 &= -23,29 \text{ т/м}^2 & \zeta &= 0,500, \\ T_1 Z_3 + T_2 Z_4 &= 0 \\ M_1 Z_1 + M_2 Z_2 &= 80,68 \text{ т/м}^2 & \zeta &= -0,500, \\ T_1 Z_3 + T_2 Z_4 &= 0 \end{aligned} \quad (238)$$

Величины M_1, M_2, T_1, T_2 для первого однородного решения были определены ранее (см. табл. 34). Четыре произвольные постоянные, входящие в функции Z_i , можно определить, воспользовавшись формулами (218) или из табл. 32 для единичных момен-

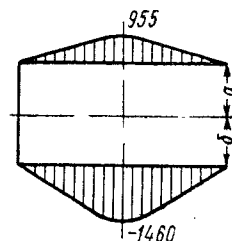


Фиг. 39. Графики функций:
а — Z_1 m/m^2 ; б — Z_2 m/m^2 ; в — Z_3 m/m^2 ; г — Z_4 m/m^2 .

тов. Не представляет затруднений определить их непосредственно из системы (238), так как она распадается, как было указано выше, на две системы по два уравнения с двумя неизвестными. Значения произвольных постоянных:

$$C_1 = 174,9 \text{ } m/m^2; \quad C_2 = -1892 \text{ } m/m^2;$$

$$C_3 = 838,7 \text{ } m/m^2; \quad C_4 = 612,5 \text{ } m/m^2.$$



Фиг. 40. Эпюры напряжений σ_r на торцах цилиндрического архитрава:
а — $\xi = 0,5$;
б — $\xi = -0,5$.

Графики функций Z_i показаны на фиг. 39. Имея значения функций R_i (табл. 30) и Z_i (табл. 39 и 40), по формулам (216) вычисляем

Зная произвольные постоянные, запишем окончательные выражения функций Z_i :

$$Z_1 = 174,9\gamma - 1892\delta + 838,7\lambda + 612,5\mu;$$

$$Z_2 = 174,9\mu + 1892\lambda + 838,7\delta - 612,5\gamma;$$

$$Z_3 = 174,9\lambda - 1892\mu + 838,7\gamma + 612,5\delta;$$

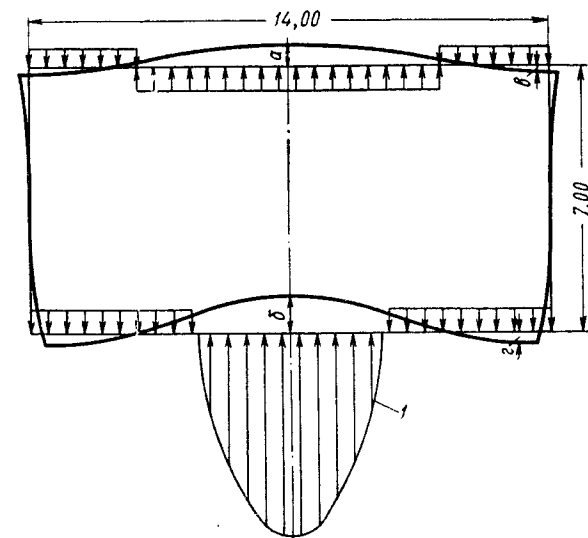
$$Z_4 = 174,9\delta + 1892\gamma + 838,7\mu - 612,5\lambda.$$

Значения функций $\gamma, \delta, \lambda, \mu$ и функций Z_i для различных ξ приводятся в табл. 38—40 (значения функций даны через 0,5 м).

Таблица 38

Значения гиперболо-тригонометрических функций $\gamma, \delta, \lambda, \mu$ при различных ξ

ξ	0,5000	0,4286	0,5771	0,2857	0,2173	0,1489	0,0714	0
γ	1,1074	0,7749	0,5155	0,3181	0,1738	0,0756	0,0187	0
δ	2,3463	1,1571	0,3623	0,7664	0,5719	0,3795	0,1891	0
λ	1,2770	0,9540	0,6990	0,4981	0,3388	0,2096	0,0999	0
μ	1,5520	1,4245	1,3050	1,2002	1,1146	1,0516	1,0130	1



Фиг. 41. График перемещений точек поверхностей цилиндрического архитрава:
а — 1,07 мм; б — 1,98; в — 0,28; г — 0,52 мм; 1 — нагрузка.

Таблица 39

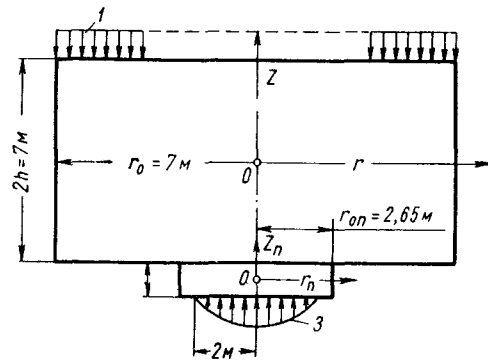
Значения функций Z_i при $\xi = 0 \div 0,5$

Z_1	-719,0	-651,8	-524,9	-352,4	-145,3	+88,76	344,9	612,5
Z_2	2595	2051	1585	1180	819,0	484,4	159,1	-174,9
Z_3	-1406	-1502	-1569	-1621	-1672	-1730	-1802	-1892
Z_4	2379	1874	1473	1169	956,0	830,2	790,5	838,6

Значения функций Z_i при $\zeta = -0,5 \div 0$

ζ	-0,500	-0,4286	-0,3571	-0,2857	-0,2143	-0,1489	-0,0714
Z_1	2233	2126	1943	1711	1450	1173	892,8
Z_2	-4495	-3490	-2673	-1990	-1422	-941,0	-536,3
Z_3	-2608	-2586	-2503	-2386	-2253	-2121	-1999
Z_4	4014	3447	2665	2047	1571	1220	917,9

перемещения и напряжения цилиндрического архитрава от самоуравновешенной нагрузки по торцам. Эпюры напряжений σ , при $\zeta = \pm 1$ показаны на фиг. 40. График перемещений точек поверхностей архитрава изображен на фиг. 41.



Фиг. 42. Схема нагружения цилиндрического архитрава и подштамповой плиты:

1 — $q = 503 \text{ т/м}^2$; 2 — $2h_n = 1,2 \text{ м}$; 3 — $q_{\max} = 8300 \text{ т/м}^2$.

Расчет ведем в первом приближении, т. е. с точностью до первых членов последовательностей моментов. Параметры цилиндрического архитрава:

$$r^0 = 7 \text{ м}; \quad h = 3,5 \text{ м}; \quad \nu = 0,15; \quad E_\delta = 4 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2.$$

Параметры железобетонной подштамповой плиты:

$$r^0 = 2,65 \text{ м}; \quad h = 0,6 \text{ м}; \quad \nu = 0,15; \quad E_\delta = 4 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2.$$

Схема нагружения конструкций показана на фиг. 42.

На верхнем торце цилиндрического архитрава при $\zeta = 0,5$ приложена равномерно распределенная по кольцу нагрузка

интенсивностью 503 т/м^2 . Эта нагрузка создается реактивным давлением анкеров продольной арматуры станины цилиндрического пресса.

На нижнем торце подштамповой плиты приложена нагрузка от воздействия подштампового металлического блока. Закон распределения этой нагрузки принят по квадратной параболе. Максимальная интенсивность нагрузки 8300 т/м^2 . Нагрузка распределена по кругу радиусом 2 м . Суммарное усилие, равное объему эпюры нагрузки, составляет $52 \cdot 200 \text{ тн}$. Этой же величине равен объем эпюры нагрузки, распределенной по верхнему торцу цилиндрического архитрава.

Сначала рассчитаем цилиндрический архитрав и подштамповую плиту на действие единичного момента, приложенного к одному из торцов. Расчет ведем по формулам (226) при $n = 1$, т. е. с использованием первого однородного решения для сплошного цилиндра.

Граничные условия на торцах цилиндрического архитрава имеют вид:

$$\zeta = 0,5 \quad r_0^3 \int_0^1 \sigma_z \varrho^2 d\varrho = a; \quad r_0^2 \int_0^1 \tau_{rz} \varrho d\varrho = 0;$$

$$\zeta = -0,5 \quad r_0^3 \int_0^1 \sigma_z \varrho^2 d\varrho = 0; \quad r_0^2 \int_0^1 \tau_{rz} \varrho d\varrho = 0.$$

Подставив в граничные условия формулы (226), перепишем их в виде

$$M_1 Z_1 + M_2 Z_2 = \frac{a}{r_0^3}; \quad T_1 Z_3 + T_2 Z_4 = 0; \quad (239)$$

$$M_1 \bar{Z}_1 + M_2 \bar{Z}_2 = 0; \quad T_1 \bar{Z}_3 + T_2 \bar{Z}_4 = 0.$$

Здесь обозначено:

$$M_1 = \int_0^1 R_9 \varrho^2 d\varrho; \quad M_2 = \int_0^1 R_{10} \varrho^2 d\varrho; \quad (240)$$

$$T_1 = \int_0^1 R_{11} \varrho d\varrho; \quad T_2 = \int_0^1 R_{12} \varrho d\varrho.$$

Функции Z_i при $\zeta = -0,5$ отмечены чертой сверху. Значения функций R_i даны в табл. 30. Интегралы (240) можно найти численным методом, заменив их суммами.

$$M_1 = 0,04086; \quad M_2 = 0,002345; \quad T_1 = 0,1055; \quad T_2 = 0,06232.$$

Для первого однородного решения

$$\bar{a} = 2,645; \quad \bar{b} = 1,377.$$

Вычислив значения гипербола-тригонометрических функций (227) при $\zeta = \pm 0,5$, получим для определения четырех

произвольных постоянных C_i систему из четырех линейных уравнений. Если сложить, а затем вычесть попарно первое и третье, а затем второе и четвертое уравнения, то система распадается на две системы по два уравнения с двумя неизвестными:

$$2(0,04890C_1 + 0,06081C_4) = \frac{a}{r_0^3};$$

$$2(0,2186C_1 + 0,06245C_4) = 0;$$

$$2(0,05201C_2 + 0,05533C_3) = \frac{a}{r_0^3};$$

$$2(0,09470C_2 + 0,2136C_3) = 0.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} r_0^3 C_1 &= -3,049a, & r_0^3 C_2 &= 18,20a; \\ r_0^3 C_3 &= -8,067a; & r_0^3 C_4 &= 10,67a. \end{aligned} \quad (241)$$

Зная произвольные постоянные, определим Z_i при $\zeta = \pm 0,5$:

$$\left. \begin{aligned} r_0^3 Z_1 &= 27,19a; & r_0^3 Z_2 &= -50,46a \\ r_0^3 Z_3 &= 29,50a; & r_0^3 Z_4 &= -50,26a \end{aligned} \right\} \zeta = 0,5;$$

$$\left. \begin{aligned} r_0^3 Z_1 &= -1,086a; & r_0^3 Z_2 &= 17,38a \\ r_0^3 Z_3 &= 8,637a; & r_0^3 Z_4 &= -14,98a \end{aligned} \right\} \zeta = -0,5. \quad (242)$$

Расчет цилиндрического архитрава на единичный момент, приложенный к нижнему торцу, при $\zeta = -0,5$ можно не производить, так как величины функций Z_i при этом по абсолютной величине не изменяются.

Функции Z_1 и Z_2 ведут себя при перемене направления координатной оси как четные функции, т. е. остаются без изменения. Функции Z_3 и Z_4 ведут себя в этом случае как нечетные функции и меняют знак на обратный. В этом легко убедиться, рассмотрев формулы (227).

По аналогии с (242) запишем значения функций Z_i при $\zeta = \pm 0,5$ при нагружении единичным моментом a нижнего торца цилиндрического архитрава.

$$\left. \begin{aligned} r_0^3 Z_1 &= -1,086a; & r_0^3 Z_2 &= 17,38a \\ r_0^3 Z_3 &= -8,637a; & r_0^3 Z_4 &= 14,98a \end{aligned} \right\} \zeta = 0,5;$$

$$\left. \begin{aligned} r_0^3 Z_1 &= 27,19a; & r_0^3 Z_2 &= -50,46a \\ r_0^3 Z_3 &= -29,5a; & r_0^3 Z_4 &= 50,26a \end{aligned} \right\} \zeta = -0,5. \quad (243)$$

Теперь сделаем такой же расчет для подштамповой плиты.

Граничные условия на торцах плиты запишутся аналогично уравнению (238) с той лишь разницей, что гиперболические функции вычисляются при

$$\zeta = \pm \frac{h}{r_0} = \pm \frac{0,600}{2,65} = \pm 0,226.$$

Запишем в окончательном виде системы уравнений для определения произвольных постоянных C_i :

$$\begin{cases} 2(0,01062C_1 + 0,004563C_4) = \frac{a}{r_{on}^3}; \\ 2(0,07607C_1 + 0,04114C_4) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(0,02386C_2 + 0,01626C_3) = \frac{a}{r_{on}^3}; \\ 2(0,1068C_2 + 0,09088C_3) = 0. \end{cases}$$

Находим произвольные постоянные

$$\begin{aligned} r_{on}^3 C_1 &= -6,779a; & r_{on}^3 C_2 &= 105,2a; \\ r_{on}^3 C_3 &= -123,6a; & r_{on}^3 C_4 &= 12,53a. \end{aligned} \quad (244)$$

Определим функции Z_i при $\zeta = \pm 0,226$:

$$\zeta = 0,226 \begin{cases} r_{on}^3 Z_1 = 28,99a; & r_{on}^3 Z_2 = -123,2a; \\ r_{on}^3 Z_3 = 100,2a; & r_{on}^3 Z_4 = -168,7a; \end{cases} \quad (245)$$

$$\zeta = -0,226 \begin{cases} r_{on}^3 Z_1 = -3,350a; & r_{on}^3 Z_2 = 103,0a; \\ r_{on}^3 Z_3 = -89,95a; & r_{on}^3 Z_4 = -151,3a. \end{cases}$$

Аналогичным способом найдем значения функций Z_i при действии единичного момента на нижнем торце подштамповой плиты.

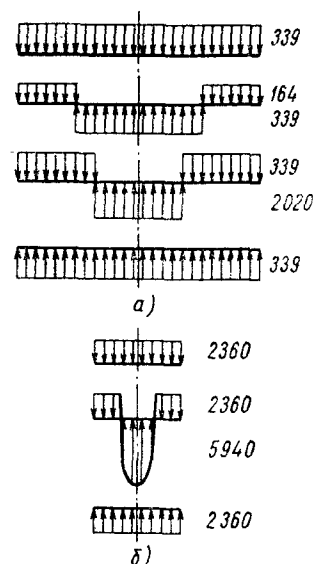
$$\left. \begin{aligned} r_{on}^3 Z_1 &= -3,350a; & r_{on}^3 Z_2 &= 103,0a \\ r_{on}^3 Z_3 &= 89,95a; & r_{on}^3 Z_4 &= 151,3a \end{aligned} \right\} \zeta = 0,226;$$

$$\left. \begin{aligned} r_{on}^3 Z_1 &= 28,99a; & r_{on}^3 Z_2 &= -123,2a \\ r_{on}^3 Z_3 &= -100,2a; & r_{on}^3 Z_4 &= 168,7a \end{aligned} \right\} \zeta = -0,226. \quad (246)$$

Имея значения функций Z_i от нагружения единичным моментом, нетрудно вычислить значения функций Z_i от воздействия на цилиндрический архитрав и плиту фактически приложенной нагрузки.

Для этого разобьем нагрузку на каждом торце цилиндрического архитрава и подштамповой плиты на сплошную, равномерно

распределенную и на самоуравновешенную нагрузку по каждому торцу. Расчет на сплошную равномерно распределенную нагрузку производится по элементарным формулам; напряжения и перемещения от воздействия этой нагрузки можно будет учесть отдельно. Расчет на самоуравновешенную нагрузку по каждому торцу



Фиг. 43. Разбивка нагрузки: а — на торцах цилиндрического архитрава; б — на подштамповой плите.

Для цилиндрического архитрава:

ζ	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
0,5	—704,4	2385	—1288	2213
—0,5	1934	—3944	—2270	3874

(247)

Для подштамповой плиты:

ζ	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
0,226	—1034	31770	—27750	46700
—0,226	8945	—38020	—30910	52040

(248)

Кроме внешней нагрузки, в зоне сопряжения приложен неизвестный момент a , поэтому окончательные величины функций Z_i

выполним, используя готовые данные расчета цилиндра на единичный момент. Разбивка нагрузки на торцах цилиндрического архитрава и подштамповой плиты показана на фиг. 43, а и б.

Находим численные значения моментов нагрузки. На верхнем торце цилиндрического архитрава при $\zeta = 0,5$

$$M_q = -23,22r_0^3 \text{ м/м}^2.$$

На нижнем торце при $\zeta = -0,5$

$$M_q = 70,20r_0^3 \text{ м/м}^2.$$

На нижнем торце подштамповой плиты при $\zeta = -0,226$

$$M_q = 308,6r_{0n}^3 \text{ м/м}^2.$$

Подставив моменты от нагрузки вместо величины a в формулы (242), (243), (245), (246), получим значения функций Z_i цилиндрического архитрава и подштамповой плиты при воздействии внешней нагрузки.

получим, прибавив к значениям Z_i по табл. (247) и (248) величины функций Z_i от действия единичного момента a . Воздействие единичного момента в зоне сопряжения учитывают формулы (243) для цилиндрического архитрава и формулы (245) для подштамповой плиты. Запишем окончательные значения функций Z_i .

Для цилиндрического архитрава:

ζ	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
0,5	$-704,4 - 1,086 \frac{a}{r_0^3}$	$2385 + 17,38 \frac{a}{r_0^3}$	$-1238 - 8,637 \frac{a}{r_0^3}$	$2213 + 14,98 \frac{a}{r_0^3}$
—0,5	$1934 + 27,19 \frac{a}{r_0^3}$	$-3944 - 50,46 \frac{a}{r_0^3}$	$-2270 - 29,50 \frac{a}{r_0^3}$	$3874 + 50,26 \frac{a}{r_0^3}$

(249)

Для подштамповой плиты:

ζ	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
0,226	$-1034 + 28,59 \frac{a}{r_0^3}$	$31770 - 123,2 \frac{a}{r_0^3}$	$-27750 + 100,2 \frac{a}{r_0^3}$	$46700 - 168,7 \frac{a}{r_0^3}$
—0,226	$8945 - 3,350 \frac{a}{r_0^3}$	$-38020 + 103,0 \frac{a}{r_0^3}$	$-30910 + 89,95 \frac{a}{r_0^3}$	$52040 - 151,3 \frac{a}{r_0^3}$

(250)

Величину a определим из условий сопряжения, приравняв в сопряжении моменты производных от функций u_z .

Ввиду того, что расчет производится с точностью до первого момента, в зоне сопряжения приравниваются средние значения производных вертикального перемещения u_z

$$r_{0n} \int_0^{0,379} u'_{z\theta} d\theta = r_{0n} \int_0^1 u'_{zn} d\theta. \quad (251)$$

Подставив в уравнение (251) выражение u_z по формулам (226), перепишем его в виде

$$r_{0n} \{ Z_3^n [R_1(0,379) - R_1(0)] + Z_4^n [R_2(0,379) - R_2(0)] \} = r_{0n} \{ Z_3^n [R_1(1) - R_1(0)] + Z_4^n [R_2(1) - R_2(0)] \}. \quad (252)$$

Значения R_1 и R_2 возьмем из табл. 30. Значения функций Z_i подставим для цилиндрического архитрава из (249) при $\zeta = -0,5$, для подштамповой плиты из (250) при $\zeta = 0,226$. В результате получим линейное уравнение для определения неизвестного момента a в сопряжении. Решив его, получим $a = 4810 \text{ мм}$. При расчете цилиндрического архитрава к моменту от контактных напряжений в сопряжении следует прибавить момент от внешней нагрузки $M_q = 70,2r_0^3 \text{ м/м}^2$.

Суммарный момент при $\zeta = -0,5$

$$\left(\frac{4810}{343} + 70,2\right)r_0^3 = 84,2r_0^3 \text{ м/м}^2.$$

Цилиндрический архитрав рассчитывается при следующих граничных условиях:

$$\zeta = 0,5 \quad r_0^3 \int_0^1 \sigma_z \varrho^2 d\varrho = -23,29r_0^3 \text{ м/м}^2;$$

$$r_0^2 \int_0^1 \tau_{rz} \varrho d\varrho = 0;$$

$$\zeta = -0,5 \quad r_0^3 \int_0^1 \sigma_z \varrho^2 d\varrho = 84,2r_0^3 \text{ м/м}^2; \quad r_0^2 \int_0^1 \tau_{rz} \varrho d\varrho = 0.$$

Граничные условия для подштамповой плиты будут

$$\zeta = 0,226 \quad r_{on}^3 \int_0^1 \sigma_z \varrho^2 d\varrho = 259r_0^3 \text{ м/м}^2; \quad r_0^2 \int_0^1 \tau_{rz} \varrho d\varrho = 0,$$

$$\zeta = -0,226 \quad r_{on}^3 \int_0^1 \sigma_z \varrho^2 d\varrho = 308,6r_0^3 \text{ м/м}^2; \quad r_0^2 \int_0^1 \tau_{rz} \varrho d\varrho = 0.$$

Для определения произвольных постоянных, входящих в функции Z_i , воспользуемся выполненным уже расчетом цилиндрического архитрава и подштамповой плиты на единичный момент a . Произвольные постоянные при действии на цилиндрический архитрав единичного момента на верхнем торце ($\zeta = 0,5$) определены ранее. При действии единичного момента на нижнем торце ($\zeta = -0,5$) произвольные постоянные C_2 и C_3 меняют знаки на обратные. Подставив в выражения (241) вместо величины a сначала $-r_0^3 \cdot 23,29 \text{ м/м}^2$, затем $r_0^3 \cdot 84,2 \text{ м/м}^2$ и сложив результаты с учетом сделанного выше замечания относительно знаков, получим окончательные значения произвольных постоянных для цилиндрического архитрава:

$$C_1 = -186 \text{ м/м}^2, \quad C_2 = -1955 \text{ м/м}^2,$$

$$C_3 = 867 \text{ м/м}^2; \quad C_4 = 650 \text{ м/м}^2.$$

При вычислении произвольных постоянных для подштамповой плиты воспользуемся выражениями (244):

$$C_1 = -3860 \text{ м/м}^2; \quad C_2 = 5260 \text{ м/м}^2;$$

$$C_3 = 6180 \text{ м/м}^2; \quad C_4 = 7120 \text{ м/м}^2$$

Имея произвольные постоянные, по формулам (227) найдем значения функций Z_i при любом ζ , как для цилиндрического архи-

трава, так и для подштамповой плиты. Значения функций Z_i приведены в табл. 41 и 42. Графики функций показаны на фиг. 44.

Таблица 41

Значения функций Z_i цилиндрического архитрава (м/м²)

ζ	0,5	0,4	0,3	0,226	0,1	0	-0,1	-0,226	-0,3	-0,4	-0,5
Z_1	-715	-592	-381	-170,5	264	648	1050	1560	1829	2126	2307
Z_2	2648	1895	1285	898,5	292,6	-185,1	-719,6	-1569	-2193	-3257	-4654
Z_3	-1429	-1569	-1652	-1708	-1824	-1952	-2114	-2358	-2494	-2645	-2693
Z_4	2422	1731	1248	1010	817,9	865,6	1100	1705	2238	3221	4572

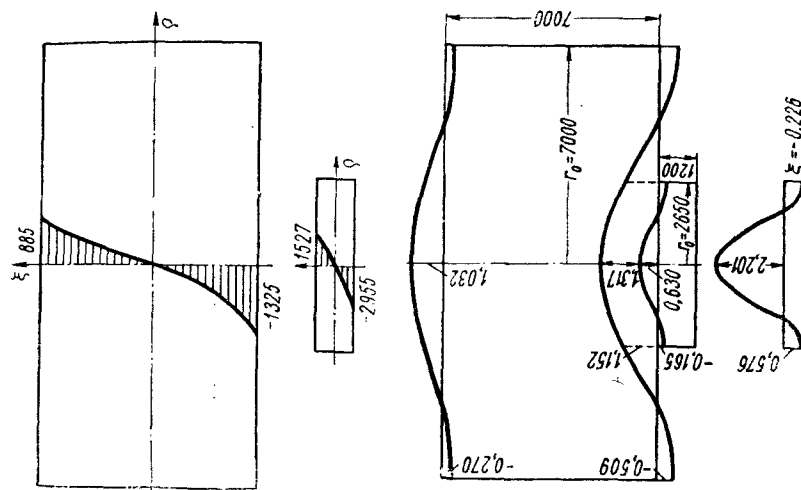
Таблица 42

Значения функций Z_i подштамповой плиты (м/м²)

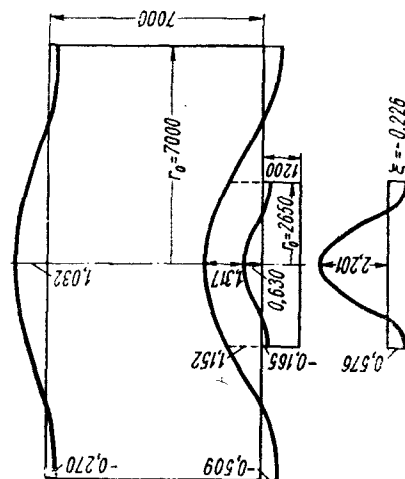
ζ	0,226	0	-0,226
Z_1	6183	7049	8 231
Z_2	524	-3812	-11 870
Z_3	-2309	-5770	-8 061
Z_4	3905	6780	13 640

Дальнейший расчет производим по формулам (226) при $n = 1$. Формулы (226) будут теперь содержать все известные функции, и определить перемещение и напряжение в любой точке цилиндрического архитрава или подштамповой плиты не представляет затруднений. Ниже приводятся таблицы величин напряжений и перемещений в различных точках цилиндрического архитрава и подштамповой плиты. Эпюры показаны на фиг. 45 и 46.

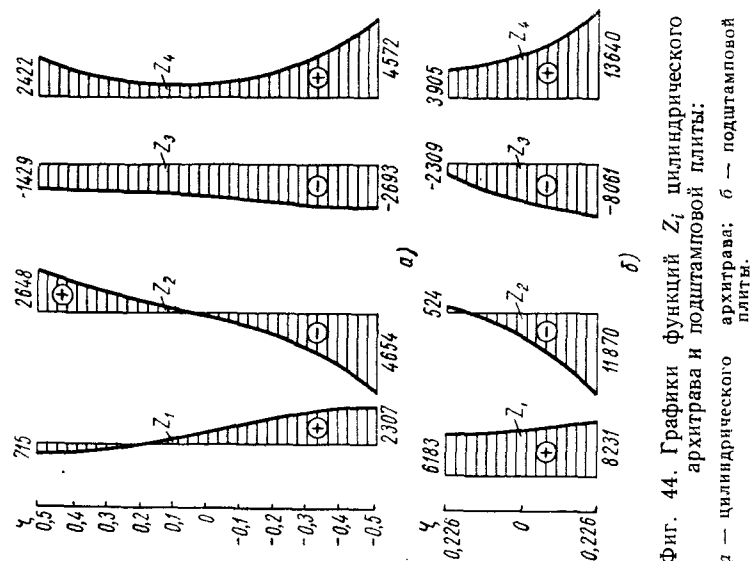
Интересно отметить, что подштамповая железобетонная плита очень мало снижает момент, действующий на цилиндрический архитрав. Если приложить нагрузку без подштамповой плиты прямо к цилиндрическому архитраву, то момент от нее будет $M_q = 87,2r_0^3 \text{ м/м}^2$ вместо $84,2r_0^3 \text{ м/м}^2$ по проделанному расчету. Разница составляет всего 3,6%. Следовательно, при данных соотношениях размеров цилиндрического архитрава и подштамповой плиты сначала можно рассчитать цилиндрический архитрав на внешнюю нагрузку, исходя из предположения, что жесткость подштамповой плиты равна нулю, а затем рассчитать подштамповую плиту. При расчете подштамповой плиты граничные условия



Фиг. 45. Напряжения σ_r цилиндрического архитрава и подштамповой плиты.



Фиг. 46. Перемещения точек торцевых поверхностей цилиндрического архитрава и подштамповой плиты.



Фиг. 44. Графики функций Z_i цилиндрического архитрава и подштамповой плиты:
а — цилиндрического архитрава; б — подштамповой плиты.

на торцах будут смешанные. По нижнему торцу будет задан момент от внешней нагрузки, по верхнему торцу — перемещение u_z , при которых форма поверхности подштамповой плиты в зоне сопряжения будет совпадать с формой поверхности цилиндрического архитрава.

Напряжения σ_z цилиндрического архитрава (в т/м^2):

ξ \ η	0,5	0,4	0,3	0,226	0,1	0	0,1	-0,226	-0,3	-0,4	-0,5
0	-389	-317	-339	-406	-593	-769	-945	-1079	-1193	-1180	-1052
0,2	-300	-259	-298	-373	-557	-730	-905	-1099	-1173	-1196	-1088
0,4	-127	-145	-217	-295	-500	-614	-771	-964	-1059	-1153	-1185
0,6	-50	-123	-195	-249	-380	-429	-517	-643	-742	-840	-969
0,8	-332	-352	-343	-321	-262	-207	-151	-90	70	-70	-117
1,0	-1068	-897	-708	-554	-265	-75	245	606	823	1060	-1416

Перемещения u_z подштамповой плиты (в мм):

ξ \ η	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,226	0,630	0,554	0,348	0,084	-0,127	-0,165
-0,226	2,201	1,933	1,214	0,295	-0,445	-0,576

Перемещения u_z цилиндрического архитрава (в мм):

ξ \ η	0	0,2	0,3	0,379	0,6	0,8	1,0
0,5	1,032	0,906	0,758	0,610	0,138	-0,208	-0,270
-0,5	1,947	1,710	1,430	1,152	0,261	-0,393	-0,509

Для сравнения приведем расчет сопряжения цилиндрического архитрава со стальной подштамповой плитой, имеющей те же размеры, что и железобетонная.

Параметры стальной подштамповой плиты

$$\nu = 0,30; E_c = 20 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2.$$

Схема нагружения остается прежней.

Действительная часть и коэффициент при мнимой части корня первого однородного решения для стального цилиндра будут:

$$\bar{a} = 2,722; \bar{b} = 1,362.$$

Соответственно изменяются значения гипербола-тригонометрических функций:

$$\gamma = 0,1984; \delta = 0,6240; \lambda = 3621; \mu = 1,139.$$

Приведем окончательные значения функций Z_i для стальной подштамповой плиты.

ξ	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
0,226	$130 + 25,36 \frac{a}{r_0^3}$	$27040 - 110,2 \frac{a}{r_0^3}$	$-21400 + 79,1 \frac{a}{r_0^3}$	$40800 - 150,8 \frac{a}{r_0^3}$
-0,226	$7826 + 0,42 \frac{a}{r_0^3}$	$-34010 + 87,63 \frac{a}{r_0^3}$	$-24410 + 69,36 \frac{a}{r_0^3}$	$46540 - 132,2 \frac{a}{r_0^3}$

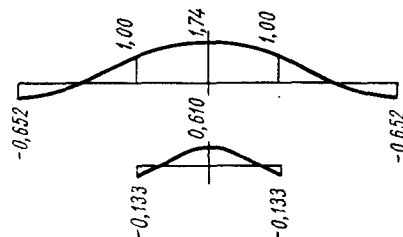
Величину a определим из уравнения (252), правую часть которого умножим на соотношение модулей упругости и коэффициентов Пуассона для бетона и стали, равное

$$k_1 = \frac{(1 + \nu_c) E_\delta}{(1 + \nu_\delta) E_c} = \frac{1,30 \cdot 4 \cdot 10^6}{1,15 \cdot 20 \cdot 10^6} = 0,226.$$

Решив уравнение, получим $a = 2798$.

Подставив найденное значение a в (249) и (253), вычислим окончательные значения функций Z_i для цилиндрического архитрава и стальной подштамповой плиты.

Цилиндрический архитрав:



ξ	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
0,5	-713,2	2527	-1358	-2335
-0,5	2156	-4356	-2510	4284

Стальная плита:

ξ	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
0,226	3941	10480	-9510	18140
-0,226	7889	-20840	-13990	26670

Фиг. 47. Вертикальные перемещения железобетонного цилиндрического архитрава и стальной подштамповой плиты в зоне сопряжения.

Имея значения функций Z_i , нетрудно вычислить напряжения и перемещения железобетонного архитрава и стальной подштам-

повой плиты в зоне сопряжения от самоуравновешенной нагрузки.

Эпюры вертикальных перемещений цилиндрического архитрава и стальной подштамповой плиты в зоне сопряжения показаны на фиг. 47.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, Т. 6, в. 2, 3, 1942.
2. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехтеориздат, 1955.
3. Власов В. З. Метод начальных функций в задачах теории упругости. Изв. АН СССР, ОТН № 7, 1955.
4. Уманский Э. С., Квитка А. Л., Агарев В. А. Метод начальных функций в осесимметричной задаче теории упругости. Изв. АН УССР, 1958, № 11.
5. Власов В. В. Метод начальных функций в осесимметричной задаче теории упругости. Изв. АН СССР, ОТН № 5, 1960.
6. Коренев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. Физматгиз, 1960.
7. Деев В. М. О формах общего решения пространственной задачи теории упругости, выраженных при помощи гармонических функций. ПММ, Т. 26, 1959, № 6.
8. Галеркин Б. Г. Упругое равновесие полого кругового цилиндра и части цилиндра. Собрание сочинений, Т. 1, Физматгиз, 1952.
9. Милейковский И. Е. Расчет массивных плит вариационным методом с применением разрешающих функций для перемещений. Исследования по вопросам пластичности и прочности строительных конструкций. Сб. ЦНИИСК, 1958.
10. Прокопов В. К. Равновесие упругого толстостенного осесимметричного цилиндра. ПММ, Т. 13, 1949, № 2.
11. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, 1959.
12. Тимошенко С. П. Теория упругости. Гостехтеориздат, 1934.
13. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
14. Снеддон И. Преобразования Фурье. Упругие колебания толстостенных цилиндров и сфер. Физматгиз, 1955.
15. Ватсон Н. Г. Теория бесселевых функций. Ч. 1 и 2. Изд. иностр. лит., 1949.
16. Прокопов В. К. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра. Труды Ленинградского политехнического института, 1950, № 2.
17. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. «Балки, плиты и оболочки на упругом основании». Физматгиз, 1960.
18. Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г. Принцип Сен-Венана и его использование в теории плит и оболочек. Расчет пространственных конструкций. Машгиз, 1953.
19. Люстерник Л. А., Акушинский И. Я., Диткин В. А. Таблицы бесселевых функций. Гостехиздат, 1949.

Инженеры **БРАЙЛОВСКИЙ М. И., АСТРОВА Т. И.**

ЭКСПРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТАНИН ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ДЛЯ КУЗНЕЧНО-ПРЕССОВЫХ МАШИН И ДРУГОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Для кузнечно-прессовых машин с базовыми деталями из железобетона в ряде случаев станины целесообразно выполнять в виде пустотелого цилиндра с толстыми днищами, изготовленного из железобетона с напрягаемой арматурой. При этом усилие прессования, развиваемое механическими узлами пресса, воспринимается предварительно напряженной железобетонной конструкцией станины.

Цилиндрические станины могут быть применены для прессов, в которых условия эксплуатации не вызывают необходимости обслуживания машины в процессе работы, не требуют открытых технологических подходов и кругового обзора штамповой зоны пресса.

Конструкция станины удобна с точки зрения выполнения ее в железобетоне с напрягаемой арматурой. Применением высокопрочного бетона (марок «400»—«600») и арматуры с высоким пределом прочности (до 15 000—18 000 кг/см²) могут быть обеспечены минимальные габариты и достаточно малый вес пресса в целом. Например, обжимной пресс усилием 800 т состоит из четырех монтажных элементов: двух архитравов — верхнего и нижнего и двух стенок (фиг. 1). Вес каждого элемента не превышает 5,5 т.

Размеры пресса обусловлены в основном размещением механических узлов пресса (трех цилиндров, траверсы) и штамповой зоны.

Габариты пресса в плане равны 1,8 × 1,8 м, высота 5,7 м.

В сравнении с аналогичным прессом в металлическом исполнении, вес станины которого по данным ВНИИМЕТМАШа составляет 20 т, габариты пресса в плане и вес железобетонной станины не увеличиваются; металла требуется в 3,3 раза меньше и стоимость изготовления почти в 6 раз ниже.

Таким образом, применение железобетонных цилиндрических станин с напрягаемой арматурой для прессов различного назначения дает значительный технико-экономический эффект.

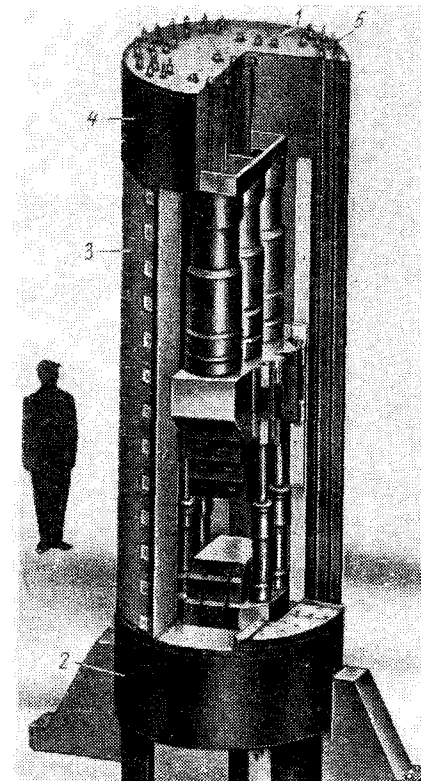
При проектировании станины в первую очередь должна быть обеспечена заданная несущая способность и долговечность конструкции, определяемые расчетом на прочность и выносливость. Кроме того, в эксплуатационной стадии величина упругих и остаточных деформаций не должна превышать пределов, установленных техническими условиями.

Принятая форма цилиндрической станины обеспечивает достаточную жесткость конструкции при работе ее на продольные и поперечные усилия, возникающие при штамповании или других рабочих процессах. Однако для назначения рациональных размеров и армирования элементов станины необходимо иметь способы оценки прочности и жесткости конструкции.

К настоящему времени не имеется методики расчета элементов такой сложной формы на заданную схему загрузки. Разработка метода расчета сама по себе является сложной задачей теории упругости. В применении к железобетонной конструкции эта задача еще более усложняется наличием двух совместно работающих материалов (бетона и арматуры) и особыми свойствами бетона (неупругость, анизотропность, неоднородность структуры).

Задача может быть несколько упрощена путем разделения станины на отдельные элементы.

Основными деталями цилиндрической станины являются архитравы (верхний и нижний) и стены (фиг. 1). Совместная работа

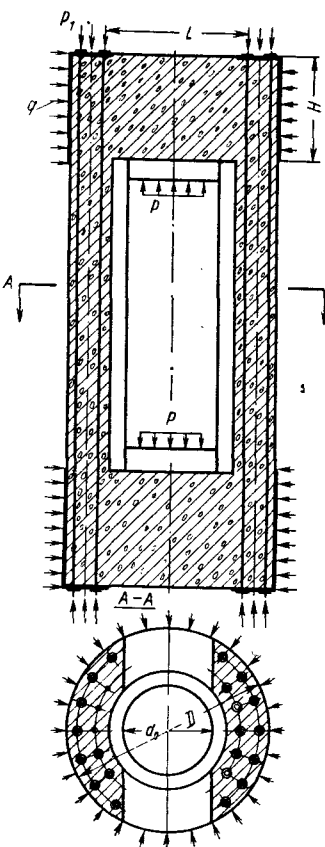


Фиг. 1. Обжимной пресс ПЖБ-800 усилием 800 т с цилиндрической станией, выполняемой из предварительно напряженного железобетона:

1 — верхний архитрав; 2 — нижний архитрав;
3 — стенка; 4 — напрягаемая поперечная обвязка архитравов; 5 — напрягаемая рабочая арматура.

элементов станины обеспечивается установкой напрягаемой стальной арматуры из стержней и проволоки, натяжение которых осуществляется после затвердения бетона.

Массивные железобетонные станины прессов цилиндрической формы при эксплуатации находятся в условиях сложного напряженного состояния (фиг. 2).



Фиг. 2. Схема нагрузок на цилиндрическую станину прессы:

p — рабочее усилие; p_r — давление продольной рабочей арматуры; q — давление поперечной напрягаемой ободки.

При действии эксплуатационного усилия стены станины работают на растяжение при наличии некоторого эксцентриситета приложения равнодействующей.

Архитравы находятся в более сложных условиях. Эксплуатационное усилие прессы передается на нагружаемую поверхность архитрава через пирамиду штампов, распределяющих давление до величины, безопасной для железобетона.

С противоположной стороны на опорной плоскости архитрава возникает реактивное давление анкеров продольной напряженной рабочей арматуры, передаваемое на бетон через толстые металлические шайбы, распределяющие давление.

На боковой поверхности архитрава имеет место давление поперечной напрягаемой арматуры.

Реактивные усилия вызваны натяжением арматуры и действуют на бетон конструкции постоянно, увеличиваясь в момент работы прессы до максимального значения.

В цилиндрических станинах архитравы выполняются в виде круглых или эллиптических железобетонных плит большой толщины, армированных в направлении, перпендикулярном действию усилия прессы и напрягаемой арматуры, расположенной по контуру плиты.

При этом обеспечиваются:

малые габариты деталей (ввиду применения высокопрочных бетона и стали);

малый расход материалов и снижение веса конструкции;

достаточно высокая жесткость архитрава и всей конструкции станины.

Указанные качества позволяют широко применять подобные конструкции в машиностроении не только для архитравов прессов, но и для таких сильно нагруженных деталей оборудования, как головки растяжной машины, подвижные траверсы, подштамповые плиты и др.

В этих случаях железобетонные элементы машин работают как толстая плита, опертая по контуру или части контура и нагруженная центрально или эксцентрично приложенной многократно повторяющейся нагрузкой. Иногда (в архитравах со встроенными силовыми гидроцилиндрами или зажимными устройствами растяжной машины) эти плиты ослаблены центрально-расположенным отверстием и воспринимают дополнительную, радиально-направленную нагрузку.

Стенка станины представляет собой внецентренно растянутую железобетонную конструкцию, соединенную с архитравами напрягаемой продольной арматурой. Сечение стен определяется в основном возможностью расстановки необходимой растянутой продольной арматуры станины, которая должна воспринимать рабочее усилие прессования. Для расчета стен могут быть полностью использованы положения «Строительных норм и правил» ч. II, разд. В, гл. I. «Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования». Архитравы станин являются наиболее тяжело нагруженными элементами. Их прочность и жесткость должны быть достаточны, чтобы передать рабочее усилие прессы на несущие растянутые стены станины.

Величина рабочего усилия в большинстве случаев такова, что давление p на бетон архитрава, распределенное подштамповой плитой, достигает величин, значительно превышающих кубиковую прочность бетона.

При нагружении в архитраве возникает сложное напряженное состояние, которое видоизменяется в зависимости от геометрических размеров, вида и прочности материалов выбранной конструкции и других факторов.

Поскольку бетон имеет малую прочность при растяжении, конструкции архитрава и схема распределения усилий при нагружении должны исключить появление значительных удлинений бетона, превышающих деформации предварительного обжатия.

Архитравы цилиндрической формы, выполненные в железобетоне с напрягаемой арматурой, не могут быть рассчитаны с применением какой-либо известной методики расчета плит, так как отличаются значительной толщиной по сравнению с пролетом ($\frac{H}{D} \gg 0,2$).

Для определения напряжений и деформаций нагружаемого объемного пространственного тела из упруго работающего материала существует методика расчета, разработанная инж. Гохбаумом Ф. А.

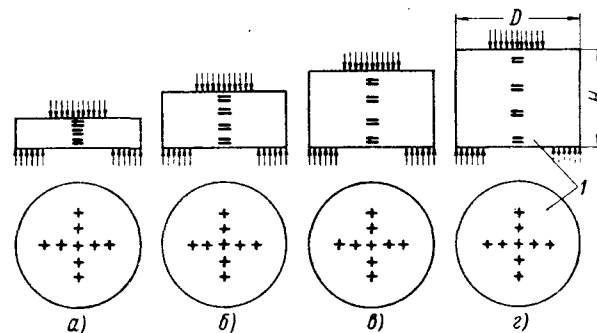
Таким образом, имеется возможность рассчитать жесткость элемента и величину нормальных и касательных напряжений, возникающих на стадии нагружения, когда доля пластических деформаций материала мала.

Однако для расчета общей несущей способности железобетонной, предварительно напряженной, цилиндрической толстой плиты до сих пор не имеется каких-либо предложений.

Для разработки методики расчета такого сложного элемента необходимо иметь достаточные опытные данные, которые могут быть положены в основу теоретических исследований.

Исследование несущей способности железобетонных толстых плит с напрягаемой арматурой, являющихся элементом железобетонных станин

В течение 1958—1961 гг. в лаборатории железобетонных конструкций для машиностроения НИИЖБ были проведены экспериментальные исследования толстых железобетонных плит с напрягаемой арматурой для определения влияния на несущую способ-



Фиг. 3. Схемы образцов серии КПБ и КПО:

$a - \frac{H}{D} = 0,2$; $b - \frac{H}{D} = 0,4$; $c - \frac{H}{D} = 0,6$; $d - \frac{H}{D} = 0,8$;
1 — датчики.

ность и жесткость плиты некоторых, наиболее важных факторов. Испытания плит производили как на статическое (до разрушения), так и на многократно повторные загрузки (для определения общего предела выносливости конструкции).

Конструкция образцов, методика изготовления и испытания. Для исследования были приняты образцы в виде круглого в плане бетонного цилиндра, на боковую поверхность которого с напряжением навивалась проволока в один или несколько слоев, что позволяло создавать необходимое расчетное боковое обжатие бетона. Образцы с размещением тензодатчиков и схемой нагрузки показаны на фиг. 3.

Испытывались две серии образцов: КПБ (круглые бетонные плиты с напрягаемой арматурой) и КПО (те же плиты, отличающиеся величиной бокового обжатия). Размеры образцов, а также количество слоев напряженной обмотки и степень обжатия бетона приведены при описании результатов испытания каждой серии образцов.

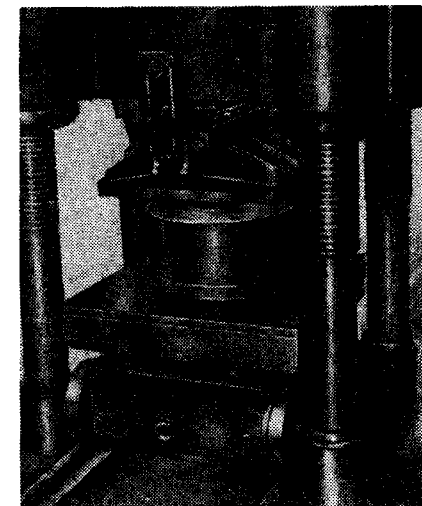
При испытании образцы устанавливали в пресс (фиг. 4) на опорное металлическое кольцо, максимальный диаметр которого был равен наружному диаметру образца. Нагрузку передавали через жесткий металлический штамп. Конструкция и схема нагружения были выбраны наиболее простыми, поскольку предполагалось провести испытание большого числа образцов (свыше 100 шт.).

При центральном приложении нагрузки через жесткий штамп и опирания на кольцо с подливкой цементным раствором была получена наиболее простая и ясная схема передачи усилий с минимальным количеством факторов, влияющих на результаты испытания.

Сравнение фиг. 2 и 3 показывает, что конструкция образцов и схемы испытания несколько отличаются от природы по размерам и схеме действительного распределения действующих на архитрав усилий. При испытании образца-плиты не моделируются остающиеся давление стен станины, площадь и характер опирания (по кольцу — в образце, и на сегментах — в станине), сжатие опорных участков плиты напрягаемой продольной арматурой и ряд других особенностей.

Размеры образцов по отношению к натуре в 2—3 раза меньше.

Однако, предполагая, что имеющиеся различия не могут значительно сказаться на результатах испытания, для большинства образцов отказались от более точного моделирования, а влияние неучтенных факторов проверяли на специальных образцах. Для этой цели были проведены испытания дополнительных серий образцов при опирании на сегменты, а также при исключении на опорах сил трения.



Фиг. 4. Установка образцов серий КПБ и КПО в прессе для испытания.

Образцы изготавливали в металлической или деревянной опалубке, стены которой перед бетонированием смазывали изолирующей смазкой.

Для приготовления бетона применяли цемент марки «500» Белгородского завода, щебень в большинстве случаев известняковый крупностью до 20 мм, песок чистый, горный.

Перемешивание бетонной смеси производили в бетономешалке свободного падения емкостью 250 л. Укладывали бетон в формы при помощи обычной переносной вибробулавы.

Изготовленные образцы хранили во влажных опилках в течение 6—7 дней, а затем — в условиях воздушного режима. Температура при изготовлении и хранении образцов изменялась от 15 до 20°С.

Прочность бетона при сжатии и модуль упругости материала определяли стандартным способом, путем испытания контрольных кубов размером 20 × 20 × 20 см и призм размером 20 × 20 × 60 см.

Одновременно с образцами из общего замеса изготавливали и хранили в тех же условиях контрольные бетонные кубы и призмы.

Измерение деформации бетона призм производили при помощи механических рычажных тензометров.

Испытание контрольных призм осуществляли для бетона в возрасте 3; 7; 14 и 28 дней, а для некоторых образцов — в день наливки напряженной арматуры и в день испытания. Это позволяло определить изменение деформативности бетона в зависимости от нарастания прочности, устанавливаемой по одновременному испытанию контрольных кубов.

Примерно через 15—28 дней после изготовления образцов на их боковую поверхность наматывали стальную проволоку диаметром 4—5 мм (ГОСТ 7348-55) с напряжением в ней от 4500 до 6000 кг/см². Для наливки использовали стандартную намоточную машину ДН-5.

Испытание проводили на испытательном прессе «1000» или на горизонтальной машине «1500/3000».

Во время наливки напрягаемой проволоки и при испытании измеряли радиальные, тангенциальные и осевые деформации бетона, а также осевые деформации проволоки. На некоторых образцах измеряли контактное смятие бетона и общий прогиб под штампом.

Измерения деформаций бетона и проволоки проводили при помощи наружных и глубинных тензодатчиков; величину натяжения проволоки во время наливки определяли измерительной скобой с индикатором.

При помощи прогибомеров системы Максимова и индикаторов часового типа с ценой деления 0,01 мм измеряли общие деформации образцов. Во время испытания визуально определяли

момент появления трещин в бетоне на доступных осмотру поверхностях и отмечали максимальную нагрузку, при которой началось разрушение образца. Предельная разрушающая нагрузка фиксировалась по силоизмерительной шкале испытательного пресса и определялась моментом начала уменьшения нагрузки при непрекращающейся подкачке масла в силовой цилиндр пресса.

Влияние некоторых факторов на несущую способность образцов-плит. На несущую способность образцов влияют: высота плиты H ; диаметр d_0 штампа, передающего нагрузку; рабочий пролет l плиты (равный условному внутреннему диаметру опорного кольца); марка бетона; величина предварительного обжатия q ; способ опирания (по кольцу, по части кольца, с трением и без него).

Влияние высоты образца, диаметра штампа и опорного кольца. Для изучения влияния высоты плиты, диаметра штампа и рабочего пролета провели испытание 42 образцов-плит серии КПБ. Железобетонные толстые плиты этой серии были изготовлены из бетона марок: «500», «600» и «700». Кубиковая прочность бетона изменялась в пределах 495—709 кг/см².

Все образцы имели практически одинаковый диаметр D , равный 50 см, и высоту H , равную примерно 10; 20; 30 и 40 см. Фактические размеры плит приведены в табл. 1.

Армирование имело вид спирали из высокопрочной арматурной проволоки диаметром 4 мм, навиваемой на наружную боковую поверхность плит. Фактический предел прочности проволоки изменялся от 17 400 до 20 700 кг/см². По механическим свойствам проволока отвечала требованиям ГОСТ 7348-55.

Навивку проволоки на образец проводили непосредственно перед испытанием машиной ДН-5. В проволоке создавали напряжение растяжения порядка 6000—6300 кг/см², а в бетоне образца — сжатие величиной до 60 кг/см² (с учетом потерь). При этом объемный коэффициент армирования (вычисленный как отношение объема металла к объему бетона $\mu = \frac{V_{np}}{V_{бет}}$) был равен 0,025 (2,5%).

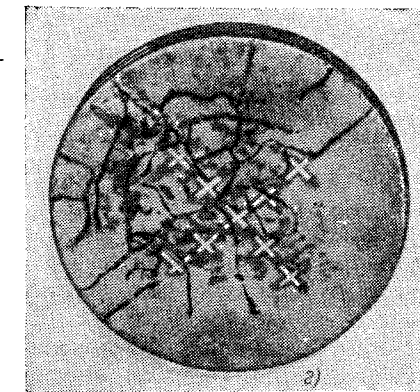
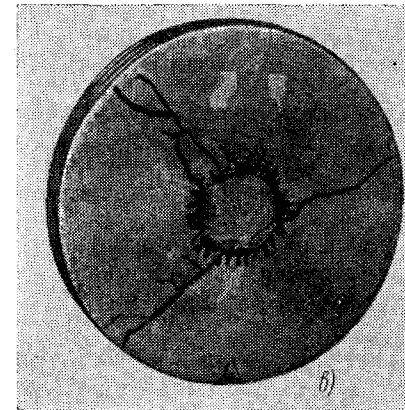
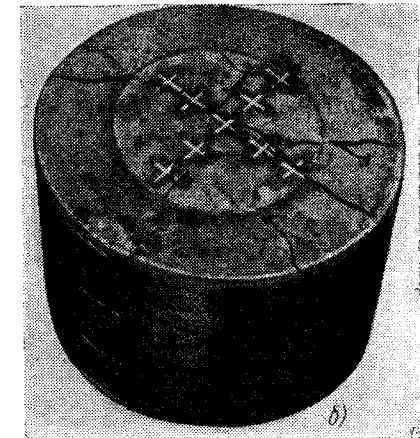
Испытание проводили на жестком металлическом кольце, внутренний диаметр которого $d_{вн} = 30$ см был условно принят за рабочий пролет плиты l . При этом отношение высоты к пролету $\frac{H}{l}$ для различных образцов серии было принято равным 0,33; 0,67; 1,0 и 1,33.

Образцы одинаковой высоты испытывали тремя типами штампов, имеющих диаметр $d_0 = 110$; 225 и 317 мм, чему соответствует отношение $\frac{d_0}{l}$, равное 0,37; 0,75 и 1,05.

Таблица 1
Характеристики и результаты испытания образцов серии КПБ
($D = 50$ см; марки бетона «500» — «700»; $q = 60$ кг/см²)

Пролет l в см	Шифр образца	Прочность бето- на при намотке и испытании	Основные размеры в см		Условия на опоре	Размеры штампа			Разрушающая нагрузка в т	Удельное давле- ние под шта- пом при разру- шении в кг/см ²	Удельное давле- ние на кольце при разрушении в кг/см ²
			Диаметр D	Высота H		Диаметр d_0 в мм	Площадь в см ²	Высота h_0 в мм			
30	КПБ-1	530	52,0	39,8	Кольцо	225	400	52	795	1975	634
	КПБ-2		52,0	42,0	»	225	400	52	940	2350	748
	КПБ-3		52,0	39,8	Кольцо с парафином	225	400	52	675	1690	538
	КПБ-4		52,5	40,8	То же	225	400	52	675	1690	538
	КПБ-5		51,3	40,0	Кольцо	110	95	78	506	5340	404
	КПБ-6		51,5	40,0	»	110	95	78	420	4430	335
	КПБ-7		52,5	40,9	Кольцо с парафином	110	95	78	450	4750	359
	КПБ-8		52,3	41,1	То же	110	95	73	448	4730	357
	КПБ-9	495	51,2	29,8	Кольцо	225	400	52	500	1250	398
	КПБ-10		51,0	31,0	»	225	400	52	589	1470	469
	КПБ-11		51,0	31,0	Кольцо с парафином	225	400	52	590	1470	470
	КПБ-12		51,0	30,0	Кольцо	317	792	55	775	980	616
	КПБ-13		52,5	30,0	»	317	792	55	682	862	543
	КПБ-14		52,5	30,5	»	110	95	78	380	4000	303
	КПБ-15		52,5	30,0	»	110	95	78	370	3900	295
	КПБ-16		52,5	31,0	»	110	95	78	369,3	3890	294
	КПБ-17	518	51,0	20,5	Кольцо	225	400	55	357	893	284
	КПБ-18		52,0	22,0	»	225	400	55	412	1060	328
	КПБ-19		52,0	21,6	Кольцо с парафином	225	400	55	321	803	256
	КПБ-20		52,0	22,4	Кольцо	110	95	78	175	1843	139
	КПБ-21		52,0	22,0	»	110	95	78	196	2060	153
	КПБ-22		52,0	21,5	»	317	792	55	520	657	414
	КПБ-23		50,0	22,8	»	317	792	55	632	798	504
	КПБ-24		50,0	20,6	Кольцо с парафином	317	792	55	475	600	378
	КПБ-25	709	52,0	11,5	Кольцо	225	400	55	119	298	95
	КПБ-26		51,2	11,0	»	225	400	55	90	225	71,5
	КПБ-27		52,0	11,0	Кольцо с парафином	225	400	55	105	263	84
	КПБ-28		52,0	10,8	Кольцо	110	95	78	53	558	42
	КПБ-29		52,0	10,5	»	110	95	78	50	527	40
	КПБ-30		51,3	10,0	»	110	95	78	35,5	374	28,3
	КПБ-31		52,0	11,0	»	317	792	55	349	442	278
	КПБ-32		52,0	11,5	»	317	792	55	288	364	229
20	КПБ-33	540	50,0	10,5	Кольцо	225	400	55	300	750	182
	КПБ-34		51,0	10,0	»	225	400	55	280	700	170
	КПБ-35		51,5	11,5	Кольцо с парафином	225	400	55	235	588	143
	КПБ-36		51,0	11,2	То же	225	400	55	210	525	127
	КПБ-37		51,0	11,0	Кольцо	317	792	55	900	1138	545
	КПБ-38		51,0	9,8	»	317	792	55	784	990	475
	КПБ-39		51,0	10,4	Кольцо с парафином	317	792	55	532	673	322
	КПБ-40		51,5	11,2	Кольцо	110	95	78	70	737	42,5
	КПБ-41	600	51,5	11,5	Кольцо	110	95	78	75	790	45,5
	КПБ-42		51,5	11,0	Кольцо с парафином	110	95	78	60	631	36,3

Усилие прессы распределялось по всей поверхности штампа так, чтобы исключить изгибающие деформации; поэтому считали, что нагрузка на образец передается через жесткие штампы.



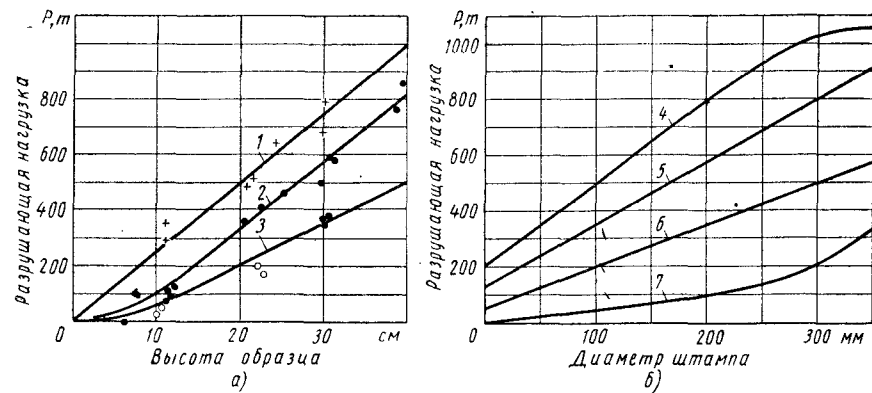
Фиг. 5. Образцы серии КПБ высотой 40 и 10 см после испытания:
а и в — вид со стороны штампа; б и г — вид со стороны опорной поверхности

Несколько образцов высотой $H = 10$ см испытывали штампами, имеющими диаметры $d_0 = 225$ и 317 мм, на опорном кольце с внутренним диаметром 200 мм для определения характера работы плиты при условии, что $d_0 > l$. Этот случай встречается в

некоторых вариантах реальных конструкций, когда нагрузка приложена по кольцу к плите, опирающейся на сплошное основание.

Для каждого типа плиты имелись контрольные образцы (см. табл. 1), при испытании которых между опорной поверхностью и кольцом трение частично ликвидировалось при помощи парафиновой смазки.

Во всех случаях испытание заканчивалось разрушением бетона образцов, которое сопровождалось постепенным снижением на-



Фиг. 6. Разрушающая нагрузка образцов серии КРБ в зависимости от:

а — высоты образца; б — диаметра штампа; 1 — $d_0 = 317$ мм, $\frac{d_0}{l} = 1,05$; 2 — $d_0 = 225$ мм, $\frac{d_0}{l} = 0,75$; 3 — $d_0 = 110$ мм, $\frac{d_0}{l} = 0,37$; 4 — $H = 40$ см; 5 — $H = 30$ см; 6 — $H = 20$ см; 7 — $H = 10$ см.

грузки. Ни в одной плите не наблюдалось разрыва арматуры или больших пластических деформаций проволоки. Величиной $P_{разр}$ считали максимальное усилие, которое было приложено к образцу.

Разрушение образца показано на фиг. 5. Внешними признаками истощения несущей способности плиты являются: развитие сетки радиальных и кольцевых трещин на опорной и нагружаемой поверхностях, раздробление бетона вокруг штампа и смятие его под штампом, перемещение срединной части относительно наружного кольцевого слоя.

Сравнение результатов испытания образцов, отличающихся высотой, показывает, что нагрузка, соответствующая моменту истощения несущей способности, повышается примерно пропорционально изменению высоты (фиг. 6).

Коэффициент пропорциональности зависит от диаметра штампа, передающего нагрузку на образец.

Как видно из графика на фиг. 6, а, при малом диаметре штампа и при отношении $\frac{d_0}{l} = 0,37$ несущая способность образца при увеличении высоты повышается менее интенсивно, чем при более высоких значениях отношения $\frac{d_0}{l}$.

На фиг. 6, б приведен график зависимости величины разрушающей нагрузки от диаметра штампа при неизменной высоте плиты. Здесь при $d_0 = 0$ нагружение имеет вид сосредоточенной силы, приложенной в центре плиты, а при $d_0 = l$ или $d_0 > l$ нагрузка распределена по всей загружаемой поверхности плиты.

При увеличении диаметра штампа разрушение образца происходило при более высокой нагрузке.

Увеличение $\frac{d_0}{l}$ в 3 раза (от $d_0 = 100$ мм до $d_0 = 300$ мм) вызвало повышение усилия при $H = 10$ см в 5 раз; при $H = 20$ и 40 см — в 2 раза.

Для образцов высотой 10 и 40 см с увеличением $\frac{d_0}{l}$ несущая способность плит изменяется по криволинейному закону.

При малой толщине плиты характер зависимости $P_{разр}$ от $\frac{d_0}{l}$ можно объяснить малой жесткостью плиты, ввиду чего уменьшение изгибающего момента при ее нагружении (с увеличением $\frac{d_0}{l}$) сильно сказывается на несущей способности.

На несущую способность высоких образцов ($H = 40$ см) величина изгибающего момента влияет меньше, и при изменении диаметра штампа от $d_0 \approx \frac{l}{2}$ до $d_0 \approx l$ разрушающая нагрузка повышается пропорционально.

При испытании плит штампом, диаметр которого больше, чем внутренний диаметр опорного кольца ($d_0 > l$), разрушение происходило в результате раздавливания бетона при сжатии (табл. 1, образцы КРБ-33 и КРБ-29). В этом случае при $d_0 > l$ разрушающая нагрузка возросла примерно в 3 раза по сравнению со случаем, когда $\frac{d_0}{l} = 1$.

Влияние величины бокового обжатия q . Зависимость несущей способности толстых плит-цилиндров от величины предварительного бокового обжатия изучали по результатам испытания серии образцов КРБ, которая состояла из 27 цилиндров диаметром около 50 см и высотой 40 см; характеристики и результаты испытания образцов указаны в табл. 2. Прочность бетона при обжатии образцов составляла 535 кг/см².

Предварительное обжатие цилиндров осуществлено намоткой на боковую поверхность напрягаемой проволоки диаметром 4 мм.

Таблица 2

Характеристики и результаты испытания образцов серии КПО
($D = 50$ см; $H = 40$ см; $l = 30$ см; $d_0 = 22,5$ см; $R = 500 \div 600$ кг/см²)

Шифр образца	Прочность бетона при испытании в кг/см ²	Основные размеры в см			Предварительное напряжение			Разрушающая нагрузка в т	Удельное давление под штампом при разрушении в кг/см ²	Удельное давление на кольцо при разрушении в кг/см ²
		Диаметр D	Высота H	Высота об- оймы h	Усилие в проволоке в кг	Число слоев об- оймы	Величина об- жатия в кг/см ²			
КПО-1	535	51,0	40,7	38,0	300	1	25,7	670	1675	533
КПО-2	660	51,0	41,0	36,0			25,7	799	2000	636
КПО-3	630	51,2	41,0	36,0			25,5	759	1900	605
КПО-4	530	52,0	39,8	37,8	600	1	56	795	1975	634
КПО-5			42,0	39,5				940	2350	748
КПО-6			39,8	37,0				675	1690	538
КПО-7	535	51,2	40,1	36,1	900	1	84	Условно 900	2250	716
КПО-8	627	50,6	40,5	38,0			85		2500	795
КПО-9	627	50,9	39,2	37,1			84,5		2500	795
КПО-10	535	51,1	40,8	37,5	290	2	51,5	840	2100	669
КПО-11	630	52,0	40,0	37,0	300		53	1005	2500	796
КПО-12	630	51,5	41,0	36,5	300		53,5	1100	2750	876
КПО-13	535	51,2	41,0	37,0	300	3	80	935	2340	745
КПО-14	660	52,5	40,5	36,0			78	1399	3500	1115
КПО-15	660	51,5	40,5	37,5			79	1297	3250	1032
КПО-16	535	51,0	40,7	38,1	680	2	127	990	2470	788
КПО-17	630	51,0	40,0	38,0	600		110	1140	2850	903
КПО-18	660	51,5	40,0	36,0	600		110	1005	2500	796
КПО-19	535	50,7	41,0	38,3	600	3	—	Условно 900	2250	716
КПО-20	630	51,0	40,0	38,0	600	3	165		3480	1109
КПО-21	630	51,0	40,0	38,0	600	3	165		3520	1120
КПО-22	535	51,0	40,5	37,0	900	2	168	1367	3420	1088
КПО-23	627	51,5	40,5	37,5	900	2	168	1158	2900	922
КПО-24	627	51,0	40,0	38,5	900	2	168	1258	3150	1000
КПО-25	535	51,5	41,0	37,0	900	3	247	1385,5	3470	1102
КПО-26	627	51,0	40,0	36,0				1391	3480	1110
КПО-27	660	51,0	41,0	38,5				1300	3260	1035

(ГОСТ 7348-55) с пределом прочности при растяжении 17 000 кг/см². Проволоку навивали на боковую поверхность образца, создавая в ней усилие натяжения от 300 до 900 кг.

Величину обжатия бетона образца на 1 см подсчитывали по формуле

$$q = \frac{\sigma_{ofnp} n_1}{D/2},$$

где $\sigma_{ofnp} = P$ — усилие натяжения проволоки;

n — число слоев об-оймы;

D — наружный диаметр образца;

$n_1 = \frac{1}{d_{np}}$ — число проволок, уложенных вплотную на 1 см высоты.

После сокращения формула имеет вид

$$q = \frac{nP}{D/2d_{np}}.$$

При подсчете величины радиального сжатия, действующего в бетоне образца, учитывали потери предварительного напряжения в проволоке от обжатия бетона под витками спиральной об-оймы ($\Delta\sigma_0$). По строительным нормам и правилам (СН и П II-В. 1-62) эти потери могут быть приняты равными 300 кг/см².

Кроме этого, учитывали снижение натяжения в проволоке каждого слоя (кроме наружного) от упругого сжатия бетона последующими слоями. По данным ВНИИСТ эти потери не превышают 0,05 P от каждого последующего слоя.

Предварительное напряжение бетона q для образцов серии КПО, вычисленное с учетом потерь, равно 25; 50; 80; 120; 170 и 250 кг/см². Для получения необходимого предварительного напряжения навивали об-ойму из одного, двух и трех слоев проволоки, причем объемный коэффициент армирования μ имел величину 0,025; 0,05 и 0,075.

Навивку проволоки на образцы проводили при достижении бетоном прочности 535—600 кг/см² в возрасте около двух месяцев, а испытывали через три-четыре дня после создания предварительного сжатия. При испытании образцы устанавливали на кольцо с внутренним диаметром $l = 300$ мм. Нагрузку передавали через жесткий штамп диаметром $d_0 = 225$ мм. Все образцы разрушались по бетону.

Общие результаты испытаний этой серии образцов приведены на графике фиг. 7, где показана зависимость разрушающей образец нагрузки от величины $\frac{q}{R}$ (отношение напряжения предварительного сжатия к кубиковой прочности бетона).

При увеличении предварительного обжатия образцов соответственно повышается и несущая способность ($P_{разр}$). При

Характеристика и результаты испытания образцов серии ВП

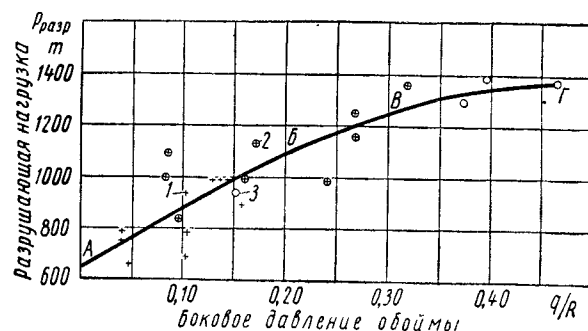
(D = 120 см; H = 70 см; d₀ = 40 см; l = 30 см)

Шифр образца	Прочность бетона R при намотке и испытании в кг/см ²	Основные размеры в см			Диаметр проволоки в обойме D пр в мм	Предварительное напряжение		Разрушающая нагрузка в т	Удельное давление под штампом при разрушении в кг/см ²	Удельное давление на кольцо при разрушении в кг/см ²
		Диаметр D	Полная высота образца	Расчетная высота H		Усиление в проволоке в кг	Величина обжатия q в кг/см ²			
А. Влияние прочности бетона										
ВП-16	490	122,5	75,5	68,5	4	720	56	2000	1595	211
ВП-1	465	120	75	68	5	900	56	2272	1810	290
ВП-2	465	120	76	68	5	900	56	2356	1875	300
ВП-12	400	120,3	76	70,8	4	720	57	1760	1401	185
ВП-13	400	123	81	75	4	720	55	1760	1401	185
ВП-5	289	120	76	68	5	900	56	1540	1230	196
ВП-30	100	121,1	76	69,5	4	720	57	861	690	110
ВП-31	100	120	76	69	4	720	57	731	583	93,2
ВП-32	100	121,4	75,7	69,7	4	720	57	763	607	97,5
Б. Влияние предварительного напряжения для бетона марки «500»										
ВП-11	560	120	76	69	4	1180	95	2273	1810	239
ВП-10	500	120,8	76,3	68,8	4	900	76	2200*	—	—
ВП-3	425	120	77	73	4,5	900	74	2300	1830	294
ВП-14	425	122	76	70,5	4	300	22	1572	1250	200
ВП-15	425	120,5	77,5	71,2	4	300	22	1400	1115	180
ВП-23	465	120	75	68	—	—	—	520	414	66
ВП-24	465	120	76	68	—	—	—	312	249	40
ВП-25	510	120	75	68	—	—	—	438	350	56
В. Влияние предварительного напряжения для бетона марки «300»										
ВП-4	289	120	75	68	4,5	900	74	1774	1412	226
ВП-6	290	120	76	70	4,5	900	74	1693	1350	215
ВП-7	290	120	77	70	4,5	900	74	1540	1230	196
ВП-17	295	120	77	70,5	4	300	22	1250	996	160
ВП-18	340	123	77	71	4	300	22	1600	1275	204
ВП-26	289	120	75	69,5	—	—	—	450	358	57
ВП-27	295	120	75	67,5	—	—	—	350	279	45
Г. Влияние предварительного напряжения для бетона марки «100»										
ВП-21	87,5	120,3	75,4	68,9	4	300	22	597	476	76
ВП-22	87,5	118,4	76	68,9	4	300	22	500	398	64
ВП-28	87	120	77	65	—	—	—	106,9	85	14
ВП-29	100	121,5	77	—	—	—	—	170	135	21,7
Д. Влияние способа опирания										
ВП-10	500	120,8	76,3	68,8	4	900	76	2000	1395	363
ВП-19	400	121	76	70	4	1180	94	1800	1431	328
ВП-20	360	111,5	75,8	69,6	4	1180	93,0	1600	1274	291
ВП-8	100	121,7	77,3	68	—	—	—	190	151	24,2
ВП-9	100	121,5	77	68	—	—	—	158	126	20

* Образец не доведен до разрушения.

повышении значения $\frac{q}{R}$ от 0 до 0,3 разрушающая нагрузка увеличивается примерно от 650 до 1300 т. Более высокое предварительное напряжение, при котором $\frac{q}{R} > 0,3$, не дает соответственного повышения несущей способности.

Можно считать, что до $\frac{q}{R} = 0,2$ повышение несущей способности происходит пропорционально величине предварительного



Фиг. 7. Несущая способность образцов серии КПО в зависимости от величины $\frac{q}{R}$ ($R = 500 \div 600$ кг/см²);

($\frac{d_0}{l} = 0,75$; $\frac{H}{l} = 1,33$): 1 — однослойная обойма; 2 — двухслойная обойма; 3 — трехслойная обойма.

обжатия. При значениях $\frac{q}{R} > 0,2$ зависимость $P_{разр} = f\left(\frac{q}{R}\right)$ имеет вид кривой, асимптотически приближающейся к некоторому постоянному значению $P_{разр}$.

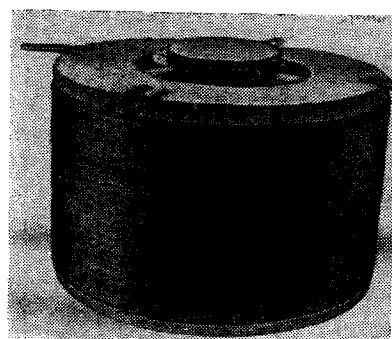
Критические значения величин $\frac{q}{R}$ (на графике точки Б и В) определены по данным серии образцов приблизительно по десяти точкам.

Отклонения значений $P_{разр}$ от средней линии АБВГ составляют в большинстве случаев 15%. Максимальные отклонения наблюдались при $\frac{q}{R} = 0,1$ и $\frac{q}{R} = 0,27$ и достигали 30%.

Исследование влияния величины предварительного напряжения проведено, кроме того, по результатам испытания образцов серии ВП (табл. 3).

Общее количество образцов серии ВП составляет 32 шт. В группах Б, В, Г (см. табл.) объединены образцы, изготовленные из бетона равной прочности и отличающиеся по величине предварительного напряжения. Для сравнения были изготовлены и испытаны образцы без арматуры.

Образцы серии ВП отличались от рассмотренных выше размерами и наличием дополнительного бетонного кольца высотой 7—8 см и шириной 30 см (фиг. 8).



Фиг. 8. Образец серии ВП

Образцы-цилиндры были запроектированы диаметром 120 см и высотой 75 см (вместе с бетонным кольцом). Рабочая высота цилиндра была равна 67 см. Ввиду неточного изготовления опалубки, фактические размеры имели некоторые отклонения от проектных, не превышающие 5—10%.

Цилиндры армированы гладкой проволокой диаметром 4 и 4,5 мм, навитой на боковую поверхность в два слоя. Предел прочности при растяжении проволоки составлял 12 500—14 000 кг/см². По механи-

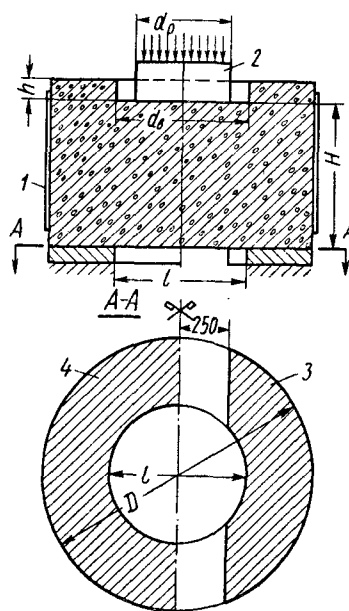
ческим свойствам сталь проволоки удовлетворяла требованиям ГОСТ 9389-60. Объемный коэффициент армирования μ при этом для всех образцов был одинаковый и равный 0,01. По высоте напряженная обойма не доведена до торцовых граней на 5—6 см (фиг. 8 и 9).

Необходимую величину предварительного обжатия получали путем задания усилия в проволоке от 300 до 1180 кг, в результате чего обжатие бетона с учетом потерь составляло примерно 22; 56; 74 и 95 кг/см².

Образцы изготовляют из бетона марок «100», «300», «400» и «500». Фактическая прочность бетона в день испытания, определенная путем испытания стандартных кубов размером 20 × 20 × 20 см, приведена в табл. 4.

При анализе результатов испытания учитывали также образцы серии ВП групп А и Д.

В первой группе (А) объединены цилиндры, предварительное напряжение которых было одинаковым и примерно равным $q = 56$ кг/см². Переменным фактором здесь являлась прочность бетона, которая изменялась от $R = 100$ до $R = 500$ кг/см².



Фиг. 9. Конструкция и схема испытания образцов серии ВП: 1 — обойма; 2 — штамп; 3 — сегмент; 4 — кольцо.

Влияние трения на опорной плоскости на несущую способность образцов (по серии КПБ)

Шифр образцов	Прочность бетона в кг/см ²	H в см	d ₀ в мм	Разрушающая нагрузка в т		Отклонения в %	Шифр образцов	Прочность бетона в кг/см ²	H в см	d ₀ в мм	Разрушающая нагрузка в т		Отклонения в %
				с трением	без трения						с трением	без трения	
КПБ-22 КПБ-23 КПБ-24	518	21,5	317	520 632 —	— 475 —	8,5 25,0 —	КПБ-17 КПБ-18 КПБ-19	518	20	225	357 412 —	— 321 —	10 22 —
КПБ-37 КПБ-38 КПБ-39	540	10	317	900 784 —	— 532 —	41 32 —	КПБ-25 КПБ-26 КПБ-27	709	10	225	119 90 —	— 105 —	12 17 —
КПБ-1 КПБ-2 КПБ-3 КПБ-4	530	40	225	795 940 —	— 21 675 675	15 21 — —	КПБ-5 КПБ-6 КПБ-7 КПБ-8	530	40	110	506 420 —	— 450 448	11—12 7 —
КПБ-9 КПБ-10 КПБ-11	495	30	225	500 589 —	— 590 —	18 0 —	КПБ-40 КПБ-41 КПБ-42	540 600 600	30	110	70 75 —	— 60 —	14 20 —

Характеристика образцов: Наружный диаметр $D = 51 \div 52$ см. Величина предварительного обжатия $q = 60$ кг/см². Образцы испытаны жестким штампом при опирании на кольцо.

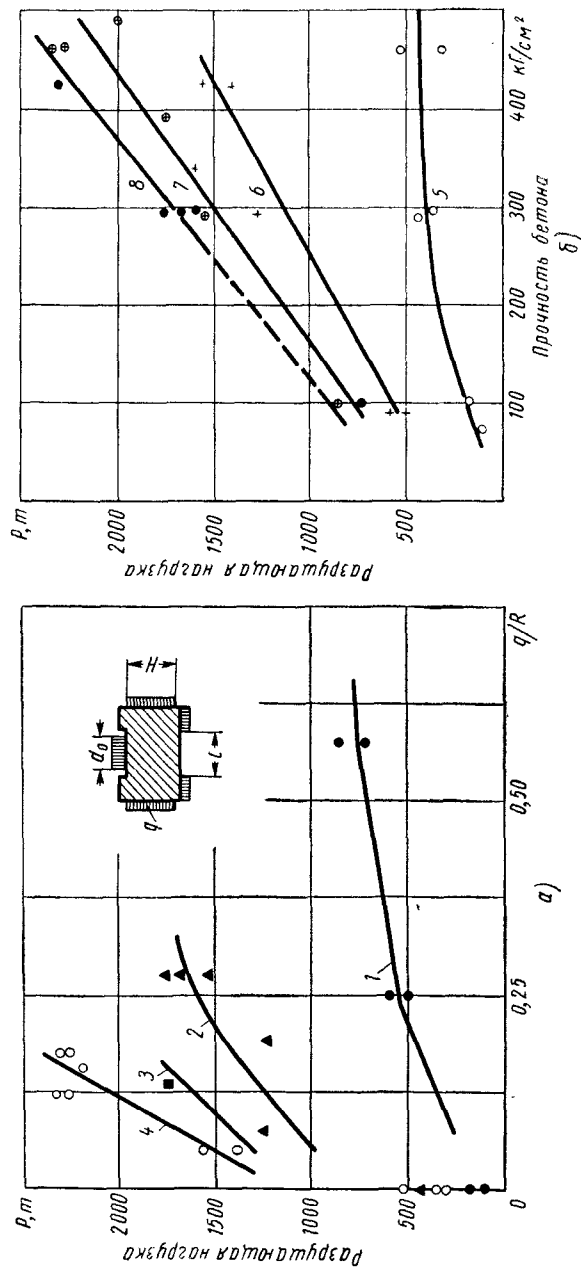
В группу Д входят четыре образца, изготовленные из бетона марки «100», неармированные, из бетона марки «400», армированные гладкой проволокой диаметром 4 мм. В последних было создано поперечное обжатие $q = 93 \div 94$ кг/см². Образцы этой группы предназначались для исследования влияния на несущую способность способа опирания при испытании.

Все образцы серии ВП (кроме группы Д) испытывали нагрузкой, приложенной к штампу диаметром 400 мм.

Опорное кольцо имело внутренний диаметр 600 мм. Цилиндр ВП-10 после испытания на кольцо нагрузкой 2200 кг переставили на опору в виде сегментов и нагружали до разрушения.

Образцы серии Д испытывали при опирании на сегменты (фиг. 9).

По серии ВП зависимость разрушающей нагрузки от величины предварительного напряжения может быть представлена графиком на фиг. 10, а. При повышении значения $\frac{q}{R}$ до 0,15—0,20 разрушающая нагрузка $P_{разр}$ пропорционально увеличивается. Для



Фиг. 10. Разрушающая нагрузка образцов серии ВП ($\frac{d_0}{L} = 0,67$; $\frac{H}{L} = 1,13$) в зависимости от:

а — величины предварительного обжатия: 6 — прочность бетона: 1 — бетон марки «100»; 2 — бетон марки «300»; 3 — бетон марки «400»; 4 — бетон марки «500»; 5 — неармированные образцы; 6 — армированные образцы; 7 — $q = 22 \text{ кг/см}^2$; 8 — $q = 74 \text{ кг/см}^2$.

бетона марки «100» пропорциональность сохраняется примерно до $\frac{q}{R} = 0,2$. При более высоких марках бетона критическое значение $\frac{q}{R}$ несколько ниже. При величине $\frac{q}{R}$ свыше критического несущая способность $P_{\text{разр}}$ повышается незначительно.

По результатам испытаний образцов серии ВП зависимость несущей способности образцов от марки бетона при различной величине предварительного напряжения показана на фиг. 10, б.

При изменении прочности бетона от 50 до 500 кг/см^2 наличие самого минимального предварительного напряжения ($q = 22 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 0,01$) значительно повышает несущую способность образца. Разрушающая нагрузка для образцов из бетона марки «100» увеличилась в 3 раза. Для бетонов высокой прочности (марок «400»—«500») разрушающая нагрузка в этом случае повысилась примерно в 4 раза.

Из графиков следует, что при наличии предварительного напряжения обоймы и одинаковой величине обжатия разрушающая нагрузка $P_{\text{разр}}$ увеличивается пропорционально повышению марки бетона. При этом коэффициент пропорциональности зависит от величины предварительного напряжения q .

Несущая способность образцов без обоймы повышается пропорционально прочности бетона примерно до марки «200». Образцы без обоймы, изготовленные из бетона высоких марок, разрушались при низких нагрузках.

Таким образом, по результатам испытания образцов серии КПО и ВП установлено, что разрушающая нагрузка зависит как от прочности бетона, так и от величины предварительного напряжения. При одинаковой величине q разрушающая нагрузка повышается пропорционально марке бетона (в пределах от 50 до 500 кг/см^2).

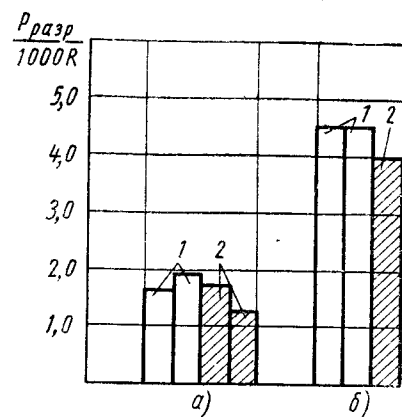
С повышением степени обжатия образцов разрушающая нагрузка также возрастает. Однако имеется некоторая критическая величина отношения $\frac{q}{R}$, до которой наблюдается пропорциональное повышение несущей способности. Обжатие бетона свыше определенной критической величины не рационально, так как не вызывает значительного повышения несущей способности образца.

Критическими величинами $\frac{q}{R}$ являются для высоких марок бетона («400»—«500») $q = (0,10 \div 0,20) R$; для низких и средних марок («100»—«200») наиболее целесообразно принимать $q = (0,20 \div 0,30) R$.

Влияние условий опирания образцов. Во многих случаях схема загрузки и опирания несколько отличается от принятой при исследовании несущей способности, так как в стенах цилиндрических станин прессов, как правило, оставляют технологические

проемы с обеих сторон станины. Влияние на несущую способность образцов такого изменения схемы моделировали тем, что образец при испытании опирали не на кольцо, а на отдельные сегменты (см. фиг. 8). Расстояние между сегментами выбрано из условий возможных размеров технологического проема в стенах станины.

На диаграмме (фиг. 11) дано сравнение результатов испытания идентичных образцов серии ВП при опирании их на кольцевой опоре и сегментах.



Фиг. 11. Влияние способа опирания на результаты испытания образцов серии ВП:

а — $q = 0$; б — $q = 95 \text{ кг/см}^2$; 1 — опирание на сегментах; 2 — опирание на кольцо.

Можно предположить, что при испытании на сегментах несущая способность образцов-цилиндров может быть на 10—15% ниже, чем при испытании с опиранием на кольцо.

При исключении влияния прочности бетона получено, что результаты испытания образцов при опирании их на сегменты (т. е. по двум сторонам) или на кольцо отличаются незначительно.

Отклонения величины $a = \frac{P_{разр}}{1000R}$ находятся в пределах допустимого разброса.

При устранении трения на опорной поверхности образцы в большинстве случаев разрушались при меньшей нагрузке (табл. 4). Наибольшее отклонение (36%) было получено для образцов высотой 10 см при нагружении их штампом $d_0 = 317 \text{ мм}$.

При устранении трения на опорной поверхности образцы в большинстве случаев разрушались при меньшей нагрузке (табл. 4). Наибольшее отклонение (36%) было получено для образцов высотой 10 см при нагружении их штампом $d_0 = 317 \text{ мм}$.

В случае нагружения таких плит штампами $d_0 = 225 \text{ мм}$ и $d_0 = 110 \text{ мм}$ трение на опорах влияет меньше. Один образец (КПБ-26) при наличии трения разрушился при нагрузке, величина которой ниже, чем при испытании без трения.

Высокие образцы ($H = 40 \text{ см}$) при малом диаметре штампа (110 мм) разрушались в обоих случаях при одинаковой нагрузке. Увеличение диаметра штампа приводит для высоких образцов к повышению влияния трения.

В этом случае при увеличении диаметра штампа от 110 до 225 мм разрушающая нагрузка образцов с уменьшенным трением на опорной поверхности оказалось в среднем на 18% ниже.

Таким образом, влияние трения на опорах больше сказывается на несущей способности плит малой высоты (при отношении

$\frac{H}{D} \leq 0,2$) для случаев нагружения образцов штампом большого диаметра ($\frac{d_0}{D} \geq 1$).

Разрушающая нагрузка высоких образцов ($\frac{H}{D} \geq 0,5$) меньше зависит от наличия трения на опорах.

В среднем можно принять, что при отсутствии трения на опорах, несущая способность плит снижается примерно на 10—15%.

Выносливость железобетонных элементов цилиндрической формы в предварительно напряженной обойме при действии многократно повторяющейся нагрузки

Элементы машин, в том числе выполняемые из железобетона, при эксплуатации подвергаются воздействию многократно повторяющихся нагрузок, в виду чего несущая способность таких элементов может быть ниже, чем при однократном статическом нагружении.

Поэтому, кроме исследований несущей способности образцов-моделей архитравов при воздействии статической нагрузки, были проведены опыты по определению пределов выносливости образцов-плит при различных режимах нагружения (серии КПМ).

Высота плит была принята минимальной ($H = 0,2D$) для создания наиболее тяжелых условий испытания. Размеры и несущая способность образцов, кроме того, определялись величиной предельного усилия испытательной машины.

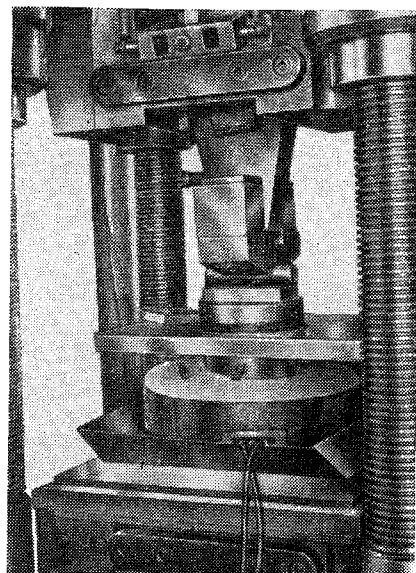
Плиты круглые диаметром 50,5 см и высотой 12 см изготовляли из бетона марки «500» состава 1 : 0,83 : 2,05 (цемент, песок, щебень) по весу при водоцементном отношении (B/C) = 0,33. Расход цемента составлял 600 кг на 1 м³. В возрасте 28 дней прочность бетона, определяемая при испытании кубов из бетона того же состава, размером 20 × 20 × 20 см, получена равной 500 кг/см².

Плиты армировали высокопрочной холоднотянутой проволокой периодического профиля диаметром 4 мм. Предел прочности при растяжении проволоки составлял 16 000—17 000 кг/см². По механическим свойствам проволока отвечала требованиям ГОСТ 8480-57. Проволоку навивали на образцы, натягивая ее усилием $P = 900 \text{ кг}$ и создавая в поперечном сечении напряжение 7150 кг/см². Шаг проволоки при намотке был равен 0,5 см, объемный коэффициент армирования составлял примерно 0,02.

С учетом потерь обжатие бетона, создаваемое такой однослойной сплошной обоймой, получилось равным 60 кг/см².

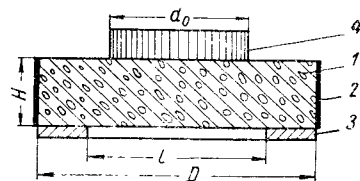
При испытании плита устанавливалась на опорное кольцо с внутренним диаметром 300 мм (фиг. 12 и 13). Нагрузка от верхней траверсы пульсатора передавалась на образец через каток

и набор металлических плит из стали марки Ст. 3. Металлическая плита, лежащая на бетоне, имела диаметр 225 мм и высоту 35 мм. Установка катка взамен шарового шарнира создавала некоторое



Фиг. 12. Установка образцов серии КПМ в пресс-пульсаторе для испытания.

изменение условий нагружения. Однако предполагается, что такое изменение условий нагружения не скажется на несущей способности образцов заметным образом, так как общая высота штамповых плит достаточна, чтобы давление круглого штампа на бетон плиты распределялось равномерно. Деформации измерялись тензодатчиками сопротивления, которые наклеивали на бетон (на опорной поверхности) и на арматуру в трех точках по высоте. В результате статического испытания было установлено, что средняя (по трем образцам) разрушающая нагрузка образцов плит составляла около 100 т. Для определения деформированного состояния плиты и его изменения при действии многократно повторяющейся нагрузки перед началом пуль-



Фиг. 13. Конструкция и схема испытаний образца серии КПМ ($H = 12$ см; $D = 50$ см; $l = 30$ см):

1 — бетонная плита; 2 — обложка; 3 — опорное кольцо; 4 — штамп.

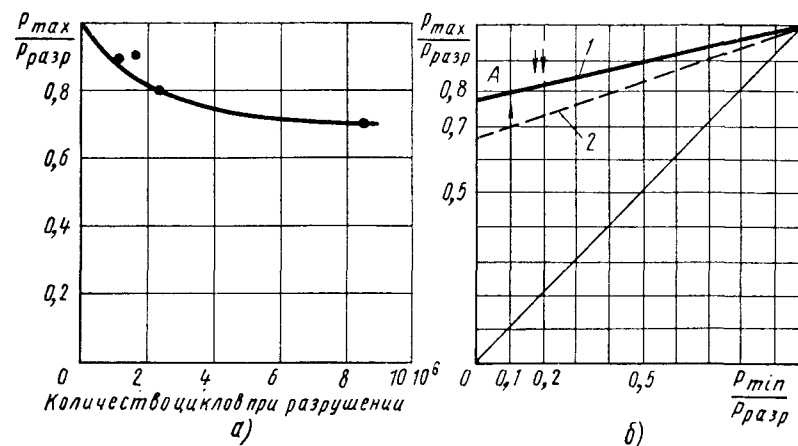
сации каждый образец нагружался статически действующим усилием, которое по величине равнялось задаваемому верхнему пределу многократно повторяющейся нагрузки. При этом замерялись деформации бетона и арматуры. Впоследствии через каждые 200—250 тыс. циклов производились повторные статические нагружения. Разность величин, замеряемых после очередных этапов пульсации, определяла изменение деформаций образца в зависимости от количества циклов нагружения.

Верхние пределы многократно повторяющиеся нагрузки принимали равными 0,9; 0,8 и 0,7 от $P_{разр}$, где $P_{разр}$ — несущая способность образца при статическом нагружении. Нижние пределы многократно повторяющейся нагрузки устанавливали в соответ-

вии с техническими возможностями пульсатора равными (0,1—0,2) $P_{разр}$.

При этом коэффициент асимметрии цикла $q = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ для различных случаев нагружения равнялся соответственно 0,222; 0,125 и 0,140.

По результатам испытаний на выносливость бетонных призм, проведенных в НИИЖБ Каранфиловым Т. С., а также в МИИТе Карпухиным Н. С., можно заключить, что изменение коэффициента



Фиг. 14. Результаты испытания образцов серии КПМ (при $q = 0,125 \div 0,222$): а — зависимость предела выносливости плит от количества циклов при разрушении; б — пределы выносливости: 1 — круглой предварительно напряженной в двух направлениях плиты ($P_{cp} + 1,57 P_a = P_{разр}$); 2 — бетонной призмы при одноосном сжатии ($P_{cp} + 1,96 P_a = P_{разр}$).

асимметрии цикла в пределах от 0,15 до 0,25 незначительно влияет на величину предела выносливости бетона.

Предполагая, что указанное положение распространяется на рассматриваемую конструкцию, при анализе результатов исследования разницу величины q не учитывали. При испытании из восьми образцов одна плита (КПМ-3) разрушалась при пуске пульсатора вследствие случайного превышения верхнего предела нагрузки. Результаты испытания остальных плит могут быть использованы для определения примерно величины предела выносливости рассматриваемых конструкций.

На фиг. 14, а изображена зависимость пределов выносливости плит серии КПМ от количества циклов при разрушении, построенная по данным табл. 5. Пределы выносливости здесь выражены отношением $m = \frac{P_{max}}{P_{разр}}$, где P_{max} — максимальная статическая нагрузка; $P_{разр}$ — разрушающая нагрузка при многократно повторяющихся нагружениях.

Таблица 5

Характеристика и результаты испытания круглых предварительно напряженных плит

(D = 505 мм; H = 120 мм; d₀ = 22,6 см; y = 60 кг/см²)

Шифр образца	Прочность бетона в кг/см ²		Пределы нагружения при испытании в т		Удельное давление в кг/см ²				Число млн. циклов нагружений		Возраст в сутках
	при обжатии	при испытании	min	max	под штампом		на опорном кольце		при появлении трещин	при разрушении	
КПМ-1	—	600	20	90	50	225	15,9	71,5	1,1	1,8	3 мес. 24 дня
КПМ-2	—	600	20	90	50	225	15,9	71,5	—	1,45	4 мес. 9 дней
КПМ-3	450	540	—	—	—	—	—	—	—	—	4 мес. 23 дня
КПМ-4	—	600	10	80	25	200	8	63,5	1,5	2,28	4 мес. 16 дней
КПМ-5	450	540	10	70	25	175	8	56	—	9,4	6 мес. 2 дня
КПМ-6	430	600	—	119	—	298	—	95	—	—	2 мес.
КПМ-7	430	600	—	90	—	225	—	71,5	—	—	2 мес.
КПМ-8	430	600	—	105	—	263	—	84	—	—	2 мес.

Примечания: 1. Плита КПМ-3 разрушилась при пуске пульсатора.
2. Плита КПМ-5 не разрушилась.
3. Плиты КПМ-6, КПМ-7, КПМ-8 разрушены при статическом нагружении.

При изменении m от 1,0 до 0,7 даже при незначительном уменьшении нагрузки резко увеличивается количество циклов нагружений, которое может быть приложено к образцу до разрушения. При $m = 0,7$ кривая переходит в линию, почти параллельную оси. Для рассматриваемых типов образцов при заданных условиях нагружения и указанных коэффициентах асимметрии цикла усталостные явления практически не проявляются при 8,5 млн. циклов нагружений.

Следовательно, можно ориентировочно предположить, что многократно повторяющиеся нагружения влияют на прочность плиты только в пределах изменения m от 1,0 до 0,7.

Ввиду малого перепада напряжений в арматуре и относительно высокого значения коэффициента асимметрии цикла разрушение образцов наступает вследствие появления усталостных явлений в бетоне. Поэтому для оценки предела выносливости плит может быть использована формула, предложенная для случая простого напряженного состояния:

$$\sigma_{cp} + \alpha \sigma_a = R,$$

где

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad \text{и} \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2};$$

R — предел прочности материала;

α — коэффициент ($\alpha > 1$).

Учитывая, что материал круглой железобетонной плиты работает в сложном напряженном состоянии и определить напряжения в наиболее нагруженных волокнах не представляется возможным, предел выносливости конструкции при воздействии многократно повторяющейся нагрузки нами был выражен через величину максимального, действующего на плиту, усилия, не вызывающего ее разрушения до $2 \cdot 10^6$ циклов нагружений. В этом случае уравнение предела выносливости может быть записано в виде

$$P_{cp} + \alpha P_a = P_{разр},$$

где

$$P_{cp} = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} \quad \text{и} \quad P_a = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2};$$

P_{\max} — разрушающая нагрузка при статическом нагружении.

Предел выносливости исследуемых круглых предварительно напряженных железобетонных плит по результатам испытания образцов КПМ-4 ($m = 0,8$ и $q = 0,125$), выдержавших 2,28 млн. циклов нагружений, составляет $P_{\max} = 0,8 P_{разр}$ (фиг. 14, б).

Прямая 1, проведенная через точку А и координату 1,0—1,0 (отвечающая пределу прочности при статическом нагружении), характеризуется уравнением

$$P_{cp} + 1,57 P_a = P_{разр}.$$

Результаты испытаний образцов с другими условиями нагружения нанесены на этом же графике. Плиты КПМ-1 и КПМ-2 разрушились соответственно после 1,8 млн. и 1,45 млн. циклов нагружений, поскольку величина $m = 0,9$ превышала принятый предел выносливости.

Плита КПМ 5 не разрушилась при 9,5 млн. циклов нагружения; следовательно, характеристика $m = 0,7$ меньше предела выносливости.

Для сравнения на графике фиг. 14, б нанесена прямая 2, построенная по данным О. Я. Берга и отвечающая пределам выносливости бетонных образцов-призм на сжатие при $R = 530$ кг/см². Этой прямой соответствует уравнение

$$P_{cp} + 1,96 P_a = P_{разр}.$$

Взаимное расположение прямых показывает, что при $m = 0,8$ и $q \approx 0,1$ предел выносливости предварительно напряженного бетона по сравнению с обычным повышается примерно на 15%.

Имея в виду малое количество испытанных образцов, сделанные выводы являются предварительными и требуют дополнитель-

ной проверки. Однако результаты испытаний подтверждают, что материал в предварительно напряженных круглых плитах при воздействии повторяющейся нагрузки работает в лучших условиях по сравнению с обычными конструкциями.

Общий анализ результатов испытания круглых предварительно напряженных толстых железобетонных плит

По результатам испытания четырех серий образцов предварительно напряженных толстых железобетонных плит выявлен характер влияния на несущую способность плит основных факторов.

Установлено, что несущая способность образцов, характеризующаяся величиной максимальной нагрузки $P_{разр}$, зависит в основном от прочности бетона, величины бокового сжатия, размеров плиты и характера приложения нагрузки.

При наличии предварительно напряженной обоймы и одинаковой величине поперечного обжатия разрушающая нагрузка $P_{разр}$ возрастает пропорционально повышению марки бетона. При изменении величины предварительного напряжения коэффициент пропорциональности изменяется.

Повышение величины бокового обжатия до некоторого предела также увеличивает несущую способность плит. Эффективным является обжатие, величина которого составляет 20—25% прочности бетона на сжатие.

При увеличении высоты плиты несущая способность возрастает пропорционально. Очевидно, что такое изменение величины разрушающей нагрузки ограничивается некоторым предельным значением $\frac{H}{D}$, которое в наших опытах не установлено.

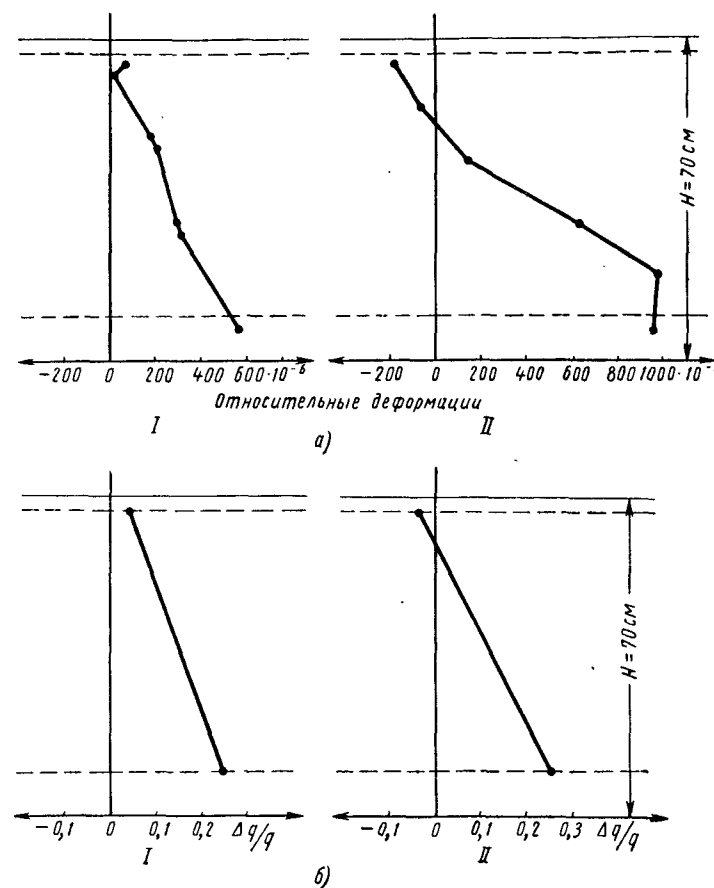
При уменьшении диаметра штампа d_0 по сравнению с диаметром образца D наблюдается снижение несущей способности плит.

Так как практически возможны различные сочетания этих факторов, получение по результатам опытов эмпирической формулы для вычисления разрушающей нагрузки представляется затруднительным.

В данном случае может быть полезным рассмотрение формы разрушения образца и определение схемы работы плиты в предельном состоянии, предшествующем разрушению.

Напряженно-деформированное состояние образцов-плит перед разрушением. Наблюдения показали, что форма разрушения всех образцов в основном одинакова и мало зависит от соотношения размеров или других факторов. Перед разрушением в проволоке на боковой поверхности образца возникали дополнительные напряжения Δq , величина которых вблизи опорной поверхности достигала 0,5—1,0 q .

Вблизи нагруженной штампом плоскости изменения бокового обжатия были значительно меньше и величина Δq составляла всего 0,1—0,2 q . Для примера на фиг. 15 показаны графики распределения дополнительного бокового обжатия Δq на боковой поверхности образцов серии ВП.



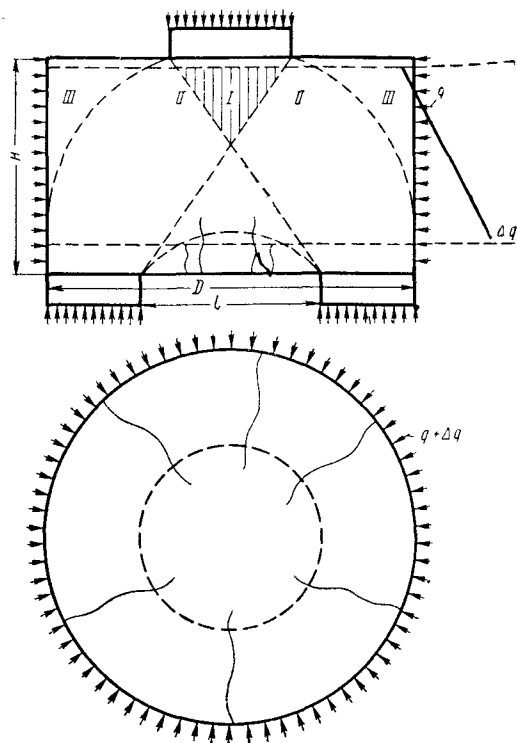
Фиг. 15. Напряженное состояние обоймы перед разрушением (по серии ВП), $q = 57 \text{ кг/см}^2$:

а — относительные деформации наружного слоя проволоки; б — приращение бокового обжатия Δq ; I — бетон марки «500»; II — бетон марки «100».

В бетонном сердечнике плиты наблюдались трещины на опорной плоскости и на боковой поверхности, ширина которых составляла не более 0,01—0,02 мм. На штамповой поверхности образцов трещин не наблюдалось до тех пор, пока не началось продавливание средней части образца, происходящее при постоянной или слегка снижающейся нагрузке.

Под штампом перед разрушением возникало давление P , величина которого очень велика и в несколько раз превышает прочность бетона. На опорном кольце возникает среднее давление, величиной значительно меньше прочности бетона.

Таким образом, напряжения σ_z в бетоне изменяются от штампа к опорному кольцу при постепенном снижении их величины. По этим внешним признакам напряженное состояние образцов перед разрушением представляется следующим образом (фиг. 16).



Фиг. 16. Схема напряженного состояния образца перед разрушением.

тия при очень высоких напряжениях σ_z (область I)

В более глубоких слоях эти напряжения снижаются, но одновременно изменяются и условия напряженного состояния, т. е. изменяется величина напряжений σ_r и σ_θ . Это изменение вызвано наличием вокруг штампа незагруженного кольца бетона (области II и III).

По-видимому, в области II находится наиболее слабое место плиты, так как максимальные давления от штампа здесь воспринимаются бетоном, который находится в объемно-напряженном состоянии, но при невыгодном сочетании напряжений σ_z , σ_θ и σ_r .

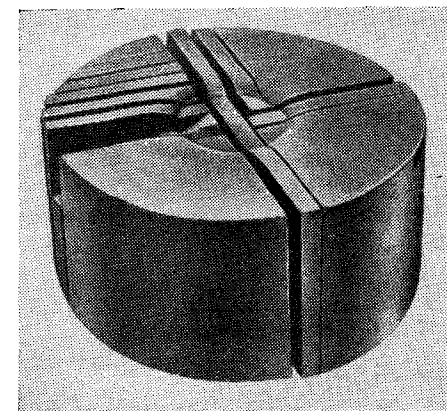
Бетонный сердечник, заключенный в предварительно напряженную обойму, имеет вид цилиндра, который вблизи опорной поверхности разделен радиальными трещинами на секторы. Эти бетонные секторы объединены натянутой проволокой обоймы, которая создает давление на бетон величиной $q + \Delta q$. Таким образом, в этой зоне бетон находится в условиях сложного объемного напряженного состояния. Вблизи опорной поверхности напряжения в бетоне невелики и не превышают прочности бетона на сжатие.

Под штампом бетон находится в условиях объемного всестороннего сжатия

Для более полного представления о напряженном состоянии, которое возникает в образце при нагружении, рассмотрим результаты исследования упругих изотропных моделей из оптически активного материала.

Распределение напряжений в толстой плите из оптически активного материала. Исследования выполнялись на оптической установке РМБ-56 с применением моделей, приготовленных из материала «эпоксифтомал», рецептура которого предложена кафедрой физической химии МИХМ и лабораторией оптического метода Института машиноведения АН СССР.

Для исследования применяли метод «замораживания напряжений» в объемных моделях. Пространственную модель конструкции нагружали при повышенной температуре и оставляли под нагрузкой до полного охлаждения. При этом после разгрузки напряжения, возникающие при действии нагрузки, сохраняются. Затем пространственную модель разрезали на плоские срезы, последовательное исследование которых позволяло установить качественную картину распределения напряжений.



Фиг. 17. Срезы объемной модели, исследуемой по методу «замораживания напряжений».

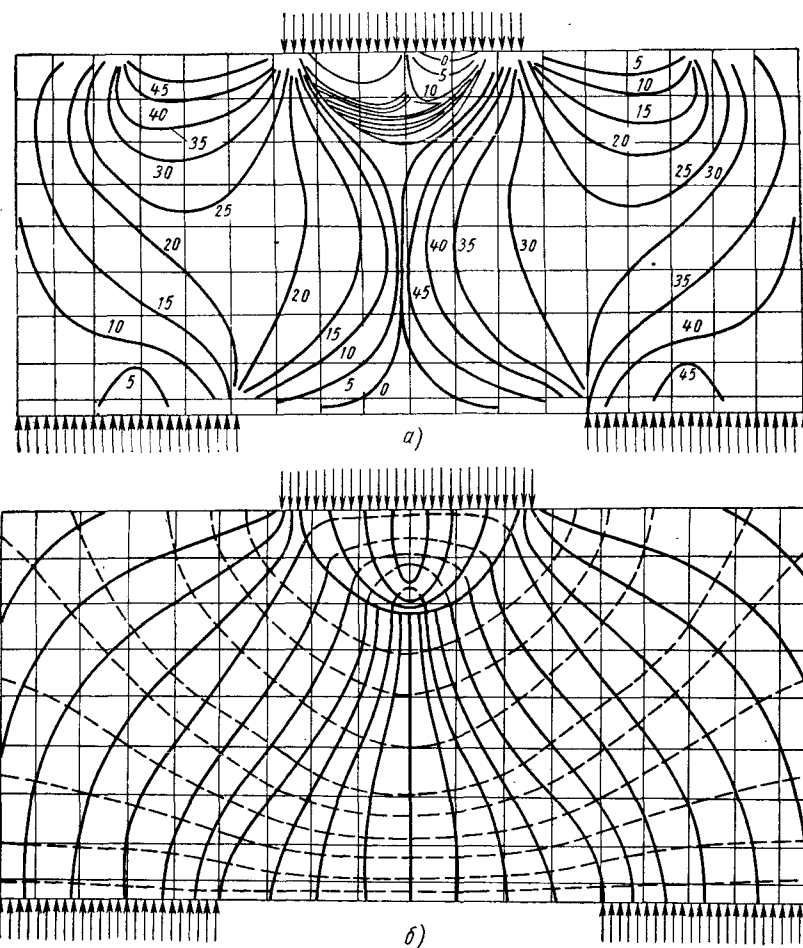
Нагружение образца осуществляли при помощи рычажного устройства. Характер распределения напряжений при нагружении контролировали, просвечивая образец на установке. После «замораживания» модель на фрезерном станке разрезали на плоские срезы (фиг. 17). При испытании проводили исследование только диаметрального среза, что дало достаточно полную качественную картину распределения напряжений по диаметру образца.

При исследовании получены картины изоклин и изостат для рассматриваемого образца, а также картины полос.

Картины изоклин в модели толстой плиты (фиг. 18, а) показали, что в подштамповой зоне возникают значительные концентрации напряжений, имеющие самостоятельный характер в общей картине распределения напряжений.

Картина изостат, построенная по изоклинам методом графического интегрирования (фиг. 18, б), обределяет основные силовые потоки, действующие в материале элемента и направленные от штампа к кольцу.

Включение в работу на изгиб материала плиты в центральной части сечения несколько искажает направление силовых линий в средней части образца. При этом напряжения, направленные



Фиг. 18. Результаты исследования модели из оптически активного материала:
а — изоклины; б — изостаты.

в средней части параллельно опорной поверхности плиты, распространяются к боковой поверхности, изменяя направление от нуля до 90° .

Таким образом, исследование моделей плит из упруго изотропного оптически активного материала показало, что основной силовой ток в плите направляется от штампа к опорному кольцу,

Внутри бетонного сердечника этими полями выделяется как бы наиболее напряженная часть, имеющая форму толстостенного свода, в ключе которого бетон находится в условиях всестороннего объемного сжатия.

В стенах этого условного свода имеют место переменные как по толщине, так и по высоте материала сжимающие напряжения σ_z и σ_r .

Кольцевые напряжения по высоте образца уменьшаются от $-\sigma_\theta$ под штампом до $+\sigma_\theta$ на кольцевой поверхности. После образования радиальных трещин в бетоне кольцевые напряжения равны нулю, а действующий распор воспринимается проволокой напряженной обоймы.

Разрушение образцов и места появления больших пластических деформаций. Судя по величине напряжений σ_z , действующих в бетоне, и характеру их изменения по высоте образца, можно предположить, что разрушение по горизонтальным сечениям, расположенным вблизи опорного кольца, маловероятно. Как указывалось, напряжения в этих сечениях обычно ниже кубиковой прочности бетона.

В области I под штампом (см. фиг. 16), в силу наличия всестороннего сжатия, бетон может воспринять значительные давления без нарушения структуры, что подтверждено экспериментально и теоретически. Таким образом, предельное состояние бетона может появиться в каком-либо сечении в области II (см. фиг. 16). Очевидно, в этом сечении максимальное внешнее давление встречает наименьшее внутреннее сопротивление. Картина разрушения тогда представляется следующим образом.

Нагрузка, передаваемая на бетон образца через штамп, вызывает в наиболее слабом сечении напряжение, равное предельному сопротивлению бетона при сжатии, и разрыв поперек действия силового потока при наличии значительных касательных напряжений.

Разрушенный и спрессованный бетон в ключе условного свода при несколько снижающемся усилии продавливается по направлению от штампа к кольцу при наличии больших радиальных сжимающих усилий, вызванных отпором обоймы.

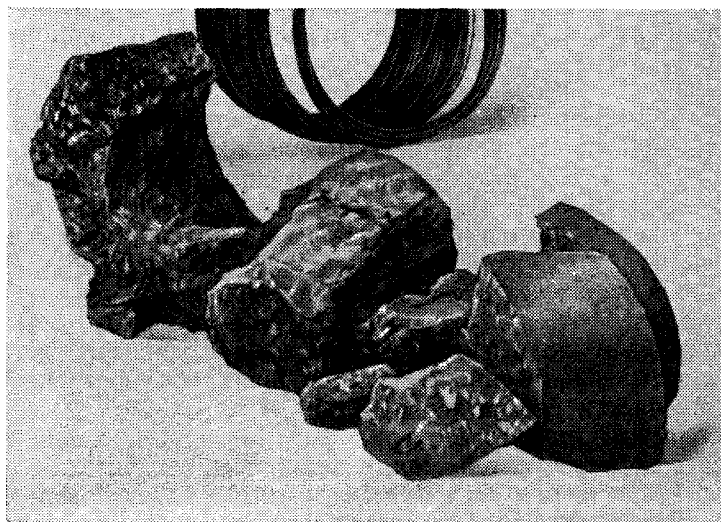
Продавливанию бетона, кроме того, оказывает сопротивление неразрушившийся бетон нижней части образца.

Полностью разрушенный образец имеет вид, приведенный на фиг. 19.

Очевидно, что при увеличении высоты образца H , уменьшении пролета l и увеличении диаметра штампа d_0 угол наклона силовых линий будет увеличиваться, и бетон сжатой зоны будет оказывать более высокое сопротивление внешней нагрузке.

Максимальное усилие выдержит образец, который нагружается при $d_0 = D$ и $l = 0$. Этот случай при $H > D$ соответствует

разрушению бетона в предварительно напряженной обойме при центральном сжатии нагрузкой, распределенной по всему сечению.



Фиг. 19. Полностью разрушенный образец толстой плиты.

Предложения по расчету несущей способности толстых железобетонных плит с напрягаемой арматурой

Ввиду пространственной формы, наличия бокового давления обоймы (являющейся функцией нагрузки) и других особенностей конструкции напряженное состояние, возникающее в момент разрушения плиты, охарактеризовать теоретически, с помощью положений сопротивления материалов или теории упругости, не представляется возможным.

В данном случае проще всего определить несущую способность конструкции, пользуясь методом предельного равновесия, предложенным Гвоздевым А. А. Согласно этому методу несущая способность может быть найдена как наибольшее усилие, удовлетворяющее условиям равновесия и предельным условиям состояния конструкции.

При рассмотрении напряженного состояния круглых толстых плит началом разрушения можно считать этап, на котором деформации еще достаточно малы, что позволяет пренебречь изменениями геометрических размеров образца. При достижении разрушающей нагрузки деформации конструкции возрастают без повышения усилия.

В данном случае толстую цилиндрическую плиту можно рассматривать как элемент, нагруженный центрально приложенной нагрузкой и работающий на сжатие.

Предельное состояние бетона возникает в сечении $a-a$ (фиг. 20), расположение и площадь которого зависят от геометрических размеров образца и штампа.

Условие равновесия в таком случае имеет вид

$$P_{\text{ан}} = \sigma_b f \sin \alpha,$$

где σ_b — сопротивление бетона;

f — площадь рабочей поверхности;

α — угол наклона внутреннего усилия к оси z .

На основании опытных данных считаем, что разрушение бетона происходит в области II (см. фиг. 16) по некоторой поверхности, площадь которой равна f_k . Для простоты принята схема напряженного состояния образца перед разрушением (фиг. 20).

Разрушающая нагрузка $P_{\text{разр}}$ при этих условиях определяется из уравнения равновесия

$$P_{\text{разр}} = [\sigma_b] f_k \sin \alpha; \quad (1)$$

здесь $[\sigma_b]$ — величина предельного сопротивления бетона на поверхности $a-a$ в условиях объемного неравномерного сжатия. Площадь f_k поверхности $a-a$ может быть представлена в виде

$$f_k = \frac{\pi d_0^2}{4} \left(\frac{D + l_0}{l + d_0} \right) \sin^3 \alpha = f_{\text{ум}} \left(\frac{D + l}{l + d_0} \right)^2 \sin^2 \alpha,$$

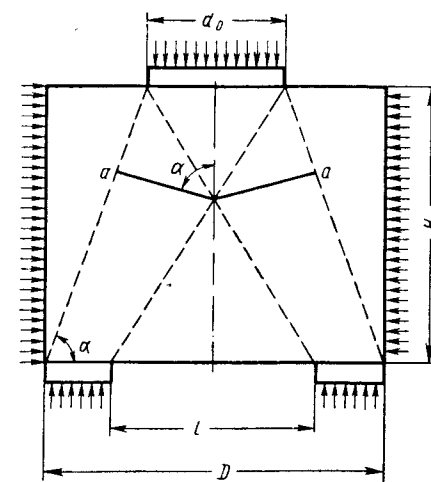
где

$$f = \frac{\pi d_0^2}{4}.$$

Для определения α пользуемся формулой

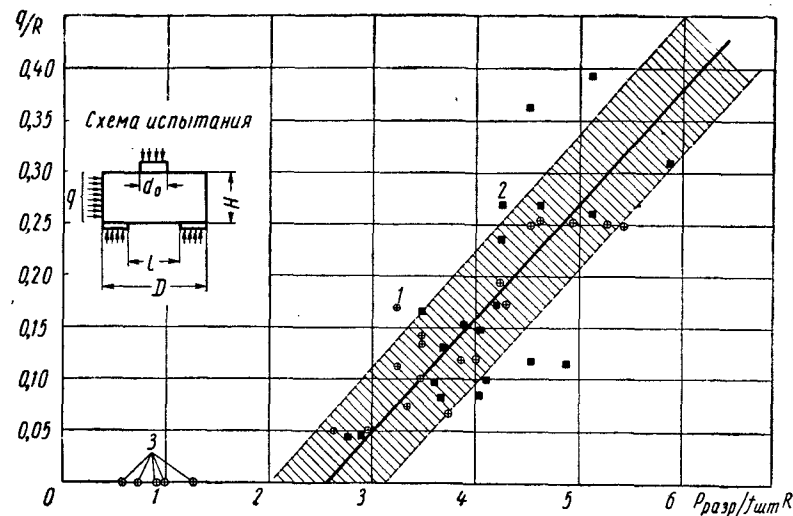
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2H}{D - d_0}.$$

Величина сопротивления бетона $[\sigma_b]$ на поверхности $a-a$ определена на основании результатов испытания образцов серий ВП и КПО.



Фиг. 20. Схема распределения главных сжимающих напряжений в толстой цилиндрической плите, принятая для расчета.

При достаточно большой высоте образца ($\frac{H}{D} > 1$), малой величине условного пролета ($\frac{l}{D} \approx 0$) и $d_0 = D$ рассматриваемая модель превращается в элемент, где бетон находится в усло-



Фиг. 21. График зависимости разрушающей нагрузки от величины предварительного напряжения:

1 — образцы серии ВП; 2 — образцы серии КПО; 3 — образцы серии ВП без обоямы.

виях всестороннего неравномерного сжатия при $\sigma_1 = \sigma_2 = q_1 = \sigma_0$; $\sigma_3 > q_1$. Как известно, условие прочности бетона в этом случае имеет вид

$$\sigma_3 = \sigma_3 = R_{np} + 4\sigma_0, \quad (2)$$

и разрушающая нагрузка определяется выражением

$$P_{разр} = (R_{np} + 4\sigma_0) - \frac{\pi D^2}{4},$$

где σ_3 — удельное давление под штампом;

R_{np} — предельная прочность бетона;

σ_0 — величина бокового давления на бетон.

При изменении соотношений σ_1 , σ_2 и σ_3 , а также величин D/d_0 и l/D условие (2) видоизменяется (фиг. 21).

По результатам испытания образцов серий ВП и КПО получена зависимость между $P_{разр}$, R_{np} и q :

$$P_{разр} = (3,65R_{np} + 9q) f_{шт}$$

или, в общем виде,

$$P_{разр} = a(R_{np} + bq) f_{шт}. \quad (3)$$

Приравняв правые части выражений (1) и (3), найдем

$$\sigma_0 f_k \sin \alpha = a(R_{np} + bq) f_{шт}$$

или, подставляя значения f_k и сокращая $f_{шт}$, получим

$$\sigma_0 = \frac{a(R_{np} + bq)}{\left(\frac{D+l}{l+d_0}\right)^2 \sin^4 \alpha}. \quad (4)$$

Таким образом, условие прочности бетона в сечении $a-a$ зависит от соотношений геометрических размеров образца, диаметров штампа и кольца.

Анализируя результаты испытаний всех образцов (серий ВП, КПО и КПБ) и используя выражения (2) и (4), получили следующую эмпирическую формулу для определения нагрузки, разрушающей образец:

$$P_{разр} = (R_{np} + 4\sigma_0) 0,175\pi d_0 D \left(\frac{D+l}{l+d_0}\right) \sin^4 \alpha \eta_{тр}, \quad (5)$$

где $\sigma_0 = 1,2 \frac{H}{D} q$;

$\eta_{тр}$ — коэффициент, учитывающий влияние трения на поверхностях образца;

$$\eta_{тр} = \frac{H + 0,1D}{H}.$$

Условием применения формулы является равенство

$$f_{шт} \leq F_k,$$

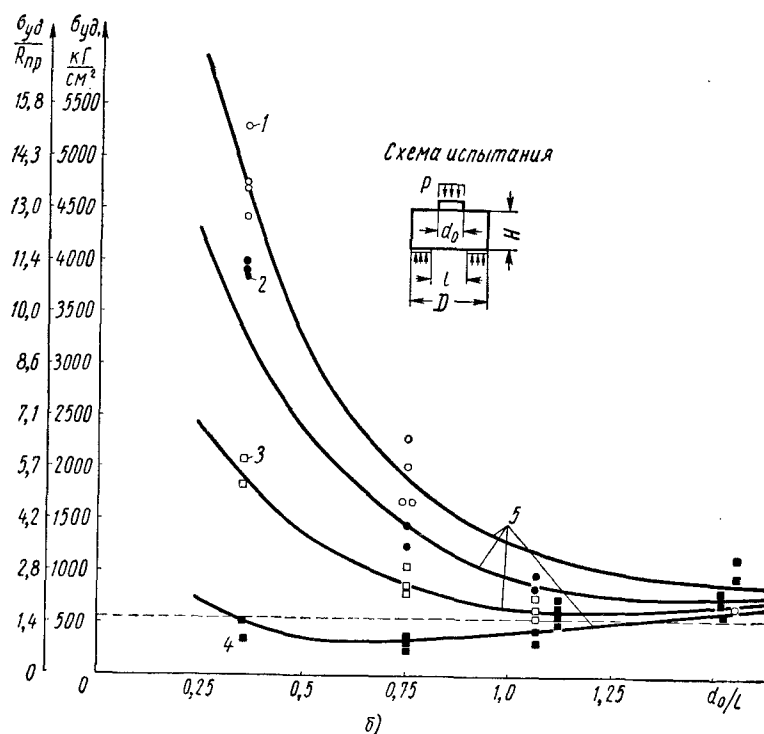
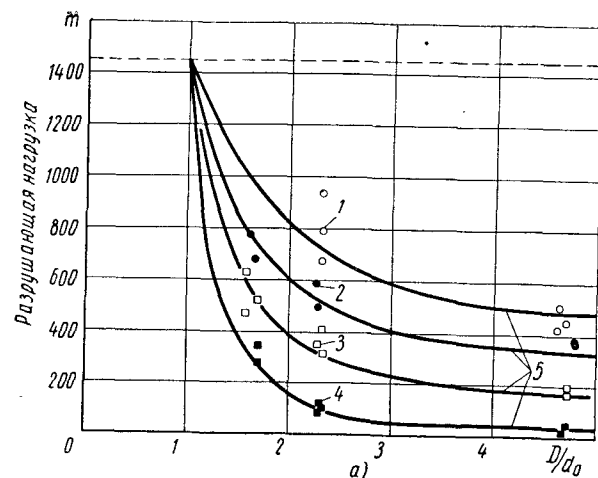
где F_k — площадь опорного кольца.

Для проверки правильности принятых предпосылок вычислены значения $P_{разр}$ для плит, размеры которых соответствуют образцам серии КПБ. По результатам вычислений построены теоретические графики зависимости величины разрушающей нагрузки от высоты плиты и диаметра штампа при $\frac{l}{D} = 0,6$ (фиг. 22, а).

Получено хорошее согласование результатов опыта и значений, вычисленных по формуле (5).

При одинаковой высоте плиты разрушающая нагрузка резко снижается при изменении отношения $\frac{D}{d_0}$ от 1 до 2. При увеличении $\frac{D}{d_0}$ до 5 разрушающая нагрузка снижается менее интенсивно. С увеличением высоты плиты характер изменения $P_{разр}$ остается неизменным, но абсолютное значение разрушающей нагрузки повышается.

Представляется интересным проследить, в каких пределах изменяется величина удельного давления под штампом σ_y (фиг. 22, б).



Фиг. 22. Сравнение теоретических и опытных значений разрушающей нагрузки (а) и удельного давления под штампом (б) при разрушении:

1—4 — опытные данные при: $\frac{H}{D} = 0,8$ (1); $\frac{H}{D} = 0,6$ (2); $\frac{H}{D} = 0,4$ (3) и $\frac{H}{D} = 0,2$ (4); 5 — теоретические графики.

При постоянных прочности бетона R_{np} и увеличении предварительного напряжения q среднее удельное давление при разрушении зависит от диаметра штампа $\frac{d_0}{l}$ и высоты образца $\frac{H}{D}$.

Для образца серии КПБ ($q = 60 \text{ кг/см}^2$, $R \approx 500 \text{ кг/см}^2$ и $l = 0,55D$) характер графика σ_{yd} , $\frac{d_0}{l}$ изменяется в зависимости от высоты плиты. При $\frac{H}{D} = 0,2$ величина σ_{yd} составляла примерно $2R_{np}$ для $\frac{d_0}{l} = 0,25$ и $\frac{d_0}{l} = 1,5$. Для промежуточных значений $\frac{d_0}{l}$ предельное давление под штампом снизилось до $\sigma_{yd} = R_{np}$.

При $\frac{H}{D} = 0,8$ величина удельного давления под штампом при малых диаметрах штампа достигала 14—15 R_{np} . С увеличением диаметра штампа эта величина снижается и стремится к некоторому значению, которое может быть вычислено по формуле (5), полагая в ней $d_0 = D$ и $\sin \alpha = 1$:

$$\sigma_{yd} = 1,43 (R_{np} + 4\sigma_0) \eta_{mr}.$$

Это значение для образцов серии КПБ изменяется от 530 до 570 кг/см^2 и в среднем может быть примерно равным 550 кг/см^2 ($1,5R_{np}$).

Расчет цилиндрических архитравов железобетонных станин прессов

Результаты исследования несущей способности круглых железобетонных предварительно напряженных плит могут быть использованы для расчета цилиндрических архитравов станин при учете следующих особенностей работы реальной конструкции.

1. Опираение архитрава в большинстве случаев осуществляется не по кольцевой площади, а по части кольца (на сегменты).

2. Во многих случаях отсутствует трение на опорном кольце архитрава.

3. Имеется некоторое защемление архитрава в стенках станины, которое появляется при натяжении продольной арматуры, присоединяющей архитрав к стенам.

4. Штамп, передающий нагрузку, может быть недостаточно жестким, что вызывает некоторое изменение распределения давления под штампом.

Опираение на сегменты и отсутствие трения на опорах, по-видимому, дадут некоторое снижение разрушающей нагрузки по сравнению со свободно опирающимися плитами. Это снижение отчасти компенсируется защемлением архитрава в стенках. Что касается формы эпюры распределения напряжений под штампом, то по полученным данным она почти не влияет на величину разрушающей нагрузки.

Поэтому для расчета цилиндрических архитравов может быть использована предложенная нами эмпирическая формула с некоторыми изменениями, учитывающими особенности работы архитравов и снижение несущей способности этого элемента пресса вследствие многократного приложения нагрузки.

По результатам опытов имеем, что при опирании на сегменты с соотношением площади опирания $F_{сегм}/F_k \geq 0,6$ разрушающая нагрузка снижается на 10—15%.

Влияние трения сильнее сказывается на образцах малой высоты. Поэтому в формуле (5) поправочный коэффициент $\eta_{np} = \left(\frac{H/D + 0,1}{H/D} \right)$ должен быть принят равным единице.

После введения таких поправок для расчета цилиндрических архитравов может быть предложена следующая формула для предельного состояния:

$$P_{разр} = 0,15\pi d_0 D (R_{np}^n + 4\sigma_0) \left(\frac{D+l}{l+d_0} \right) \sin^4 \alpha.$$

Обозначая

$$\left(\frac{D+l}{l+d_0} \right)^2 \sin^4 \alpha = K^2,$$

получим окончательно

$$P_{разр} = 0,15\pi d_0 D (R_{np}^n + 4\sigma_0) K^2. \quad (6)$$

Переходя к расчетному предельному состоянию по несущей способности, получаем расчетную формулу

$$k P_{экспл} \leq m 0,15\pi d_0 D K^2 (R_{np} + 4\sigma_0), \quad (7)$$

где k — коэффициент перегрузки, принимаемый по техническому заданию на пресс;

R_{np} — расчетное сопротивление бетона, принимаемое по Строительным нормам и правилам, ч. II, разд. В, гл. I. «Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования», 1962 (СН и П II-В. 1-62).

При тяжелых режимах работы и многократном повторении нагрузки возможное снижение несущей способности архитрава можно учесть введением коэффициента $k_1 = 0,8$ в формуле (7).

При выборе величины обжатия необходимо соблюдать условия

$$q \leq 0,3 R_{np}.$$

Из этого условия подбираем сечение проволоочной обоймы по формуле

$$q_1 = \frac{nP}{D/2d_{np}},$$

где n — число слоев обоймы;

P — усилие в проволоке при навивке ее на бетонный сердечник архитрава. Величина P определяется возможностями наличного оборудования. При выборе P необходимо соблюдать условие

$$\frac{P}{f_{np}} \leq 0,4 R_a^n;$$

здесь D — диаметр архитрава;

d_{np} — диаметр проволоки.

$$q_1 = q + \Delta q,$$

где Δq — возможные потери предварительного обжатия в бетоне (подсчитываются по СН и П).

Ширина опорного кольца выбирается по конструктивным соображениям из условия размещения продольной арматуры станины.

Выводы

1. Рассмотренная конструкция архитрава станины пресса в виде толстой железобетонной предварительно напряженной круглой плиты обеспечивает необходимую прочность станины при достаточно экономном расходе стали. Например, плита из бетона марок «500»—«600» диаметром 52 см и высотой 40 см при диаметре нагружающего штампа 22,5 см и армированная предварительно напряженной проволокой, составляющей 2,5% от объема бетона, выдерживает усилие 800—1000 т (серия КПО и КПБ).

При таких же соотношениях размеров, но при внешнем диаметре в 2,5 раза большем, плита выдерживала усилие примерно в 2,5 раза выше (до 2300 т).

2. Экспериментальное исследование показало, что прочность круглой толстой плиты пропорциональна высоте плиты, марке бетона, величине предварительного обжатия и в значительной степени зависит от диаметра штампа, передающего нагрузку.

При $\frac{H}{D} > 1$, $\frac{d_0}{D} = 1$ и $l = 0$ рассматриваемая конструкция превращается в элемент, находящийся под действием равномерно распределенной по торцам сжимающей нагрузки.

3. Предлагаемые для расчета формулы (6) и (7) действительны для плит большой высоты при

$$0,2 < \frac{H}{D} < 1,0 \text{ и } f_{шт} \leq F_k.$$

4. Боковое обжатие плиты рекомендуется принимать равным или не более 0,2—0,3 кубиковой прочности бетона.

5. Диаметр штампа, передающего нагрузку, наиболее выгодно принимать из условия $\frac{D}{d_0} \leq 2$. В этом случае прочность конструкции наиболее высокая.

При передаче усилия пресса через пирамиду штампов необходимо, чтобы угол распределения напряжений был не более 35—40°.

6. Полученную по расчету высоту архитрава необходимо дополнительно откорректировать из условий заданной жесткости станины.

Инж. ЗОММЕР И. Э.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ОБЖАТИЯ БЕТОННОГО ЦИЛИНДРА ПРИ НАВИВКЕ НАПРЯЖЕННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ СПИРАЛЬНОЙ ОБОЙМЫ

При конструировании станин железобетонных прессов и силовых рам ряда других машин была установлена целесообразность выполнения их в виде объемно-напряженных трубчатых элементов.

Цилиндрическая форма позволяет осуществить двухосное предварительное обжатие таких элементов посредством непрерывной спиральной навивки высокопрочной напряженной проволоки. Этот метод навивки наиболее прогрессивен, так как может быть механизирован путем применения арматурно-намоточных машин.

В НИИЖБ проводилось изучение влияния величины предварительного бокового обжатия на несущую способность цилиндрических элементов. При этом было установлено, что несущая способность пропорциональна величине предварительного обжатия бетона.

Обжатие бетона, создаваемое одним слоем сплошной напряженной обмотки, навиваемой на бетонный цилиндр-сердечник, определяется по формуле

$$q_1 = \frac{P}{ar_1} \text{ кг/см}^2, \quad (1)$$

где q_1 — предварительное обжатие бетона (без учета потерь) от навивки одного слоя в кг/см^2 ;

P — контролируемое усилие навивки в проволоке в кг ;

a — шаг навивки в см (при сплошной навивке шаг равен диаметру проволоки d_{np});

r_1 — радиус однослойной напряженной обмотки,

$$r_1 = r + d_{np}/2 \text{ см};$$

здесь r — радиус цилиндра-сердечника в см .

Учитывая, что радиусы цилиндрических бетонных конструкций для машиностроения относительно велики по сравнению с $d_{np}/2$, для практических расчетов следует принимать $r_1 = r$.

Для создания необходимой величины предварительного обжатия бетона количество слоев напряженной проволоки в имеющихся проектах станин прессов доходит до 10 (например, архитравы станины пресса ТЖБ-150).

В настоящее время при проектировании прессов не учитываются некоторые факторы, влияющие на потери предварительного напряжения при многослойной навивке, так как они не исследованы. Ниже проделан анализ существующей методики и изложена предлагаемая автором методика определения установившейся величины предварительного обжатия (q) в бетонном цилиндре при навивке на него многослойной напряженной обоймы.

Сделан ряд предложений о порядке учета потерь предварительного напряжения, из которых некоторые подтверждены экспериментами и могут быть рекомендованы к применению.

Применяемая методика определения величины q

Для удобства расчета по высоте обоймы выделяется «расчетный пояс», т. е. условно вырезанный бетонный диск и соответствующая ему часть обоймы, относительно которых ведется расчет усилий в обойме и соответственно напряжений в бетоне. Высота этого пояса обычно принимается 1 см.

Установившееся напряжение q в бетоне определяется из условия равновесия внешних (обойма) усилий и внутренних (бетон) напряжений по формуле

$$q = \frac{S}{r} \text{ кг/см}^2, \quad (2)$$

где r — радиус бетонного цилиндра-сердечника в см;

S — установившееся усилие в многослойной обойме (с учетом потерь и отнесенное на расчетный пояс) в кг/см.

Установившееся усилие в обойме определяется по формуле

$$S = \frac{(P - P')m}{d_{np}} \text{ кг/см}, \quad (3)$$

где P — контролируемое усилие навивки в проволоке в кг;

P' — суммарные потери усилия в проволоке в кг;

m — количество слоев многослойной обоймы;

d_{np} — диаметр навиваемой проволоки в см.

Суммарные потери усилия в проволоке определяются по формуле

$$P' = \sigma_n F_{1np} \text{ кг}, \quad (4)$$

где σ_n — суммарные потери предварительного напряжения в кг/см²;

F_{1np} — площадь поперечного сечения навиваемой проволоки в см².

Суммарные потери предварительного напряжения определяются по формуле

$$\sigma_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_6 + \sigma_{упр. обж}^m \text{ кг/см}^2, \quad (5)$$

где

σ_1 — потери напряжения в обойме от усадки бетона;

σ_2 — потери напряжения в обойме от ползучести бетона;

σ_3 — потери напряжения в обойме от релаксации напряжений в проволочной обойме;

σ_6 — потери напряжения в обойме от смятия бетона под витками проволоки;

$\sigma_{упр. обж}^m$ — потери напряжения в нижнем слое многослойной обоймы от упругого обжатия бетона в ходе навивки последующих слоев.

Определение этих потерь в проектах, разработанных до 1963 г., осуществлялось согласно требованиям инструкции СН 10-57 (в настоящее время — согласно требованиям Строительных норм и правил).

Величина $\sigma_{упр. обж}^m$ определяется по формуле

$$\sigma_{упр. обж}^m = \sigma'_{упр. обж} (m - 1) \text{ кг/см}^2, \quad (6)$$

где $\sigma'_{упр. обж}$ — потери напряжения в первом слое от упругого обжатия бетона в ходе навивки второго слоя.

Величина $\sigma'_{упр. обж}$ определяется по формуле

$$\sigma'_{упр. обж} = q_1 \frac{E_a}{E_b} \text{ кг/см}^2, \quad (7)$$

где q_1 — величина обжатия бетона от навивки одного слоя обоймы [определяется по формуле (1)] в кг/см²;

E_a — модуль упругости навиваемой проволоки;

E_b — модуль упругости бетона.

Анализ применяемой методики

В настоящее время при определении потерь предварительного напряжения от последовательной навивки пользуются значением $\sigma_{упр. обж}^m$, полученным по формуле (6). Величина $\sigma_{упр. обж}^m$ в одинаковой мере относится ко всем слоям обоймы [см. формулу (5)], хотя в действительности величина этих потерь снижается с каждым слоем, а в последнем слое их вообще нет. Таким образом, применяется прямоугольная эпюра распределения этих потерь по толщине обоймы вместо треугольной. Следовательно, применяемая в расчетах методика приводит к увеличению этих потерь примерно 2 раза.

Величина потерь предварительного напряжения от последовательной навивки меняется по слоям. По этой причине от последовательной навивки удобнее определять не потери напряжения,

а потери усилия. Для определения усилия в многослойной обойме (отнесенной на расчетный пояс), с учетом потерь от упругого обжатия бетона в ходе последовательной навивки слоев, предлагается формула

$$S_1 = mP - \Delta P [(m-1) + (m-2) + \dots + 1] \text{ кг}, \quad (8)$$

где m — количество слоев в многослойной обойме;

P — контролируемое усилие натяжения в проволоке в кг;

ΔP — потери усилия (отнесенные на расчетный пояс) в любом из слоев обоймы от навивки последующего слоя в кг.

При навивке очередного слоя многослойной обоймы относительные радиальные деформации бетонного цилиндра возрастают на определенную величину. На такую же величину возрастают деформации во всех предыдущих слоях обоймы, приводящие к потерям предварительного напряжения. Это означает, что от навивки очередного слоя все предыдущие слои теряют одинаковую величину усилия ΔP .

При одинаковой величине контролируемого усилия навивки для всех слоев и при небольшой величине отношения q/R (как это имеет место в архитравах станин) можно с некоторым приближением принять, что величина ΔP является постоянной при навивке всех слоев.

Величина ΔP определяется по формуле

$$\Delta P = q_1 F_{1np} \frac{E_a}{E_b k_2} \text{ кг}, \quad (9)$$

где q_1 — предварительное обжатие бетона (без учета потерь) от навивки одного слоя обоймы в кг/см^2 , определенное по формуле (1);

F_{1np} — площадь поперечного сечения навиваемой проволоки в см^2 ;

k_2 — коэффициент, учитывающий двухосное напряжение бетона.

Для проверки правильности предлагаемой формулы (8) был проведен эксперимент, в ходе которого была навита трехслойная обойма на четыре бетонные модели диаметром 60 см. Во время навивки обоймы, при помощи тензодатчиков сопротивления измерялись деформации бетонного цилиндра-сердечника и арматурных колец нижних слоев. Эксперимент подтвердил правильность положений, использованных при выводе формулы (8), в связи с чем она может быть рекомендована для применения.

Важным вопросом является также порядок учета потерь напряжения от вмятия витков. Согласно СН и П II-В. 1-62 эти потери σ_b принимаются равными 300 кг/см^2 и учитываются при диаметре бетонного цилиндра $D_{цил} < 3 \text{ м}$.

Величиной, непосредственно определяющей вдавливание проволоки в бетон, является удельное радиальное давление P_r ,

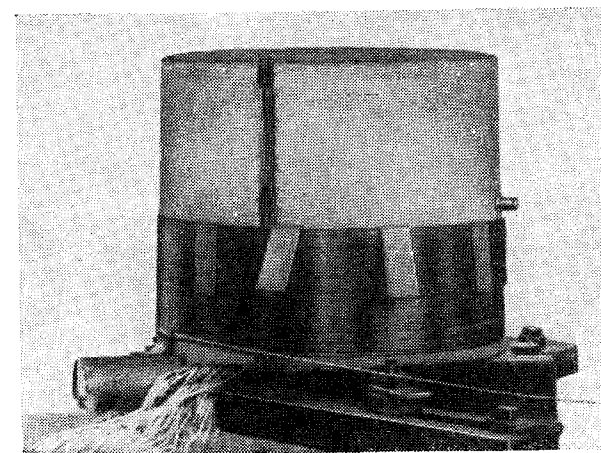
определяемое по формуле

$$P_r = \frac{P}{r \cdot d_{np}} \text{ кг/см}^2. \quad (10)$$

Наиболее распространенной для напряженной обоймы является высокопрочная проволока диаметром 5 мм. При навивке такой проволоки усилием $P = 2100 \text{ кг}$ на цилиндр диаметром 3 м удельное радиальное давление будет

$$P_r = \frac{2100}{150 \cdot 0,5} = 28 \text{ кг/см}^2.$$

В условиях однослойной обоймы величина P_r при $D_{цил} > 3 \text{ м}$ всегда будет меньше 28 кг/см^2 .



Навивка спиральной обоймы на бетонную модель при помощи поворотного стола.

В случае же многослойной обоймы радиальное давление от всех слоев передается на бетон через контактную спираль первого слоя. Поэтому даже при значительно больших диаметрах цилиндра P_r может значительно превышать условное предельное значение при намотке одного слоя.

Так, например, при навивке десяти слоев с усилием $P = 2100 \text{ кг}$ на архитрав станины ТЖБ-150 с радиусом 700 см

$$P_r = \frac{2100 \cdot 10}{700 \cdot 0,5} = 60 \text{ кг/см}^2;$$

в приведенных расчетах не учитываются потери.

Аналогично можно рассчитать величины P_r при $D_{цил} = 3,0 \text{ м}$ для обоймы из проволоки других диаметров. Так, для $d_{np} = 4 \text{ мм}$ и 3 мм P_r имеет величину соответственно 24 и 19 кг/см^2 .

Очевидно, что при навивке многослойной напряженной спиральной обоймы следует учитывать потери предварительного напряжения от вмятия витков (σ_0) при любом диаметре бетонного цилиндра, если удельное радиальное давление обоймы на бетон P , больше принятых условных предельных значений — 28; 24 и 19 кг/см^2 соответственно для обоймы из проволоки диаметром 5; 4 и 3 мм. Величину этих потерь следует принять согласно указаниям СН и П, т. е. 300 кг/см^2 .

Во время навивки напряженной обоймы на массивный железобетонный цилиндр, последний приобретает двухосное обжатие. Поскольку величина предварительного обжатия бетона в архитравах прессов не превышает $0,3R$, можно с некоторым приближением принять, что бетон работает в упругой стадии. Закон Гука при плоском напряженном состоянии выражается уравнениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x).\end{aligned}\quad (11)$$

Так как речь идет о бетонном цилиндре, подвергнутом симметричному обжатию обоймой, то уравнения (11) являются идентичными, и зависимость, выражаемая ими, может быть записана одним уравнением

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_0} q (1 - \mu) = \frac{q}{E_0} (1 - \mu). \quad (12)$$

Бетонные элементы машин работают в упругой стадии, поэтому для практических расчетов коэффициент Пуассона можно принять постоянным, $\mu = 0,18$.

Тогда уравнение (12) принимает вид

$$\varepsilon_r = \frac{q}{E_0} (1 - 0,18) = \frac{q}{E_0} 0,82. \quad (13)$$

Решив это уравнение относительно величины предварительного обжатия q , получаем

$$q = \frac{\varepsilon_r E_0}{0,82} = 1,22 \varepsilon_r E_0 = k_2 \varepsilon_r E_0, \quad (14)$$

где $k_2 = 1,22$.

Отсюда следует, что при обжатии цилиндрических бетонных конструкций спиральной напряженной обоймой обжатие q бетона пропорционально относительным радиальным деформациям цилиндра; только наряду с E_0 следует ввести еще один коэффициент пропорциональности k_2 , учитывающий двухосное напряжение бетона.

Для определения потерь предварительного напряжения от ползучести бетона σ_2 при натяжении арматуры на бетон пользуются эмпирической формулой

$$\sigma_2 = \frac{0,75 k E_a R}{E_0 R_0} \sigma_0 \text{ кг/см}^2, \quad (15)$$

где k — коэффициент, равный единице при применении холодно-тянутой проволоки;

E_a — модуль упругости арматуры в кг/см^2 ;

E_0 — модуль упругости бетона при сжатии в кг/см^2 ;

R — марка бетона (прочность на сжатие на 28-й день твердения в кг/см^2);

R_0 — кубиковая прочность бетона к моменту передачи на него предварительного напряжения арматуры (навивки обоймы) в кг/см^2 ;

σ_0 — напряжение в бетоне до проявления потерь, происходящих после обжатия бетона, в кг/см^2 .

Формула (15) определяет конечное значение величины потерь напряжения, а соответственно, и значений деформаций. Но эта формула получена в результате исследования явлений ползучести бетона, загруженного по одной оси.

Измерения деформаций бетонных цилиндров, проведенные в ходе навивки на них напряженной обоймы, а также измерение роста этих деформаций во времени, позволяют сделать предварительный вывод, что в условиях двухосного обжатия ползучесть бетона проявляется интенсивнее, чем при одноосном напряжении. Так, например, автором были произведены такие измерения при помощи переносного индикатора с базой 1200 мм в ходе навивки трехслойной обоймы на верхней архитравстанины пресса ПЖБ-800. Измерения проводились в течение трех недель. За этот сравнительно короткий период проявились практически все деформации от ползучести бетона, которые могут быть определены по формуле (15). Это ставит под сомнение справедливость формулы (15) для конкретных условий.

Для проверки этих положений необходимо провести аналогичные измерения на большем количестве моделей или конструкций и в течение более длительного времени. В настоящее время в ходе расчетов временно следует пользоваться формулой (15).

Предлагаемая методика определения величины q

Определение установившегося предварительного напряжения q бетона предлагается вести в следующем порядке.

1. Высота расчетного пояса принимается равной d_{np} . Определение усилия S_1 в многослойной обойме с учетом потерь от упругого обжатия бетона в ходе последовательной навивки слоев по формуле (8).

2. Определение суммарной величины потерь напряжения σ_n от усадки (σ_1) и ползучести (σ_2) бетона, от релаксации напряжений в проволоке (σ_3) и от вмятия витков (σ'_6) по формуле

$$\sigma_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma'_6 \text{ кг/см}^2. \quad (16)$$

Величины σ_1 , σ_2 и σ_3 определяются согласно СН и П II-В. 1-62. Соображения о порядке определения σ'_6 для случая обжатия цилиндрической конструкции многослойной обоймы были изложены выше, в разделе анализа существующей методики.

3. Определение суммарной величины потерь усилия S_2 от усадки, ползучести, релаксации и вмятия витков по формуле

$$S_2 = F_{1np} m \sigma_n \text{ кг}. \quad (17)$$

4. Определение установившегося усилия в обойме по формуле

$$S = S_1 - S_2 \text{ кг}. \quad (18)$$

5. Определение значения установившегося предварительного напряжения q в бетоне по формуле

$$q = \frac{S}{rd_{np}} \text{ кг/см}^2. \quad (19)$$

По сравнению с применяемой, предлагаемая методика более точно учитывает специфику работы и условия возведения цилиндрических конструкций в напряженной обойме, а соответственно и факторы, влияющие на потери предварительного напряжения.

Внесенные в статью рекомендации следует рассматривать как предварительные, и работа по изучению потерь напряжения (особенно потерь от ползучести бетона) в многослойной обойме должна быть продолжена.

ЛИТЕРАТУРА

Строительные нормы и правила: Ч. II, разд. В, гл. 1, «Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования» (СН и П II-В. 1-62. Госстройиздат, 1962).

Канд. техн. наук ХЛЕБНОЙ Я. Ф.

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К РАСЧЕТУ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРЕССОВ

В статье рассмотрены задачи о расчете плоского элемента, имеющего форму кругового сектора, нагруженного краевыми нагрузками, и сплошного кругового цилиндра, нагруженного осесимметричной нагрузкой. Эти задачи имеют между собой некоторое сходство, поэтому для их решения применен единый метод.

Решение задач проведено приближенным способом на основе вариационного принципа Кастильяно, разработанного применительно к рассматриваемому классу задач Тимошенко С. П. [16], Папковичем П. Ф. [11], Филоненко-Бородичом М. М. [3], [4].

Вариационный метод расчета сплошных и полых цилиндров с использованием уравнения Кастильяно подробно разработан Бидерманом В. Л. В статье сделана попытка подобрать такие функции напряжений, которые удовлетворяли бы однородным статическим условиям на торцах при нагружении боковой поверхности цилиндра и, наоборот.

Ставя своей целью проиллюстрировать метод, мы не стремились достигнуть большой точности результатов расчета и ограничились только первыми приближениями. Однако, как показано в работе, даже первые приближения для основных группы усилий дают вполне удовлетворительные результаты.

Плоская задача секториального профиля

Основные уравнения и подбор функции напряжений. Рассматривая условия равновесия элемента $ABCD$ (фиг. 1), получим уравнения

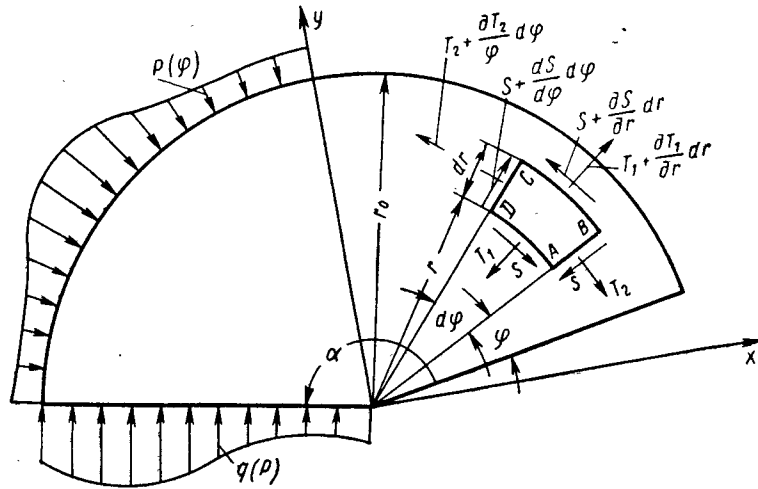
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial S}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (T_1 - T_2) &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{2}{r} S &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Положительные направления усилий и координат показаны на фиг. 1.

Если компоненты усилий выразить через функцию напряжения Эйри при помощи формул

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r}; & T_2 &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}; \\ S &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r \cdot \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (2)$$

то уравнения равновесия (1) будут удовлетворяться при произвольном выборе функции $F(r, \varphi)$. Однако произвол в выборе



Фиг. 1. К выводу уравнений равновесия в полярной системе координат.

$F(r, \varphi)$ ограничивается подчинением последней условию совместности деформаций.

Будем искать решение системы уравнений (1) в виде

$$\begin{aligned} T_1 &= T_1^0 + T_1^\kappa, & T_2 &= T_2^0 + T_2^\kappa, \\ S &= S^0 + S^\kappa, \end{aligned} \quad (3)$$

где T_1^0, T_2^0, S^0 — решения, дающие нулевые значения на контуре; $T_1^\kappa, T_2^\kappa, S^\kappa$ — решения неоднородной системы уравнений, удовлетворяющие только заданным контурным условиям.

Введем безразмерную координату

$$\varrho = \frac{r}{r_0}; \quad 0 \leq \varrho \leq 1 \quad (4)$$

и перепишем выражения (2) в новой независимой переменной

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{r_0^2 \varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r_0 \varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi}; \\ T_2 &= \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2}, & S &= -\frac{1}{r_0 \varrho} \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho \partial \varphi} + \frac{1}{r_0^2 \varrho^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Функцию напряжений представим также в виде двух слагаемых

$$F(\varrho, \varphi) = F^0(\varrho, \varphi) + F^\kappa(\varrho, \varphi), \quad (6)$$

каждое из которых будем рассматривать в виде

$$F^0(\varrho, \varphi) = \sum a_{mn} R_{om}(\varrho) \Phi_{on}(\varphi); \quad (7)$$

$$F^\kappa(\varrho, \varphi) = R_\kappa(\varrho) \Phi_\kappa(\varphi), \quad (8)$$

где $m, n = 1, 2, 3, \dots$, a_{mn} — параметры, подлежащие определению.

Подставляя F^0 из уравнения (7) в выражение (5) и требуя выполнения нулевых значений на контуре, т. е.

$$T_1^0 = \frac{1}{r_0^2} \sum a_{mn} \left(\frac{R_{om}}{\varrho^2} \Phi_{on}'' + \frac{R_{om}'}{\varrho} \Phi_{on} \right) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \varrho = 0, \\ \varrho = 1 \end{array} \right.; \quad (9)$$

$$T_2^0 = \frac{1}{r_0^2} \sum a_{mn} R_{om}'' \Phi_{on} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \varphi = 0, \\ \varphi = \alpha \end{array} \right.; \quad (10)$$

$$S^0 = \frac{1}{r_0^2} \sum a_{mn} \left(\frac{R_{om}}{\varrho^2} - \frac{R_{om}'}{\varrho} \right) \Phi_{on}' = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \varrho = 0, \varrho = 1 \\ \varphi = 0, \varphi = \alpha, \end{array} \right. \quad (11)$$

нетрудно подобрать функции R_{om} и Φ_{on} , удовлетворяющие условиям (10).

Примем, например,

$$R_{om} = (\varrho - 1)^2 \varrho^{3m}; \quad (12)$$

$$\Phi_{on} = (\alpha - \varphi)^2 \varphi^{2n}. \quad (13)$$

Отсюда функция $F^0(\varrho, \varphi)$ может быть представлена в виде

$$F^0(\varrho, \varphi) = \sum a_{mn} R_{om} \Phi_{on} = \sum a_{mn} (\varrho - 1)^2 \varrho^{3m} (\alpha - \varphi)^2 \varphi^{2n}, \quad (14)$$

где $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Подставляя в выражения (5) значения $F^\kappa(\varrho, \varphi)$ из (8), получим

$$T_1^\kappa = \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{R_\kappa}{\varrho^2} \Phi_\kappa'' + \frac{R_\kappa'}{\varrho} \Phi_\kappa \right); \quad (15)$$

$$T_2^\kappa = \frac{1}{r_0^2} R_\kappa'' \Phi_\kappa; \quad (16)$$

$$S^\kappa = \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{R_\kappa}{\varrho^2} - \frac{R_\kappa'}{\varrho} \right) \Phi_\kappa'. \quad (17)$$

Функции $R_\kappa(\varrho)$ и $\Phi_\kappa(\varphi)$, как указывалось выше, удовлетворяют только контурным условиям и, следовательно, для каждого частного вида нагружения подбираются самостоятельно.

Рассмотрим случаи нагружения по контуру. При этом примем, что нагрузка симметрична относительно оси ординат (фиг. 2, а и б). При $\varrho = 1$

$$T_1^\kappa = -p(\varphi); \quad (18)$$

$$S^\kappa = 0, \quad (19)$$

а при $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$

$$T_2^\kappa = -q(\varrho); \quad (20)$$

$$S^\kappa = 0. \quad (21)$$

Из уравнений (15) и (16), учитывая соответственно условия (18) и (19), получаем

$$R_\kappa(1)\Phi_\kappa'' + R_\kappa'(1)\Phi_\kappa = -r_0^2 p(\varphi); \quad (22)$$

$$[R_\kappa'(1) - R_\kappa(1)]\Phi_\kappa' = 0. \quad (23)$$

Положив в условии (23) $\Phi_\kappa' = 0$, из формулы (22) находим, что

$$\Phi_\kappa = -\frac{r_0^2}{R_\kappa'(1)} p(\varphi) = \text{const}. \quad (24)$$

Из уравнения (16) получаем

$$R_\kappa = -\frac{r_0^2}{\Phi_\kappa} \int \int q(\varrho) d\varrho d\varphi. \quad (25)$$

Таким образом, при равенстве нулю сдвигающих усилий по всему контуру, нагрузка по криволинейной части контура может быть только постоянной. Уравновешивающая ее нагрузка, распределенная на прямолинейной части контура, может быть задана произвольно. И затем, как видно из уравнений (15)–(17) при $R = R(\varrho)$ и при $\Phi = \Phi(\varphi)$ следует, что для подбора R и Φ весь контур должен быть нагружен.

Если же самоуравновешенная нагрузка распределена только на прямолинейной части контура, а сдвигающие усилия по всему контуру равны нулю, можно положить, что

$$\Phi_\kappa(\varphi) = \text{const} = 1,$$

т. е., что

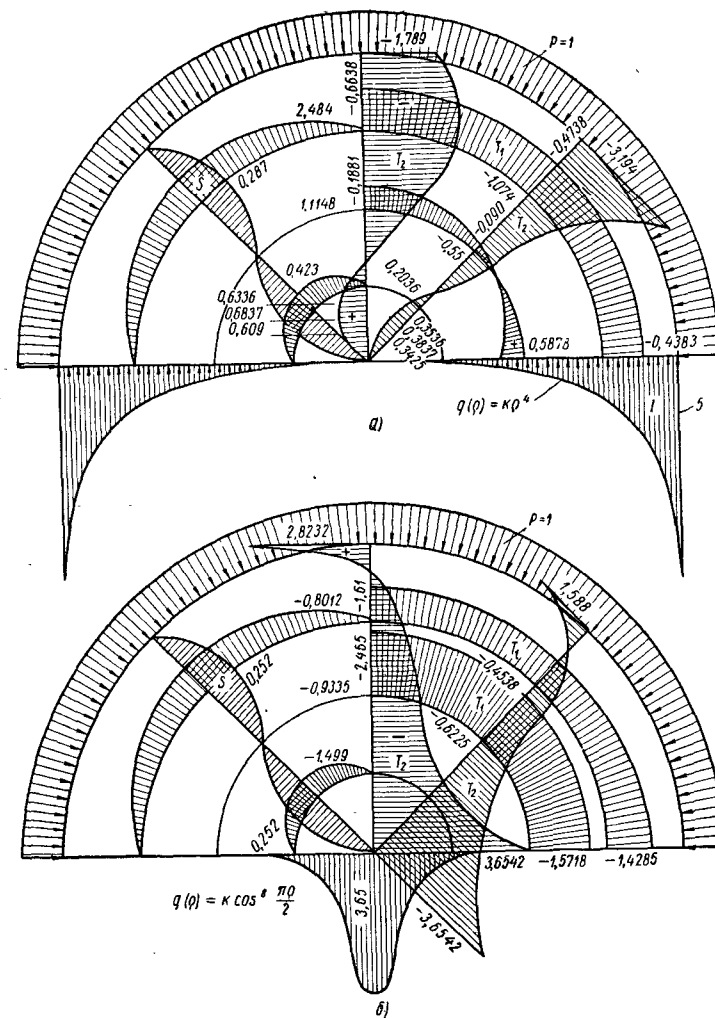
$$F^\kappa = R(\varrho). \quad (26)$$

Выражения (15)–(17) примут вид

$$T_1^\kappa = \frac{1}{r_0^2} R_\kappa'; \quad (27)$$

$$T_2^\kappa = \frac{1}{r_0^2} R_\kappa''; \quad (28)$$

$$S^\kappa = 0. \quad (29)$$



Фиг. 2. Эюры усилий в полудиске при равномерно распределенной нагрузке по криволинейному контуру и нагрузке, распределенной по прямолинейной части контура:

а — по закону $q(\varrho) = \kappa \varrho^4$; б — по закону $q(\varrho) = \kappa \cos \frac{\pi \varrho}{2}$ (где κ определяется из условия равновесия системы).

Положим, например, что прямолинейная часть контура нагружена нормальной самоуравновешенной нагрузкой

$$q(q) = q_0 \cos \pi q, \quad (30)$$

т. е., что

$$T_2^{\kappa} = \frac{1}{r_0^2} R_{\kappa}'' = q_0 \cos \pi q; \quad (31)$$

отсюда находим, что

$$R_{\kappa}' = \frac{1}{\pi} q_0 r_0^2 \sin \pi q; \quad (32)$$

$$R_{\kappa} = -\frac{1}{\pi^2} q_0 r_0^2 \cos \pi q. \quad (33)$$

Подставляя R_{κ}' из выражения (32) в формулу (27), нетрудно убедиться, что криволинейный контур свободен от нагрузки.

Самоуравновешенная нагрузка, распределенная на прямолинейном контуре вида

$$q(q) = q_0 (5q^4 - 1), \quad (34)$$

также обеспечивает криволинейный контур незагруженным. В этом легко убедиться, проделав изложенные выше выкладки.

Уравнения равновесия (1) также будут удовлетворяться, если выразить усилия T_1 , T_2 и S с помощью функции напряжения $\psi = \psi(q, \varphi)$; по таким формулам

$$T_1 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \int r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2 \partial \varphi} dr \right); \quad (35)$$

$$T_2 = r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2 \partial \varphi} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \varphi}; \quad (36)$$

$$S = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \varphi^2}. \quad (37)$$

Как и прежде, будем полагать, что

$$\psi(q, \varphi) = P(q) \Theta(\varphi). \quad (38)$$

Введя новую переменную q и учитывая выражения (38), формулы (35)–(37) перепишем в виде

$$T_1 = \frac{1}{r_0 q} \left(P \Theta'' + 2P' \Theta' + \frac{\Theta'}{r_0} \int q P'' dq \right); \quad (39)$$

$$T_2 = \frac{\Theta'}{r_0} (q P'' + 2P'); \quad (40)$$

$$S = -\frac{1}{r_0} P' \Theta''. \quad (41)$$

Полагая, что $P_{om} = R_{om}$ и $\Theta_{on} = \Phi_{on}$ [см. формулы (12) и (13)], рассмотрим здесь только функции P_{κ} и Θ_{κ} , т. е. функции,

удовлетворяющие контурным условиям. Примем при этом, что самоуравновешенной нормальной контурной нагрузкой нагружен только криволинейный контур. Сдвигающие усилия S_{κ} по всему контуру равны нулю. В этом случае можно положить $P_{\kappa} = \text{const} = 1$, т. е., что

$$\Psi^{\kappa} = \Theta_{\kappa}(\varphi). \quad (42)$$

Отсюда выражения (39)–(41) примут вид

$$T_1^{\kappa} = \frac{1}{r_0 q} (\Theta_{\kappa}'' + 2\Theta_{\kappa}') | q = 1;$$

$$T_2^{\kappa} = 0 \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} S^{\kappa} = 0 | q = 1, \varphi = 0, \varphi = \alpha. \quad (43)$$

Пусть по криволинейной части контура профиля распределена самоуравновешенная нормальная нагрузка

$$p = p(\varphi), \quad (44)$$

т. е., что

$$T_1^{\kappa} = \frac{1}{r_0} (\Theta_{\kappa}'' + 2\Theta_{\kappa}') = p(\varphi). \quad (45)$$

Отсюда $\Theta_{\kappa}(\varphi)$ определится как частный интеграл неоднородного дифференциального уравнения

$$\Theta_{\kappa}'' + 2\Theta_{\kappa}' = p(\varphi). \quad (46)$$

Таким образом, функция напряжений $F(q, \varphi)$ позволяет удовлетворить контурным условиям, когда криволинейная часть контура нагружена постоянной нагрузкой или вовсе не нагружена. Прямолинейную же часть контура возможно нагрузить произвольной нагрузкой.

С помощью функции $\psi(q, \varphi)$ есть возможность нагрузить криволинейный контур произвольной нагрузкой.

Отсюда путем наложения напряжений, определенных с помощью функций $F(q, \varphi)$ и $\psi(q, \varphi)$, можно получить ряд решений задачи при различных распределениях нагрузки по контуру профиля.

Уравнение Кастильяно. Выпишем значения усилий T_1 , T_2 , S , выражая их, например, через функцию $F(q, \varphi)$:

$$T_1 = \frac{1}{r_0^2} \sum a_{mn} \left(\frac{R_{om}}{q^2} \Phi_{on}'' + \frac{R_{om}}{q} \Phi_{on}' \right) + T_1^{\kappa};$$

$$T_2 = \frac{1}{r_0^2} \sum a_{mn} R_{om}'' \Phi_{on} + T_2^{\kappa}; \quad (47)$$

$$S = \frac{1}{r_0^2} \sum a_{mn} \left(\frac{R_{om}}{q^2} - \frac{R_{om}'}{q} \right) \Phi_{on}' + S^{\kappa}.$$

Эти усилия подобраны так, что удовлетворяют уравнениям равновесия (1) и граничным условиям, но не удовлетворяют

уравнениям совместности деформаций. Для удовлетворения последним воспользуемся вариационным уравнением Кастильяно

$$V = \frac{1}{2Eh} \iint [T_1^2 + T_2^2 - 2\nu T_1 T_2 + 2(1-\nu) S^2] r \cdot dr \cdot d\varphi, \quad (48)$$

где E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина профиля.

Усилия, удовлетворяющие уравнениям равновесия и уравнениям неразрывности деформации, реализуют минимум V .

Внося значения T_1 , T_2 , S из уравнений (47) в условие

$$\frac{\partial V}{\partial a_{mn}} = 0, \quad (49)$$

положив при этом $\nu = 0$, а также имея ввиду, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial a_{mn}} &= \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{R_{om}}{q^2} \Phi_{on}'' + \frac{R_{om}}{q} \Phi_{on}' \right); \\ \frac{\partial T_2}{\partial a_{mn}} &= \frac{1}{r_0^2} R_{om} \Phi_{on}; \quad \frac{\partial S}{\partial a_{mn}} = \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{R_{om}}{q^2} - \frac{R_{om}'}{q} \right) \Phi_{on}', \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

получим для определения параметров a_{mn} систему линейных уравнений вида

$$\iint \left[(T_1^0 + T_1^\kappa) \left(\frac{R_{om}}{q^2} \Phi_{on}'' + \frac{R_{om}}{q} \Phi_{on}' \right) + (T_2^0 + T_2^\kappa) R_{om} \Phi_{on} + \right. \\ \left. + 2(S^0 + S^\kappa) \left(\frac{R_{om}}{q^2} - \frac{R_{om}'}{q} \right) \Phi_{on}' \right] q \cdot dq \cdot d\varphi = 0, \quad (51)$$

где m и $n = 1, 2, 3, \dots$

Положим, $m = n = 1$.

Подставив в уравнение (51) значения T_1 , T_2 , S из уравнения (47), имея ввиду выражение (16) и опуская для простоты индексы, после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^1 \left[\frac{R_0^2}{q^3} \Phi_0^2 + 2 \frac{R_0 R_0'}{q^2} \Phi_0' \Phi_0 + \left(\frac{R_0'^2}{q} + q R_0'^2 \right) \Phi_0^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\frac{R_0'^2}{q} - 2 \frac{R_0 R_0'}{q^2} + \frac{R_0^2}{q^3} \right) \Phi_0'^2 \right] dq \cdot d\varphi = \\ & = - \int_0^a \int_0^1 \left[\frac{R_\kappa R_0}{q^3} \Phi_\kappa' \Phi_0' + \frac{R_\kappa R_0'}{q^2} \Phi_\kappa' \Phi_0 + \frac{R_\kappa' R_0}{q^2} \Phi_\kappa \Phi_0' + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{R_\kappa' R_0'}{q} + q R_\kappa' R_0' \right) \Phi_\kappa \Phi_0 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{R_\kappa' R_0'}{q} - \frac{R_\kappa R_0'}{q^2} - \frac{R_\kappa R_0'}{q^2} + \frac{R_\kappa R_0}{q^3} \right) \Phi_\kappa' \Phi_0' \right] dq \cdot d\varphi. \end{aligned} \quad (52)$$

Рассмотрим полукруглый профиль, т. е. положим $\alpha = \pi$. Вычислив для данного случая левую часть уравнения (43), получим величину

$$0,0474939\pi^5 a. \quad (53)$$

Интеграл в первой части выражения (52) зависит только от вида контурной нагрузки.

Пример 1. По всему контуру профиль нагружен равномерно распределенной (уравновешенной) нагрузкой — $p = -q = \text{const}$ (фиг. 3).

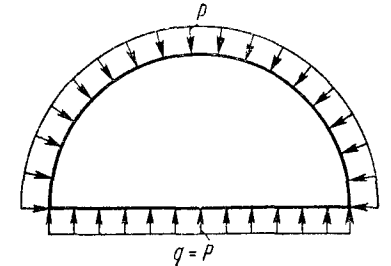
Для этого случая

$$\Phi_\kappa = -\frac{p r_0^2}{R_\kappa'(1)} = p r_0^2 = \text{const};$$

$$\Phi_\kappa' = \Phi_\kappa'' = 0;$$

$$R_\kappa = -\frac{r_0^2}{\Phi_\kappa} \int \int q(q) dq \cdot d\varphi = -\frac{1}{2} q^2;$$

$$R_\kappa' = q; \quad R_\kappa'' = 1.$$



Фиг. 3. Загружение полудиска равномерно распределенной нагрузкой по контуру.

Нетрудно убедиться, что правая часть выражения (52) равна нулю; отсюда и $a = 0$. Напряженное состояние профиля описывается формулами

$$T_1 = \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{R_\kappa'}{q} \Phi_\kappa = \frac{1}{r_0^2} (-p \cdot \frac{2}{0}) = -p; \quad (54)$$

$$T_2 = \frac{1}{r_0^2} R_\kappa'' \Phi_\kappa = \frac{1}{r_0^2} (-p \cdot \frac{2}{0}) = -p; \quad (55)$$

$$S = 0. \quad (56)$$

Пример 2. Рассмотрим случай загрузки, когда по криволинейной части контура приложена постоянная равномерно распределенная нагрузка, а по прямолинейной — уравновешивающая ее нагрузка, распределенная по параболе четвертой степени (фиг. 2, а), т. е.

$$\Phi_\kappa = -p r_0^2 = \text{const};$$

$$\Phi_\kappa' = \Phi_\kappa'' = 0;$$

$$q(q) = k q^4.$$

Коэффициент k определим из условия равновесия

$$-p = k \int_0^1 q^4 dq = k \frac{1}{5} q^5,$$

откуда

$$k = -5p.$$

Таким образом,

$$q(\varrho) = -5p\varrho^4;$$

$$R_\kappa = 5 \int \int \varrho^4 \cdot d\varrho \cdot d\varphi; \quad R'_\kappa = 5 \int \varrho^4 d\varrho = \varrho^5; \quad R''_\kappa = 5\varrho^4.$$

Вычислив для рассматриваемого случая правую часть уравнения (52), получим

$$-0,38094 \cdot 0,0333\pi^5 p r_0^2.$$

Отсюда [см. формулу (53)]

$$a = \frac{0,38094 \cdot 0,0333\pi^5}{0,0474939\pi^5} p r_0^2 = 0,2637 p r_0^2, \quad (57)$$

и напряженное состояние профиля опишется следующими формулами:

$$T_1 = \frac{1}{r_0^2} \left[a \left(\frac{R_0}{\varrho^2} \Phi_0'' + \frac{R'_0}{\varrho} \Phi_0' \right) + \frac{R_\kappa}{\varrho^2} \Phi_\kappa'' + \frac{R'_\kappa}{\varrho} \Phi_\kappa' \right] =$$

$$= p \{ 0,2637\varrho(\varrho-1) [2(\varrho-1)(\pi^2 - 6\pi\varphi + 6\varphi^2) + (5\varrho-3)(\pi-\varphi)^2\varphi^2] - \varrho^4 \}; \quad (58)$$

$$T_2 = \frac{1}{r_0^2} (a R_0'' \Phi_0 + R_\kappa'' \Phi_\kappa) = p [0,5274\varrho(10\varrho^2 - 12\varrho + 3)(\pi-\varphi)^2\varphi^2 - 5\varrho^4]; \quad (59)$$

$$S = \frac{1}{r_0^2} \left[a \left(\frac{R_0}{\varrho^2} - \frac{R'_0}{\varrho} \right) \Phi_0' = \right.$$

$$\left. = -p [1,0548\varrho(\varrho-1)(2\varrho-1)\varphi(\pi-\varphi)(\pi-2\varphi)]. \quad (60)$$

Распределение напряжений показано на рис. 2, а, где принято $p = 1$.

Пример 3. Криволинейная часть контура нагружена постоянной равномерно распределенной нагрузкой, а прямолинейная — уравновешивающей нагрузкой, распределенной по закону (см. фиг. 2, б)

$$q(\varrho) = k \cos^8 \frac{\pi\varrho}{2} = k \left(\frac{1 + \cos \pi\varrho}{2} \right)^4.$$

Коэффициент k , как и прежде, определим из условия равновесия

$$p = k \int_0^1 \cos^8 \frac{\pi\varrho}{2} d\varrho = k \frac{35}{128}.$$

Следовательно,

$$k = \frac{128}{35} p;$$

$$q(\varrho) = \frac{128}{35} p \cos^8 \frac{\pi\varrho}{2};$$

$$R_\kappa = \frac{128}{35} \int \int \cos^8 \frac{\pi\varrho}{2} d\varrho \cdot d\varphi;$$

$$R'_\kappa = \frac{128}{35} \int \cos^8 \frac{\pi\varrho}{2} d\varrho = \frac{8}{35} \left(\frac{35}{8} \varrho + \frac{8}{\pi} \sin \pi\varrho + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{4\pi} \sin 2\pi\varrho - \frac{4}{3\pi} \sin^3 \pi\varrho + \frac{1}{32\pi} \sin 4\pi\varrho \right);$$

$$R''_\kappa = \frac{128}{35} \cos^8 \frac{\pi\varrho}{2} = \frac{8}{35} (1 + 4 \cos \pi\varrho + 6 \cos^2 \pi\varrho + 4 \cos^3 \pi\varrho + \cos^4 \pi\varrho) =$$

$$= \frac{8}{35} (1 + \cos \pi\varrho)^4;$$

Φ_κ остается прежней (см. примеры 1 и 2).

Выполняя аналогичные вычисления [(только правой части уравнения (52)), получим

$$a = \frac{0,0333 \cdot 3,26676\pi^3}{0,0474939\pi^5} p r_0^2 = \frac{0,1087}{0,4687} p r_0^2 = 0,2319 p r_0^2. \quad (61)$$

Усилия определяются по формулам

$$T_1 = p \left\{ 0,2319\varrho(\varrho-1) [2(\varrho-1)(\pi^2 - 6\pi\varphi + 6\varphi^2) + (5\varrho-3)(\pi-\varphi)^2\varphi^2] - \right.$$

$$\left. - \frac{8}{35} \left(\frac{35}{8} + \frac{8}{\pi} \sin \pi\varrho + \frac{7}{4\pi} \sin 2\pi\varrho - \frac{4}{3\pi} \sin^3 \pi\varrho + \frac{1}{32\pi} \sin 4\pi\varrho \right) \right\}; \quad (62)$$

$$T_2 = p \left[0,4638\varrho(10\varrho^2 - 12\varrho + 3)(\pi-\varphi)^2\varphi^2 - \frac{8}{35} (1 + \cos \pi\varrho)^4 \right]; \quad (63)$$

$$S = -p [0,4638 \cdot 2\varrho(\varrho-1)(2\varrho-1)\varphi(\pi-\varphi)(\pi-2\varphi)]. \quad (64)$$

Распределение напряжений в профиле показано на фиг. 2, б, где принято $p = 1$.

Выводы

1. Усилия T_1 и T_2 с достаточной точностью могут определяться по приведенным формулам, т. е. в первом приближении; что касается сдвигающего усилия S , то потребуется, очевидно, взять второе приближение.

2. Приведенным в статье методом возможно рассчитывать профили, мало отклоняющиеся от круга, например очерченные по параболе четвертой степени.

Расчет осесимметрично загруженного сплошного цилиндра конечной длины

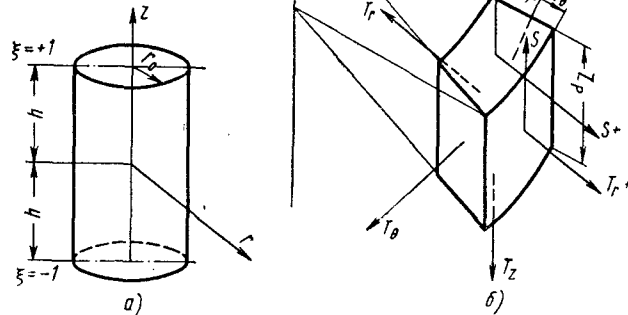
Уравнения равновесия. Рассмотрим тело вращения — круговой сплошной цилиндр, на который воздействует осесимметричная нагрузка. Будем пользоваться цилиндрической системой координат r, θ, z (фиг. 4, а), причем за ось вращения примем ось z .

Вследствие симметрии тела и действующей на него нагрузки, напряженное состояние в произвольной точке цилиндра не зависит от координаты θ и будет определяться четырьмя компонентами: T_r , T_θ , T_z и S (фиг. 4, б).

Уравнения равновесия представляются в такой же форме, как и в случае плоской задачи:

$$\frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{T_r - T_\theta}{r} = 0; \quad (65)$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\partial T_z}{\partial z} + \frac{S}{r} = 0. \quad (66)$$



Фиг. 4. К выводу уравнения равновесия в цилиндрических координатах.

Уравнения (65) и (66) удовлетворяются тождественно, если неизвестные усилия выразить через функцию $F(r, z)$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial r}; & T_\theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial r}; \\ T_z &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}; & S &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \quad (67)$$

Будем искать решение системы уравнений (65) и (66) в форме

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^{(0)} + T_r^{(\kappa)}; \\ T_\theta &= T_\theta^{(0)} + T_\theta^{(\kappa)}; \\ T_z &= T_z^{(0)} + T_z^{(\kappa)}; \\ S &= S^{(0)} + S^{(\kappa)}, \end{aligned} \quad (68)$$

где $T_r^{(0)}, \dots, S^{(0)}$ — решения, дающие нулевые значения усилий на поверхности тела и удовлетворяющие условиям равновесия;

$T_r^{(\kappa)}, \dots, S^{(\kappa)}$ — решения, удовлетворяющие граничным условиям и условиям равновесия.

Введем безразмерные координаты

$$\xi = \frac{z}{h}, \quad (-1 \leq \xi \leq 1); \quad \varrho = \frac{r}{r_0}, \quad (0 \leq \varrho \leq 1), \quad (69)$$

где h — половина высоты цилиндра;

r_0 — радиус цилиндра. Перепишем формулы (67) в новых переменных:

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{r_0 h^2} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r_0^3} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho}; \\ T_\theta &= \frac{1}{r_0^3} \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} \right); \\ T_z &= \frac{1}{r_0^3} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2}; \\ S &= -\frac{1}{h r_0^2} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho \partial \xi}. \end{aligned} \quad (70)$$

По аналогии с уравнениями (68) представим функцию $F(\varrho, \xi)$ в виде двух слагаемых

$$F(\varrho, \xi) = F^{(0)}(\varrho, \xi) + F^{(\kappa)}(\varrho, \xi), \quad (71)$$

каждое из которых будем рассматривать как

$$\begin{aligned} F^{(0)}(\varrho, \xi) &= \sum a_{mn} R_{0n}(\varrho) Z_{0n}(\xi); \\ F^{(\kappa)}(\varrho, \xi) &= R_\kappa(\varrho) \cdot Z_\kappa(\xi), \end{aligned} \quad (72)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots$

Подставим $F^{(0)}$ из формулы (72) в формулы (70) и потребуем выполнения нулевых значений соответствующих усилий на поверхности; при этом положим $m = n = m$. Это сделает задачу менее громоздкой, но для достижения определенной точности количество слагаемых в суммах должно быть увеличено.

$$\begin{aligned} T_r^{(0)}(\varrho = 1) &= \sum a_m \left(\frac{1}{r_0 h^2} \cdot \frac{R_{0m}}{\varrho} Z_{0m}'' + \frac{1}{r_0^3} \cdot \frac{R_{0m}'}{\varrho^2} Z_{0m} \right) = 0; \\ T_\theta^{(0)} &= \frac{1}{r_0^3} \sum a_m \left(\frac{R_{0m}''}{\varrho} - \frac{R_{0m}'}{\varrho^2} \right) Z_{0m}; \\ T_z^{(0)}(\xi = \pm 1) &= \frac{1}{r_0^3} \sum a_m \frac{R_{0m}''}{\varrho} Z_{0m} = 0; \\ S^{(0)} \left(\begin{matrix} \varrho = 1 \\ \xi = \pm 1 \end{matrix} \right) &= -\frac{1}{r_0^2 h} \sum a_m \frac{R_{0m}'}{\varrho} Z_{0m}' = 0. \end{aligned} \quad (73)$$

Из уравнения (73) легко находим, что

$$\begin{aligned} R_{om}(1) &= R'_{om}(1) = 0; \\ Z_{om}(\xi = \pm 1) &= Z'_{om}(\alpha = \pm 1) = 0. \end{aligned} \quad (74)$$

Выбор функций $R_{om}(\varrho)$ и $Z_{om}(\xi)$. Любая полная система замкнутых на соответствующих интервалах функций, удовлетворяющая условиям (74), может быть использована для решения задачи. В работах [7] и [8] при расчете пластинок, балок стенок и т. п. широко используются степенные функции. Для рассматриваемой задачи последние могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} R_{om} &= (\varrho - 1)^2 \varrho^{m+2}; \\ Z_{om} &= (\xi^2 - 1)^{m+1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (75)$$

Филоненко-Бородичом М. М. [2] введены функции, названные им косинус-биномами, которые для задачи о расчете сплошного цилиндра записываются так:

$$\begin{aligned} R_{om} &= \cos m\pi\varrho - \cos(m+2)\pi\varrho; \\ Z_{om} &= \cos m\pi\xi - \cos(m+2)\pi\xi. \end{aligned} \quad (76)$$

Выбор той или иной системы функции R_{om} , Z_{om} следует увязывать соответственно с функциями R_κ и Z_κ определяемым видом поверхностной нагрузки. Очевидно, предпочтения будет заслуживать та система функций R_{om} , Z_{om} , которая в комбинациях с функциями R_κ и Z_κ будет образовывать наиболее легко интегрируемые выражения.

Определение функций R_κ и Z_κ . Функции R_κ и Z_κ должны удовлетворять условиям равновесия и условиям на поверхности тела. Их можно получить как частный интеграл системы уравнений (65)–(66) при каких-либо упрощающих предположениях. Эти предположения следует основывать, исходя из вида загрузки.

1. Цилиндр загружен произвольной нагрузкой, распределенной по боковой поверхности, а торцы его от нагрузки свободны, т. е.

$$\begin{aligned} T_r(\varrho = 1) &= -P(\xi); \\ T_z(\xi = \pm 1) &= 0; \\ S(\varrho = 1, \xi = \pm 1) &= 0, \end{aligned} \quad (77)$$

то, положив в уравнениях (65)–(66) $S = 0$, тем самым перейдем к рассмотрению напряженного состояния диска единичной толщины, загруженного по краю полярно симметричной нагрузкой $-P$. Как известно, при таком нагружении в диске будет

$$T_r = T_\theta = -P.$$

Отсюда при указанном нагружении, в качестве частных интегралов (65)–(66), можно принять

$$T_r^{(\kappa)} = T_\theta^{(\kappa)} = -P(\xi); \quad S^{(\kappa)} = 0, \quad (78)$$

а из уравнения (66) получить, что

$$T_z^{(\kappa)} = R_\kappa(\varrho). \quad (79)$$

Если имеется возможность (исходя из вида нагрузки или по экспериментальным данным) предположить закон распределения $T_z^{(\kappa)} = R_\kappa(\varrho)$, то этим следует воспользоваться. В крайнем случае можно положить $T_z^{(\kappa)} = 0$, что приведет к тому, что в результатах решения для достижения необходимой точности придется учесть большее количество слагаемых в выражениях (68).

2. Боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузки, а торцы его нагружены произвольной нормальной нагрузкой.

Подставив в формулы (70) функцию $F^{(\kappa)}(\varrho, \xi)$ из формул (72), получим

$$\begin{aligned} T_r^{(\kappa)} &= \frac{1}{r_0 h^2} \cdot \frac{R_\kappa}{\varrho} Z'_\kappa + \frac{1}{r_0^3} \cdot \frac{R'_\kappa}{\varrho^2} Z_\kappa; \\ T_\theta^{(\kappa)} &= \frac{1}{r_0^3} \left(\frac{R_\kappa}{\varrho} - \frac{R'_\kappa}{\varrho^2} \right) Z_\kappa; \\ T_z^{(\kappa)} &= \frac{1}{r_0^3} \cdot \frac{R'_\kappa}{\varrho} Z_\kappa; \\ S^{(\kappa)} &= \frac{1}{r_0^2 h} \cdot \frac{R'_\kappa}{\varrho} Z'_\kappa. \end{aligned} \quad (80)$$

Положим, в формуле (80) $Z_\kappa = \text{const} = 1$; запишем условия задачи:

$$T_r^{(\kappa)}(\varrho = 1) = \frac{1}{r_0^3} \cdot \frac{R'_\kappa}{\varrho^2} = 0; \quad (81)$$

$$T_\theta^{(\kappa)} = \frac{1}{r_0^3} \left(\frac{R'_\kappa}{\varrho} - \frac{R'_\kappa}{\varrho^2} \right); \quad (82)$$

$$T_z^{(\kappa)}(\xi = \pm 1) = \frac{1}{r_0^3} \cdot \frac{R'_\kappa}{\varrho} = -q(\varrho); \quad (83)$$

$$S^{(\kappa)}(\varrho = 1, \xi = \pm 1) = 0. \quad (84)$$

Очевидно, R_κ легко определить из выражения (83), причем для удовлетворения условия (81) должно быть

$$R'_\kappa(\varrho = 1) = 0.$$

Поскольку R_κ будет содержать произвольные постоянные интегрирования, то это условие легко удовлетворяется. Нетрудно также убедиться, что выражения (81)—(84) удовлетворяют уравнениям равновесия (65)—(66).

3. Произвольной нормальной самоуравновешенной нагрузкой нагружен только один торец цилиндра, например, определяемый координатой $\xi = 1$, т. е.

$$T_r^{(\kappa)}(q=1) = \frac{1}{r_0^2 h} \cdot \frac{R_\kappa}{q} Z_\kappa'' + \frac{1}{r_0^3} \frac{R_\kappa'}{q^2} Z_\kappa = 0; \quad (85)$$

$$T_\theta^{(\kappa)} = \frac{1}{r_0^3} \left(\frac{R_\kappa''}{q} + \frac{R_\kappa'}{q^2} \right) Z_\kappa; \quad (86)$$

$$T_z^{(\kappa)} = \frac{1}{r_0^3} \cdot \frac{R_\kappa'}{q} Z_\kappa = \begin{cases} -q(q) & \text{при } \xi = +1, \\ 0 & \text{при } \xi = -1; \end{cases} \quad (87)$$

$$S^{(\kappa)}(q=1, \xi = \pm 1) = -\frac{1}{r_0^2 h} \cdot \frac{R_\kappa'}{q} Z_\kappa' = 0. \quad (88)$$

Очевидно, что в этом случае R_κ и Z_κ следует подобрать такими, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} Z_\kappa(\xi=1) &= 1; \quad Z_\kappa(\xi=-1) = 0; \\ Z_\kappa'(\xi=\pm 1) &= 0; \quad R_\kappa(q=1) = 0; \\ R_\kappa'(q=1) &= 0. \end{aligned}$$

В качестве функции Z_κ можно принять, например,

$$Z_\kappa = \left(\frac{1 + \sin \frac{\pi \xi}{2}}{2} \right)^{2n},$$

а функцию R_κ определить двукратным интегрированием из выражения (87). Полученные при этом две постоянные интегрирования позволят удовлетворить требуемым условиям.

Второй вариант решения задачи. Нетрудно убедиться, что уравнения (65)—(66) удовлетворяются тождественно, если принять следующие решения [3]:

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z^2}; \quad T_\theta = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z^2}; \\ T_z &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial r^2} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial r} \right); \\ S &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial r \partial z} \right), \end{aligned} \quad (89)$$

где \bar{F} — функция напряжений, которую как и в вышеизложенном варианте (переходя к переменным q, ξ) представим в виде

$$\bar{F} = \bar{F}_0(q, \xi) + \bar{F}_\kappa(q, \xi), \quad (90)$$

причем

$$\begin{aligned} \bar{F}_0(q, \xi) &= \sum a_m \bar{R}_{om}(q) \bar{Z}_{om}(\xi); \\ \bar{F}_\kappa(q, \xi) &= \bar{R}_\kappa(q) Z_\kappa(\xi). \end{aligned} \quad (91)$$

Решение (89) также представим в виде двух слагаемых по формулам (68).

Подставим $F_0(q, \xi)$ из формулы (91) в формулы (89) и потребуем выполнения нулевых условий на поверхности

$$T_r^{(0)}(q=1) = \frac{1}{r_0 h^2} \sum a_m \bar{R}_{om} \bar{Z}_{om}'' = 0; \quad (92)$$

$$T_z^{(0)}(\xi = \pm 1) = \frac{1}{q r_0} \sum a_m \left(\frac{1}{r_0^2} \bar{R}_{om}'' - \frac{1}{r_0} \bar{R}_{om}' \right) Z_{om} = 0; \quad (93)$$

$$T_\theta^{(0)} = \frac{1}{h^2} \sum a_m \bar{R}_{om} \bar{Z}_{om}''; \quad (94)$$

$$S^{(0)} \left(\begin{matrix} \xi = \pm 1 \\ q = 1 \end{matrix} \right) = \frac{1}{r_0 h} \sum a_m \left(\bar{R}_{om} - \frac{1}{r_0} \bar{R}_{om}' \right) Z_{om}' = 0. \quad (95)$$

Очевидно, для выполнения условий (79) функции $\bar{R}_{om}, \bar{Z}_{om}$ должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \bar{R}_{om}(q=1) &= \bar{R}_{om}'(q=1) = 0; \\ Z_{om}(\xi = \pm 1) &= Z_{om}'(\xi = \pm 1) = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Условия (96) полностью совпадают с условиями (74) первого варианта решения. Отсюда функции R_{om} и Z_{om} могут быть приняты по формуле (75) или (76).

Подставим в формулы (81)—(84) функцию $\bar{F}_\kappa(q, \xi)$ из формулы (91), получим

$$T_r^{(\kappa)}(q=1) = \frac{1}{r_0 h^2} \bar{R}_\kappa Z_\kappa''; \quad (97)$$

$$T_\theta^{(\kappa)} = \frac{1}{h^2} \bar{R}_\kappa Z_\kappa''; \quad (98)$$

$$T_z^{(\kappa)} = \frac{1}{r_0 q} \left(\frac{1}{r_0^2} \bar{R}_\kappa'' - \frac{1}{r_0} \bar{R}_\kappa' \right) Z_\kappa; \quad (99)$$

$$S^{(\kappa)} = \frac{1}{r_0 h q} \left(\bar{R}_\kappa - \frac{1}{r_0} \bar{R}_\kappa' \right) Z_\kappa'. \quad (100)$$

Рассмотрим те же случаи нагружения цилиндра, что и в первом варианте решения.

1. Боковая поверхность нагружена произвольной нагрузкой. Торцы свободны. Положим, что в формулах (97)–(100)

$$R_\kappa = \text{const} = 1 \quad (101)$$

и, записав условия задачи, получим

$$T_r^{(\kappa)}(q=1) = \frac{1}{r_0 h_2} \bar{Z}_\kappa' = -p(\xi), \quad (102)$$

$$T_z(\xi = \pm 1) = 0; \quad (103)$$

$$S^{(\kappa)}(q=1, \xi = \pm 1) = \frac{1}{r_0 h_2} \bar{Z}_\kappa' = 0; \quad (104)$$

$$T_\theta^{(\kappa)} = \frac{1}{h^2} \bar{R}_\kappa Z_\kappa''.$$

Эти условия легко выполняются только для случая постоянной нагрузки по боковой поверхности цилиндра $P(\xi) = \text{const}$. В общем случае, $P = P(\xi)$, боковая поверхность оказывается нагруженной также сдвигающими усилиями. Очевидно, проще частное решение подбирать так же, как и в первом варианте решения.

2. Боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузки, а его торцы нагружены произвольной нагрузкой $q(q)$.

Положив в выражениях (97)–(100) $Z = \text{const} = 1$, получим, что условия

$$T_r^{(\kappa)}(q=1) = 0, \quad S^{(\kappa)}(q=1, \xi = \pm 1) = 0$$

выполняются автоматически. Функция R_κ определится из уравнения (98):

$$R_\kappa'' - r_0 R_\kappa' = -r_0^3 q(q) q. \quad (105)$$

Сравнивая первый и второй варианты решений, заметим, что второй по сравнению с первым особых преимуществ не имеет.

Уравнение Кастильяно. Приведенные выше решения удовлетворяют уравнениям равновесия. Для того чтобы они удовлетворяли также и уравнениям совместности, потенциальная энергия деформаций, выраженная через напряжения, должна принимать минимальное значение, т. е.

$$\delta V = 0, \quad (106)$$

где δ — символ вариации;

V — потенциальная энергия деформации, которая в случае осесимметричной задачи цилиндра (при принятых выше относительных координатах q, ξ) записывается так:

$$V = \frac{\pi r_0^2 h}{E} \int_{-1}^1 \int_0^1 [T_r^2 + T_\theta^2 + T_z^2 - 2\mu(T_r T_\theta + T_\theta T_z + T_r T_z) + 2(1 - \mu) S^2] q dq d\xi; \quad (107)$$

здесь μ — коэффициент Пуассона.

Вариационное уравнение (106) равносильно системе уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (108)$$

Подставив в формулу (108) уравнение (107), учтя при этом формулы (68), получим систему n уравнений типа

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_0^1 \{ (T_{rm}^{(0)} + T_r^{(\kappa)}) \dot{T}_{rn}^{(0)} + (T_{\theta m}^{(0)} + T_\theta^{(\kappa)}) \dot{T}_{\theta n}^{(0)} + (T_{zm}^{(0)} + T_z^{(\kappa)}) \dot{T}_{zn}^{(0)} - \\ & - \mu [(T_{rm}^{(0)} + T_r^{(\kappa)}) (\dot{T}_{\theta n}^{(0)} + \dot{T}_{zn}^{(0)}) + (T_{\theta m}^{(0)} + T_\theta^{(\kappa)}) (\dot{T}_{rn}^{(0)} + \dot{T}_{zn}^{(0)}) + \\ & + (T_{zm}^{(0)} + T_z^{(\kappa)}) (\dot{T}_{\theta n}^{(0)} + \dot{T}_{rn}^{(0)})] + 2(1 + \mu) \times \\ & \times (S_m^{(0)} + S^{(\kappa)}) \dot{S}_n^{(0)} \} q dq d\xi = 0. \end{aligned} \quad (109)$$

Исследуемая область односвязана, поэтому, согласно теореме Мориса Леви, V не должно зависеть от μ . Не нарушая общности решения, положим поэтому $\mu = 0$, что значительно упростит задачу. В формуле (109) принято

$$(\dot{}) = \frac{\partial()}{\partial a_n}. \quad (110)$$

Перенесем в уравнении (109) члены, зависящие от нагрузки, вправо, получим [вместо уравнения (109)]

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_0^1 (T_{rm}^{(0)} \dot{T}_{rn}^{(0)} + T_{\theta m}^{(0)} \dot{T}_{\theta n}^{(0)} + T_{zm}^{(0)} \dot{T}_{zn}^{(0)} + 2S_m^{(0)} \dot{S}_n^{(0)}) q dq d\xi = \\ & = - \int_{-1}^1 \int_0^1 (T_r^{(\kappa)} \dot{T}_{rn}^{(0)} + T_\theta^{(\kappa)} \dot{T}_{\theta n}^{(0)} + T_z^{(\kappa)} \dot{T}_{zn}^{(0)} + 2S^{(\kappa)} \dot{S}_n^{(0)}) q dq d\xi. \end{aligned} \quad (111)$$

Параметры a_m , подлежащие определению, содержатся в левой части формулы (111). Система уравнений для их определения получается по следующей схеме [7]: при $n = 1$ индексу m последовательно даются значения 1, 2, 3, ... — получаем первое уравнение системы; затем при $n = 2$ m даются значения 1, 2, 3, ... — получим второе уравнение и т. д. Например, для решения задачи с точностью до двух параметров элементы системы уравнений с двумя неизвестными a_1 и a_2 определяются по формулам:

$$\delta_{11} a_1 = \int_{-1}^1 \int_0^1 (T_{r1}^{(0)} \dot{T}_{r1}^{(0)} + T_{\theta 1}^{(0)} \dot{T}_{\theta 1}^{(0)} + T_{z1}^{(0)} \dot{T}_{z1}^{(0)} + 2S_1^{(0)} \dot{S}_1^{(0)}) q dq d\xi, \quad n = 1, \quad m = 1;$$

$$\delta_{12} a_2 = \int_{-1}^1 \int_0^1 (T_{r2}^{(0)} \dot{T}_{r1}^{(0)} + T_{\theta 2}^{(0)} \dot{T}_{\theta 1}^{(0)} + T_{z2}^{(0)} \dot{T}_{z1}^{(0)} + 2S_2^{(0)} \dot{S}_1^{(0)}) q dq d\xi, \quad n = 1, \quad m = 2;$$

$$\delta_{21} a_1 = \int_{-1}^1 \int_0^1 (T_{r1}^{(0)} \dot{T}_{r2}^{(0)} + T_{\theta 1}^{(0)} \dot{T}_{\theta 2}^{(0)} + T_{z1}^{(0)} \dot{T}_{z2}^{(0)} + 2S_1^{(0)} \dot{S}_2^{(0)}) q dq d\xi, \quad n = 2, \quad m = 1;$$

$$\delta_{22}a_2 = - \int_{-1}^1 \int_0^1 (T_{r2}^{(0)} \dot{T}_{r2}^{(0)} + T_{\theta 2}^{(0)} \dot{T}_{\theta 2}^{(0)} + T_{z2}^{(0)} \dot{T}_{z2}^{(0)} + 2S_2^{(0)} \dot{S}_2^{(0)}) \varrho d\varrho d\xi, \\ n = 2, \quad m = 2; \quad (112)$$

$$\Delta_{1p} = - \int_{-1}^1 \int_0^1 (T_r^{(\kappa)} \dot{T}_r^{(0)} + T_\theta^{(\kappa)} \dot{T}_\theta^{(0)} + T_z^{(\kappa)} \dot{T}_z^{(0)} + 2S^{(\kappa)} \dot{S}_1^{(0)}) \varrho d\varrho d\xi, \\ n = 1; \quad (113)$$

$$\Delta_{2p} = - \int_{-1}^1 \int_0^1 (T_r^{(\kappa)} \dot{T}_r^{(0)} + T_\theta^{(\kappa)} \dot{T}_\theta^{(0)} + T_z^{(\kappa)} \dot{T}_z^{(0)} + 2S^{(\kappa)} \dot{S}_2^{(0)}) \varrho d\varrho d\xi, \\ n = 2.$$

Нетрудно убедиться, что система уравнений для определения параметров будет симметричной относительно главной диагонали.

Примеры. Изложение примеров расчета мы построим следующим образом. Поскольку выражения (112) от нагрузки не зависят, т. е. являются неизменной частью системы уравнений, мы их вычислим в первую очередь. Затем в каждом частном случае нагружения будем вычислять только грузовые члены формулы (113).

Ставя своей целью проиллюстрировать метод, мы не будем также стремиться к большой точности и ограничимся только первым приближением.

В ы ч и с л е н и е δ_{11} . Принимаем $m = 1$. Тогда из выражения (75) получим

$$R_{01} = (\varrho - 1)^2 \varrho^3; \quad Z_{01} = (\xi^2 - 1)^2 \xi^2.$$

Из формулы (112) имеем

$$\delta_{11}a_1 = a_1 \int_{-1}^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{r_0^2 h^4} \cdot \frac{R_{01}^2}{\varrho} Z_{01}^2 + \frac{2}{r_0^4 h^2} \left(\frac{R_{01} R_{01}'}{\varrho^2} Z_{01} Z_{01}' + \frac{R_{01}'^2}{\varrho} Z_{01}^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{r_0^6} \left(\frac{R_{01}^2}{\varrho^3} + \frac{R_{01}^2}{\varrho} - \frac{R_{01} R_{01}'}{\varrho^2} \right) Z_{01}^2 \right] d\varrho d\xi.$$

Произведя необходимые вычисления, получим

$$\delta_{11} = 0,0087 \frac{1}{r_0^2 h^4} + 0,0042 \frac{1}{r_0^4 h^2} + 0,0227 \frac{1}{r_0^6}.$$

Приняв $h = r_0$, получим

$$\delta_{11} = 0,0356 \frac{1}{r_0^6}.$$

Рассмотрим теперь некоторые простейшие случаи нагружения.

1. Боковая поверхность цилиндра нагружена постоянной нагрузкой — $P = \text{const}$ (положим также, что $h = r_0$).

Из формулы (78) имеем, что для этого случая можно принять

$$T_r^{(\kappa)} = T_\theta^{(\kappa)} = -P.$$

Из формулы (113) имеем

$$\Delta_{1p} = - \int_{-1}^1 \int_0^1 (T_r^{(\kappa)} \dot{T}_r^{(0)} + T_\theta^{(\kappa)} \dot{T}_\theta^{(0)}) \varrho d\varrho d\xi = \\ = - \frac{1}{r_0^3} \int_{-1}^1 \int_0^1 \left(\frac{R_{01}}{\varrho} Z_{01}' + \frac{R_{01}'}{\varrho} Z_{01} \right) \varrho d\varrho d\xi.$$

Подставив сюда значения R_{01} , R_{01}' , Z_{01} , Z_{01}' и выполнив необходимые операции, найдем, что $\Delta_{1p} = 0$.

Следовательно, при рассматриваемом случае нагружения будем иметь [как это следует из уравнения (68)]

$$T_r = T_r^{(\kappa)} = -P;$$

$$T_\theta = T_\theta^{(\kappa)} = -P;$$

$$T_z = S = 0.$$

2. Боковая поверхность цилиндра нагружена нагрузкой, распределенной по закону

$$P(\xi) = P_0 \left(\frac{1 - \xi^3}{2} \right)^4 = \frac{P_0}{16} (1 - \xi^3)^4.$$

Как и ранее, примем, что

$$T_r^{(\kappa)} = T_\theta^{(\kappa)} = -P(\xi) = -\frac{P_0}{16} (1 - \xi^3)^4;$$

$$T_z^{(\kappa)} = S^{(\kappa)} = 0.$$

Вычислим Δ_{1p} . Из формулы (113) имеем

$$\Delta_{1p} = - \frac{1}{r_0^3} \int_{-1}^1 \int_0^1 P(\xi) \left[\frac{R_{01}}{\varrho} Z_{01}' + \frac{R_{01}'}{\varrho} Z_{01} \right] \varrho d\varrho d\xi.$$

Подставляя в последнее выражение значения R_{01} , Z_{01} , R_{01}' , Z_{01}' и $P(\xi)$ и произведя необходимые вычисления, получим

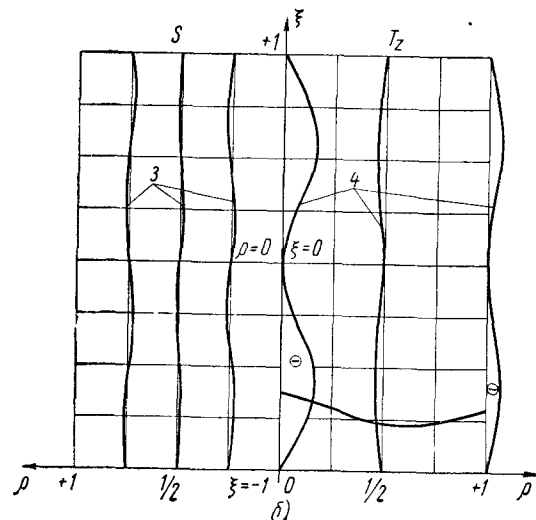
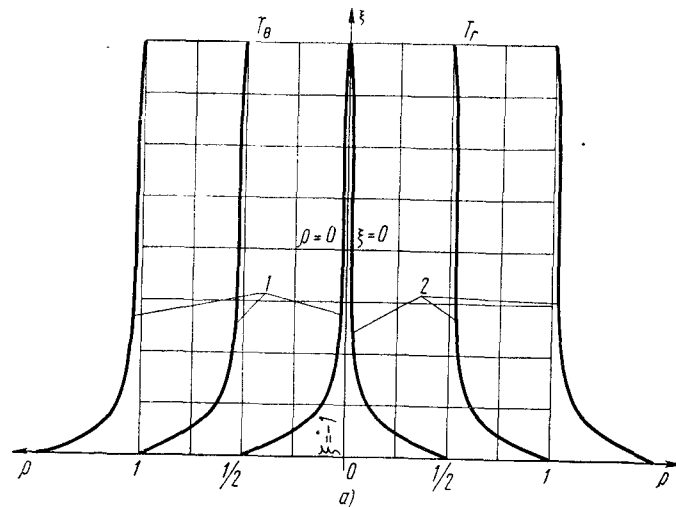
$$\Delta_{1p} = 0,00277 \frac{P_0}{r_0^3},$$

отсюда

$$a_1 = \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{0,00277}{0,0356} P_0 r_0^3 = 0,0778 P_0 r_0^3.$$

Следовательно, для рассматриваемого случая нагружения цилиндра будем иметь

$$T_r = P_0 \left\{ a_1 [q^2 (q^2 - 1)^2 \cdot 2 (15\xi^4 - 12\xi^2 + 1) + (q - 1) (5q - 3) (\xi^2 - 1)^2 \xi^2] - \frac{1}{16} (1 - \xi^3)^4 \right\};$$



Фиг. 5. Элюры усилий T_θ , T_r , S , T_z :
1 — T_θ ; 2 — T_r ; 3 — S ; 4 — T_z .

$$T_\theta = P_0 \left\{ a_1 [2 (10q^2 - 12q + 3) - (q - 1) (5q - 3)] (\xi^2 - 1)^2 \xi^2 - \frac{1}{16} (1 - \xi^3)^4 \right\};$$

$$T_z = P_0 \{ a_1 [2 (10q^2 - 12q + 3)] (\xi^2 - 1)^2 \xi^2 \};$$

$$S = P_0 \{ a_1 q (q - 1) (5q - 3) 2\xi (3\xi - 4\xi^2 + 1) \}.$$

Вычисленные по этим формулам значения соответствующих величин сделаны в табл. 1—4, а также показаны графически на фиг. 5, а и б.

Нетрудно заметить, что первое приближение для T_r и T_θ , очевидно, вполне достаточно.

Величины T_z и S требуют дальнейших уточнений. Этого и следовало ожидать, поскольку частные решения $T_z^{(k)}$ и $S^{(k)}$ были приняты равными нулю.

Таблица 1

Значения величин $T_r : P_0$

$q \backslash \xi$	1	$3/4$	$1/2$	$1/4$	0	$-1/4$	$-1/2$	$-3/4$	-1
0	0	0,01750	0,00281	-0,0457	-0,0625	-0,05368	-0,0678	-0,23028	1,000
$1/4$	0,02184	-0,0021	-0,0215	-0,0513	-0,0571	-0,059304	-0,09156	-0,2498	-0,97816
$1/2$	0,0389	-0,0152	-0,03759	-0,0545	-0,05277	-0,06243	-0,09250	-0,26305	-0,9611
$3/4$	0,02184	-0,01466	-0,03785	-0,0576	-0,0571	-0,06561	-0,09224	-0,26245	-0,97816
1	0	-0,0076	-0,03	-0,0585	-0,0625	-0,0665	-0,1001	-0,25539	-1,000

Таблица 2

Значения величин $T_\theta : P_0$

$q \backslash \xi$	1	$3/4$	$1/2$	$1/4$	0	$-1/4$	$-1/2$	$-3/4$	-1
0	0	0,0175	0,0028	-0,0457	-0,0625	-0,0537	-0,0672	-0,2302	-1,00
$1/4$	0	-0,0081	-0,0306	-0,0587	-0,0625	-0,0667	-0,1007	-0,2559	-1,00
$1/2$	0	-0,0180	-0,0436	-0,0638	-0,0625	-0,0718	-0,1137	-0,2658	-1,00
$3/4$	0	-0,0123	-0,0361	-0,0608	-0,0625	-0,0688	-0,1062	-0,2601	-1,00
1	0	0,0081	-0,0082	-0,050	-0,0625	-0,058	-0,1219	-0,2386	-1,00

Таблица 3

Значения величин $T_z : P_0$

$\xi \backslash \eta$	1	$3/4$	$1/2$	$1/4$	0	$-1/4$	$-1/2$	$-3/4$	-1
0	0,000	0,050227	-0,065632	0,025627	0,000	0,025627	0,065632	0,050227	0,000
$1/4$	0,000	0,0104641	0,013669	0,005337	0,000	0,005337	0,013669	0,0104641	0,000
$1/2$	0,000	-0,008371	-0,010938	-0,004271	0,000	-0,004271	-0,010938	-0,008371	0,000
$3/4$	0,000	-0,006278	-0,008200	-0,003197	0,000	-0,003197	-0,008200	-0,006278	0,000
1	0,000	0,0167425	0,021877	0,008542	0,000	0,008542	0,021877	0,0167425	0,000

Таблица 4

Значения величин $S : P_0$

$\xi \backslash \eta$	1	$3/4$	$1/2$	$1/4$	0	$-1/4$	$-1/2$	$-3/4$	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$1/4$	0	-0,0115	+0,0047	+0,0097	0	-0,0097	-0,0047	+0,0115	0
$1/2$	0	-0,0043	-0,0018	+0,0037	0	-0,0037	+0,0018	+0,0043	0
$3/4$	0	+0,0049	-0,0018	-0,0041	0	0,0041	+0,0018	-0,0049	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф. Теория упругости, Оборонгиз, 1939.
2. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости, Гостехиздат, 1943.
3. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. «Прикладная математика и механика» (ПММ), Т. XV, Вып. 2, 1951.
4. Филоненко-Бородич М. М. Некоторые обобщения задачи Ламе для упругого параллелепипеда. ПММ. Т. XVII, вып. 4, 1953.
5. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. и др. Современные методы расчета на прочность в машиностроении. Машгиз, 1959.
6. Кононенко Е. С. Задача о сжатии параллелепипеда между жесткими плитами без скольжения. Исследования по теории сооружений, Вып. VI, Гостройиздат, 1954.
7. Кононенко Е. С. Распределение напряжений в упругом призматическом образце при испытании на сжатие с наличием сил трения на торцах, Исследование по теории сооружений. Вып. VII, Гостройиздат, 1957.

8. Ионов В. Н. Равновесие упругого цилиндра конечной длины. Исследования по теории сооружений. Вып. VII, Гостройиздат, 1957.
9. Пратусевич Я. А. Вариационные методы в строительной механике. Гостехиздат, 1948.
10. Феппль А. и Феппль Л. Сила и деформация. Т. II, ОНТИ, 1936.
11. Соляник-Красса К. В. К решению осесимметричной задачи теории упругости. Доклады АН СССР, новая серия, Т. 86, 1952, № 3.
12. Соляник-Красса К. В. Функции напряжений осесимметричной задачи теории упругости. ПММ, Т. 21, Вып. 2, 1957.
13. Гродский Г. Д. Интегрирование уравнений равновесия упругого тела вращения при осесимметричном относительно его оси распределении «объемных» и поверхностных сил. Известия АН СССР. Отделение математических и естественных наук, 1934, № 10.
14. Квитка А. Л., Агарев В. А. и Уманский Э. С. К решению осесимметричной задачи теории упругости методом электро моделирования в случае действия центробежных сил и температурных полей. «Известия Киевского политехнического института». Т. 19, 1956.
15. Timoshenko S. Philosophical Magarin, p. 1096, 1924.

Инж. ОКУНЕВ Г. Н.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛУДИСКА

Конструкции в виде полудисков могут применяться в различных областях строительства, в частности, в прессостроении, где диски различных очертаний могут использоваться как ригели железобетонных предварительно напряженных станин.

Ригель прессы находится в сложных условиях работы на знакопеременные многократно повторные нагрузки. В одном случае это нагрузка от действия предварительно напряженной арматуры (оплетки), (фиг. 1, а), в другом — эксплуатационная нагрузка (фиг. 1, б).

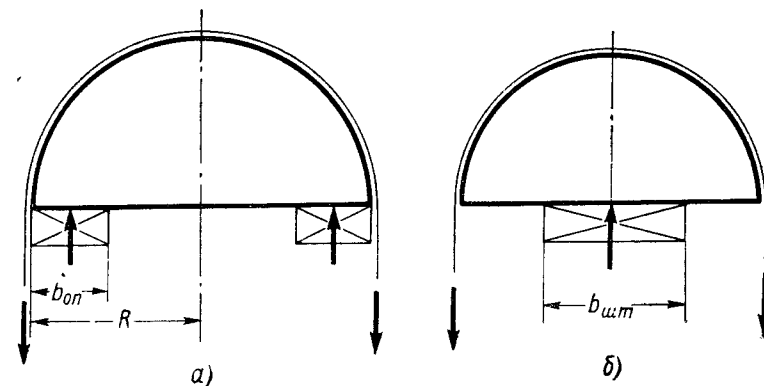
Форма ригеля может быть самой разнообразной, в зависимости от внешних нагрузок, расположения предварительно напряженной арматуры и других факторов. Поэтому желательно подобрать такую форму, при которой от внешних нагрузок ригель работает наиболее рационально. Одной из таких форм может быть полукруглый диск.

Полукруглая форма проста в изготовлении, имеет преимущества в расчетном отношении, так как хорошо вписывается в полярную систему координат, что дает возможность получить сравнительно простой расчет. Применение дисков (в частности, кругового очертания) с внешней предварительно напряженной арматурой в виде оплетки в качестве ригелей для прессов в условиях работы на многократные нагрузки позволяет эффективно использовать работу бетона и арматуры. В о - п е р в ы х, потому что в диске от оплетки создается двухосное напряженное состояние, так как кроме вертикальной нагрузки еще действует горизонтальное боковое обжатие, уменьшающее растягивающие напряжения. В о - в т о р ы х, потому что это позволяет применять в качестве оплетки высокопрочную проволоку и канаты, имеющие высокие расчетные характеристики.

Полукруглая форма позволяет равномерно и плавно распределить по всей ее криволинейной поверхности давление от оп-

летки, не вызывая в арматуре концентраций напряжений (что, например, имеет место в углах прямоугольных и трапециальных форм дисков) и создавая тем самым благоприятные условия для работы арматуры и бетона, при многократных нагрузках. Конструкции прессов с дисками полукруглой формы нашли свое применение в вертикальном прессе усилием 120 т и в проекте горизонтального прессы усилием 50 000 т для изготовления труб (см. статью Людковского И. Г.).

В настоящее время данных по методике расчета таких конструкций, а также данных исследований, хотя бы на действие



Фиг. 1. Схемы загрузки:

а — нагрузки от действия предварительно напряженной арматуры (оплетки);
б — эксплуатационная нагрузка.

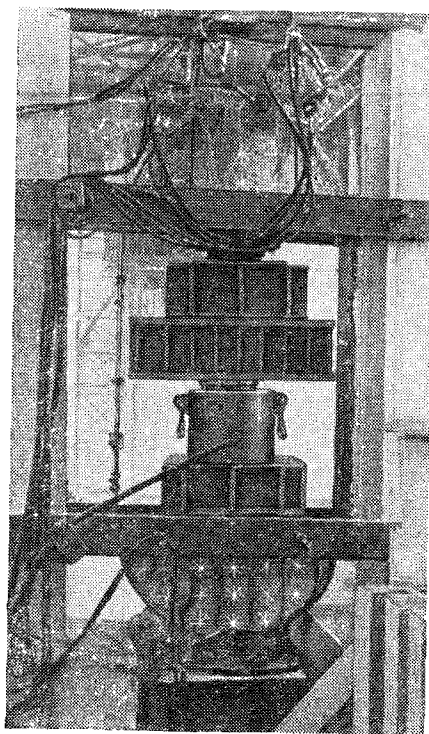
статической нагрузки, почти нет. В связи с тем, что ряд практически важных вопросов не мог бы быть решен теоретически, необходимо было провести экспериментальные исследования. Целью экспериментальных исследований было выявление напряженного состояния дисков как элементов ригелей прессов и получение исходного материала для разработки метода расчета.

Основными вопросами, которые необходимо было решить экспериментально, были:

1. Исследование напряженного состояния диска полукруглой формы при двух видах загрузки.
2. Влияние на напряженное состояние диска расположения и размеров подштамповых плит.
3. Распределение давления в диске под опорами и штампом.
4. Распределение давления по криволинейной поверхности диска от внешней арматуры (оплетки) с учетом и без учета трения.
5. Изучение форм разрушения при двух схемах загрузки.

Методика эксперимента была разработана так, что отражала работу дисков как плоских элементов в реальном прессе. Испытания проводились на моделях, состоящих из двух бетонных дисков

(без арматуры) полукруглого очертания и облегающей их криволинейную поверхность оплетки (фиг. 2). Диаметр полудиска равнялся 100 см, толщина 25 см. Такое значение толщины было принято для того, чтобы исключить потерю устойчивости плоских элементов и модели в целом. При этих соотношениях пролета и толщины имеет место плоско-напряженное состояние. Оплетка



Фиг. 2. Общий вид модели.

состояла из одного слоя высокопрочной проволоки периметрического профиля диаметром 5 мм; число проволочек в слое 30 шт. Для уменьшения трения между бетоном дисков и арматурой оплетки была проложена металлическая прокладка из кровельной стали толщиной 1 мм.

Испытания проводились при двух видах загрузки, один из которых соответствует работе дисков после окончания предварительного натяжения внешней арматуры (оплетки) или моменту передачи нагрузки на колонны станины при натяжении самим прессом (см. фиг. 1, а).

Величина опор составляла, как это должно было быть в реальном прессе, $0,4R = 20$ см, где R — радиус полукруглого диска.

Другой вид соответствовал работе ригеля реального прессы ТЖ-600 при эксплуатационной нагрузке, а также работе дисков ригеля станины при натяжении внешней арматуры самим прессом (фиг. 1, б).

Величина штампа прилагаемой нагрузки была принята применительно к размерам опирания цилиндра прессы ТЖ-600 и составляла $0,8R = 40$ см.

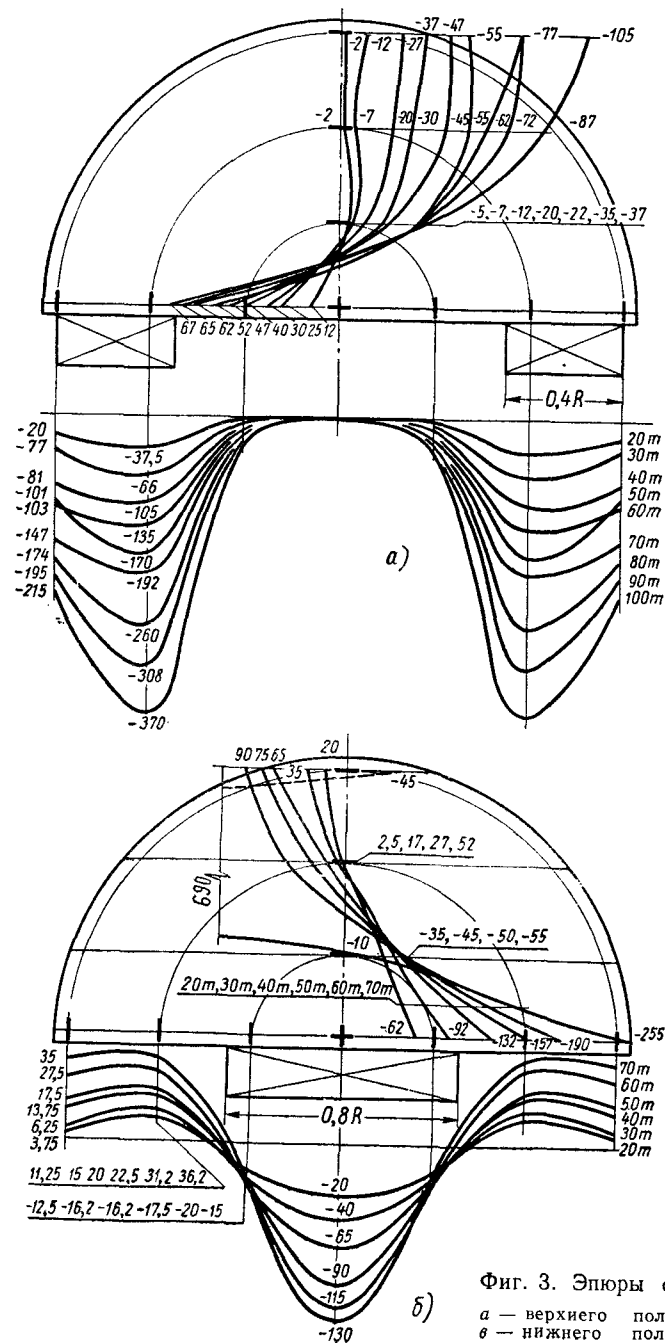
Для измерения деформаций использовались тензодатчики с базой 50 см. Датчики располагались на обеих сторонах дисков в двух системах координат (прямоугольной и полярной) с тем условием, чтобы в наиболее важных сечениях показания датчиков дублировались. Для уменьшения влияния местных напряжений по контуру диска на показания датчиков ось вертикального и горизонтального датчиков располагалась на расстоянии 5 см от

края диска. Модели дисков при испытаниях находились в вертикальном положении. Первоначально верхний диск с заранее подготовленной оплеткой из высокопрочной проволоки подвешивался на балки. Затем на пояс оплетки ставился нижний диск и вся подвижная система закреплялась монтажными болтами в своей плоскости (см. фиг. 2), после чего производилось испытание на один из видов загрузки. После тщательной выверки правильного положения дисков, расположения штампов и домкрата ослаблялись монтажные болты и давалась нагрузка домкратом для натяжения оплетки. Эта нагрузка принималась в дальнейшем при снятии отсчетов за нулевую. Надо сказать, что модель представляла собой подвижную систему. Поэтому, если имелся небольшой перекося положения дисков в плоскости модели, то при увеличении давления он исчезал за счет того, что диск имел возможность скользить в оплетке вокруг своего полюса. Тщательная выверка положения домкрата и опор исключала возникновение горизонтальных сил в модели, что могло повлиять в известной степени на смещение опор. Для плавного распределения давления и уменьшения величины трения под опорами в последних ставились асбестовые прокладки.

Предварительные испытания модели сразу же при двух видах загрузки позволили выявить момент появления трещин. Поэтому в дальнейшем испытания проводились только в стадии работы дисков до появления трещин.

Нагрузка давалась ступенями через 10 т до 100 т при первой и до 70 т при второй схемах загрузки. Испытания проводились сначала при первом виде загрузки, затем нагрузка менялась и при втором виде испытания проводилась до появления трещин. Затем нагрузка снова менялась и определялся момент появления трещин уже при первом виде загрузки. Эпюры относительных деформаций бетона марки «500», полученные при двух видах загрузки дисков, показаны на фиг. 3, а—в.

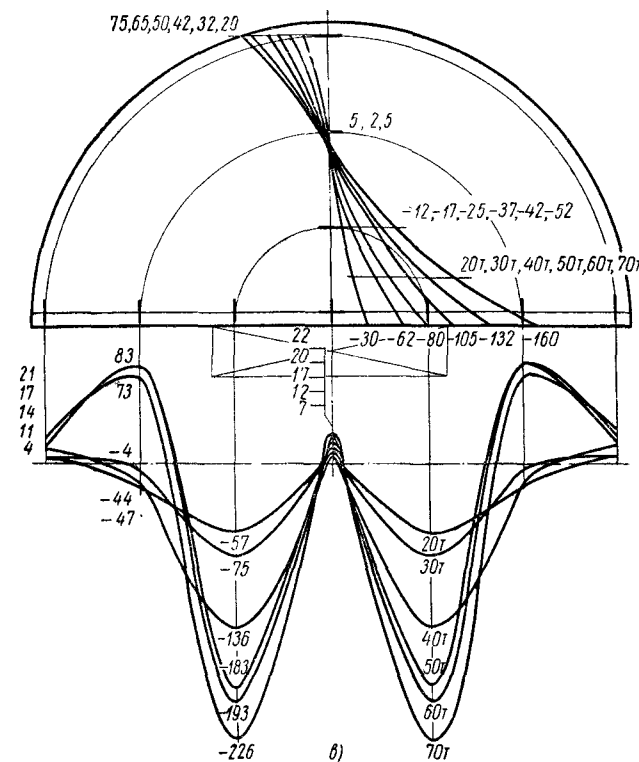
На фиг. 3, а—в показаны симметричные, относительно вертикальной оси эпюры. На самом деле они симметричными не получаются из-за многих возможных факторов, таких как неправильное расположение опор, домкрата, неоднородность материала диска и др. Принятая методика эксперимента эти факторы учла и позволила дублировать показание каждого датчика в точке от 2 до 4 раз. Исходя из этого, стало возможным вывести средние данные и сравнить с теоретическими. На эпюрах показаны горизонтальные деформации в среднем радиальном сечении диска, а также вертикальные деформации под опорами и штампом при различных нагрузках от условного нуля (10 т) до 100 т при первом и до 70 т при втором видах загрузки. Величины относительных деформаций показаны на фигурах увеличенными в 10^6 раз. Для наглядности эпюры вертикальных деформаций под опорами и штампом вынесены за границы полудиска. Как видно из фиг. 3, б—в, при второй



Фиг. 3. Эпюры относительных деформаций бетона:
а — верхнего полудиска
б — нижнего полудиска

схеме загрузки при ширине штампа $0,8R$ эпюры деформаций различаются между собой, особенно под штампом. Это обстоятельство объясняется тем фактором, что характер распределения давления в диске под штампом, а также величина напряжений зависят при одной ширине штампа от его жесткости.

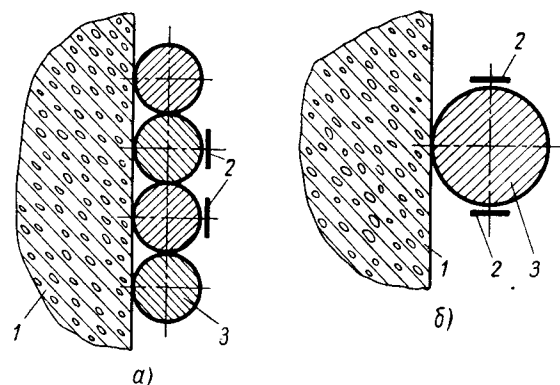
Для верхнего ригеля использовался менее жесткий штамп, что ускорило момент появления радиальной трещины. На характер распределения давления при втором виде загрузки особенно влияет трение под штампом, которое увеличивается по мере увеличения размеров штампа и зависит от его жесткости. Для уменьшения трения под штампом были положены асбестовые прокладки, но этим трение полностью не могло быть исключено и в какой-то степени имело место и наложило отпечаток на напряженное состояние полудисков, особенно при втором виде нагружения.



тельных деформаций бетона:

(увеличено в 10^6); б — верхнего полудиска (вторая схема загрузки); (вторая схема загрузки).

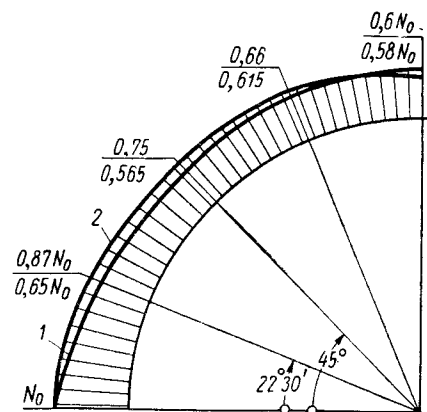
Другим не менее важным фактором, влияющим на напряженное состояние дисков, является трение под оплеткой.



Фиг. 4. Расположение датчиков:

а — на оплетке; б — на одиночной проволоке; 1 — бетон; 2 — датчики; 3 — проволока.

Прежде всего было необходимо выяснить, как распределяется давление от оплетки по криволинейному контуру диска при наличии сил трения. О характере распределения давления можно было узнать по деформациям оплетки в разных точках криволинейного контура диска. Поэтому, кроме датчиков на бетоне, были наклеены датчики на проволоке оплетки. Кроме того, были проведены дополнительные испытания модели, которая представляла собой конструкцию из двух бетонных дисков, стянутых проволокой диаметром 5 мм из стали марки Ст. 5. Между проволокой и бетоном были проложены листы оцинкованной стали толщиной 1 мм.



Фиг. 5. Эпюры изменения усилия в проволоке в зависимости от полярного угла в полукруглом диске при действии силы трения:

1 — экспериментально; 2 — теоретически; N_0 — усилие домкрата.

на проволоку оплетки можно было наклеивать датчики только с внешней стороны (фиг. 4, а). Это могло привести к известным погрешностям, так как на деформации растяжения проволоки накладывали отпечаток деформации изгиба, особенно в углах

диска. При испытании с одной проволокой датчики могли наклеиваться по оси проволоки с двух сторон (фиг. 4, б) и это исключало деформации изгиба в показаниях датчиков.

Качественная картина получалась одинаковая в обоих случаях, но деформации в первом случае (фиг. 4, а) были несколько большими из-за влияния изгиба.

Испытания с проволокой показали, что давление от оплетки по криволинейной поверхности полудиска можно принять изменяющимся по закону (фиг. 5)

$$N_\theta = N_0 \cdot e^{-\mu\theta};$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};$$

здесь N_0 — усилие домкрата;

N_θ — усилие по длине проволоки в зависимости от полярного угла;

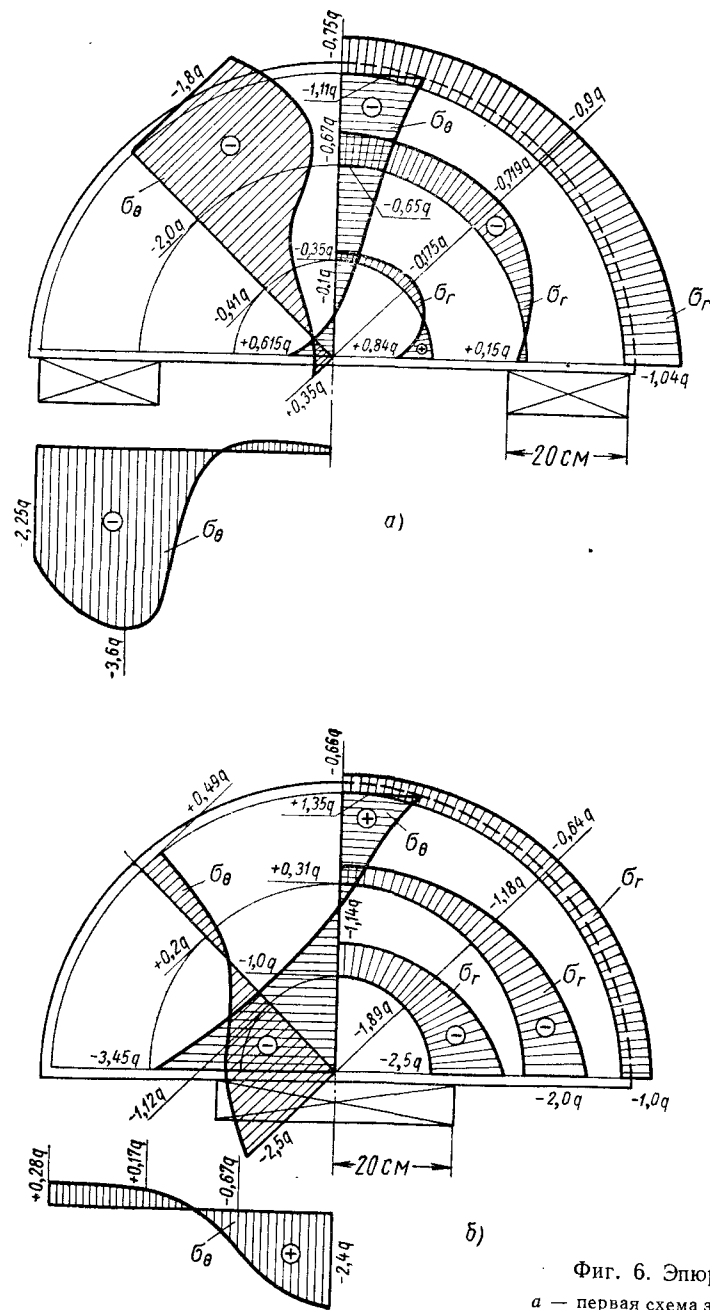
θ — полярная координата;

μ — коэффициент, равный 0,35 при трении проволоки по кровельной стали.

После того как решен вопрос о распределении давления по контуру диска, становится ясным, что при первом виде загрузки трение уменьшает сжатие по криволинейному контуру диска. Поэтому для первого вида загрузки худшим будет тот случай, когда диск загружен по контуру равномерно распределенной нагрузкой без трения.

При втором виде загрузки трение ухудшает работу ригеля, вызывая дополнительные растягивающие и сжимающие напряжения. Вообще трение неблагоприятно влияет на работу арматуры и бетона, поэтому возникает вопрос о способах его устранения. Уменьшить трение можно, применив в качестве оплетки гладкую проволоку, смазанные металлические прокладки, а также вибрацию. Примером работы дисков на равномерную нагрузку без трения приближенно можно считать работу дисков при намотке внешней арматуры на поворотном столе ДН-5 или на машине ДН-7.

На фиг. 6, а—в показаны эпюры напряжений в диске при двух видах загрузки, при совместном действии сил трения и нормальных сил от оплетки по криволинейному контуру. Надо отметить, что при переходе от деформаций к напряжениям использовался постоянный модуль упругости на сжатие, полученный экспериментально при испытании призм $20 \times 20 \times 80$ и кубов размерами $20 \times 20 \times 20$ см. Вообще говоря, это не совсем правильно, так как модуль упругости зависит от стадии работы материала и это накладывает свой отпечаток погрешности, особенно в тех зонах, где напряжения могут менять знак. Однако, учитывая то, что диски испытывались в стадии работы до появления трещин и модуль упруго-пластичности при растяжении меньше, чем при



Фиг. 6. Эпюры

а — первая схема заг
в — вторая схема заг

сжатии, вследствие чего отклонения могут быть только в меньшую сторону, приближенно сочли возможным пользоваться постоянным модулем упругости при сжатии. Таким образом, удалось сравнить эпюры экспериментальных напряжений с теоретическими.

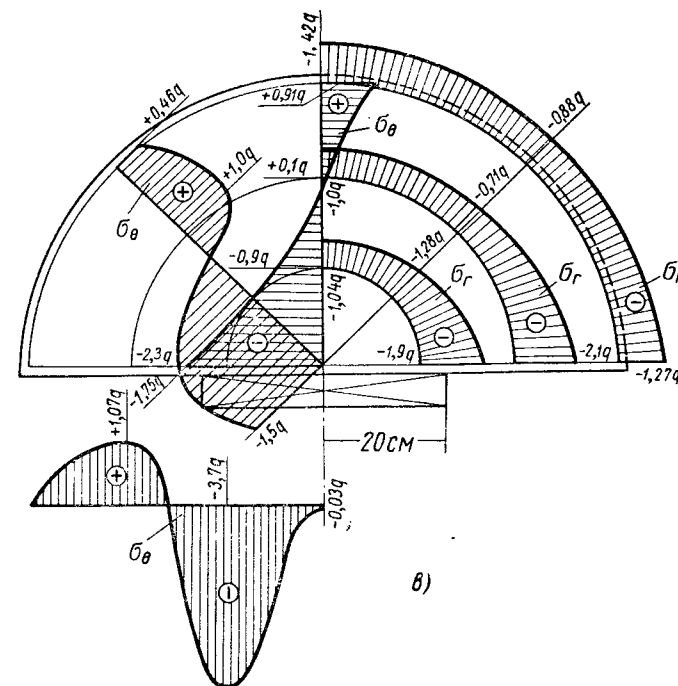
Величины напряжений на фиг. 6, а—в выражены в общем случае в долях от q :

$$q = \frac{N}{2R}, \quad (2)$$

где N — усилие домкрата;

R — радиус полудиска.

Несмотря на то, что краевые датчики были несколько удалены от контура диска, все же сказывалось влияние контактных напряжений на показания датчиков. Поэтому наиболее правильными можно считать показания датчиков, расположенных внутри контура диска, и тем вернее, чем дальше от контура. При вычислении

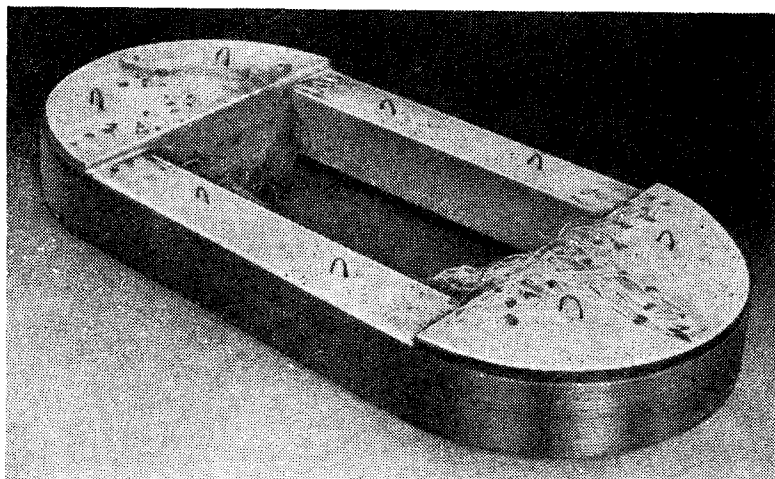


напряжений:

ружения, $P=100$ т; б — вторая схема загрузения, верхний ригель, $P=60$ т; ружения, нижний ригель, жесткий штамп, $P=60$ т.

нормальных напряжений на криволинейном контуре диска в расчет принималась «условно-средняя» толщина диска, равная 20 см, при «фактической толщине», равной 25 см и ширине размещения оплетки, равной 15 см. Проверка равновесия экспериментальных эпюр показала, что равновесие соблюдается в пределах 4—16%.

Кроме того, были также проведены испытания дисков при первом виде загрузки без влияния сил трения. Нагрузку без трения можно создавать в дисках, как было отмечено выше, при намотке на поворотном столе ДН-5 (фиг. 7). Модель состояла из



Фиг. 7. Модель после намотки на поворотном столе ДН-5.

двух бетонных дисков и двух стоек. Ширина опоры составляла $0,4R$. В качестве оплетки использовалась гладкая высокопрочная проволока диаметром 4 мм. Усилие в проволоке — 1000 кг. Оплетка на модель навивалась в виде двух слоев. Число проволок в первом слое — 50 шт., во втором от 30 до 40 шт. Датчики были расположены в среднем радиальном сечении и под стойками. Показания датчиков снимались после намотки целого слоя. Здесь надо отметить, что при намотке модели большое влияние могли оказать горизонтальные силы, которые могли вызвать смещение опор, что крайне нежелательно. Чтобы это избежать, модель при сборке скреплялась металлическим поясом в своей плоскости. Металлический пояс поднимался по мере навивки проволоки на модель и затем совсем убирался. Принятые меры полностью исключали возможность смещения опор вследствие действия значительных горизонтальных сил в плоскости модели. Эпюра напряжений, полученная при первом виде загрузки от нагрузки без

влияния трения, показана на фиг. 11 (IV) при $P = 100 \text{ т}$ (1 слой), где P — усилие предварительного натяжения оплетки.

Одним из важнейших вопросов, касающихся работы ригеля, является вопрос трещиностойкости. Очень важно, чтобы при знакопеременных нагрузках в диске не возникли трещины от больших растягивающих напряжений. При испытании наблюдался момент появления трещин при обоих видах загрузки, а также некоторые намечающиеся формы разрушения, хотя до разрушения диски не доводились из-за возможной потери устойчивости модели. При первом виде загрузки была замечена лишь одна намечающаяся форма разрушения от больших растягивающих напряжений в пролете. Скалывания или среза углов диска в опорных сечениях не наблюдалось. При втором виде (нагрузка в середине пролета) замечены две возможные схемы разрушения. Первая — от больших растягивающих напряжений в крайнем волокне среднего радиального сечения, приводящих к появлению радиальной трещины. Такая намечающаяся схема разрушения возможна при ширине штампа

$$b_{шт} \leq R.$$

Вторая форма разрушения от скалывания углов возможна при ширине штампа

$$b_{шт} > R.$$

При первом виде загрузки от совместного действия сил трения и нормального давления при ширине штампа $0,4R = 20 \text{ см}$ трещина появилась при 130 и 100 т от равномерно распределенной нагрузки без влияния трения (фиг. 8, а и б). При втором виде при действии трения и нормального давления оплетки при ширине штампа $0,8R = 40 \text{ см}$ трещина появилась уже при 70 т (фиг. 8, в).

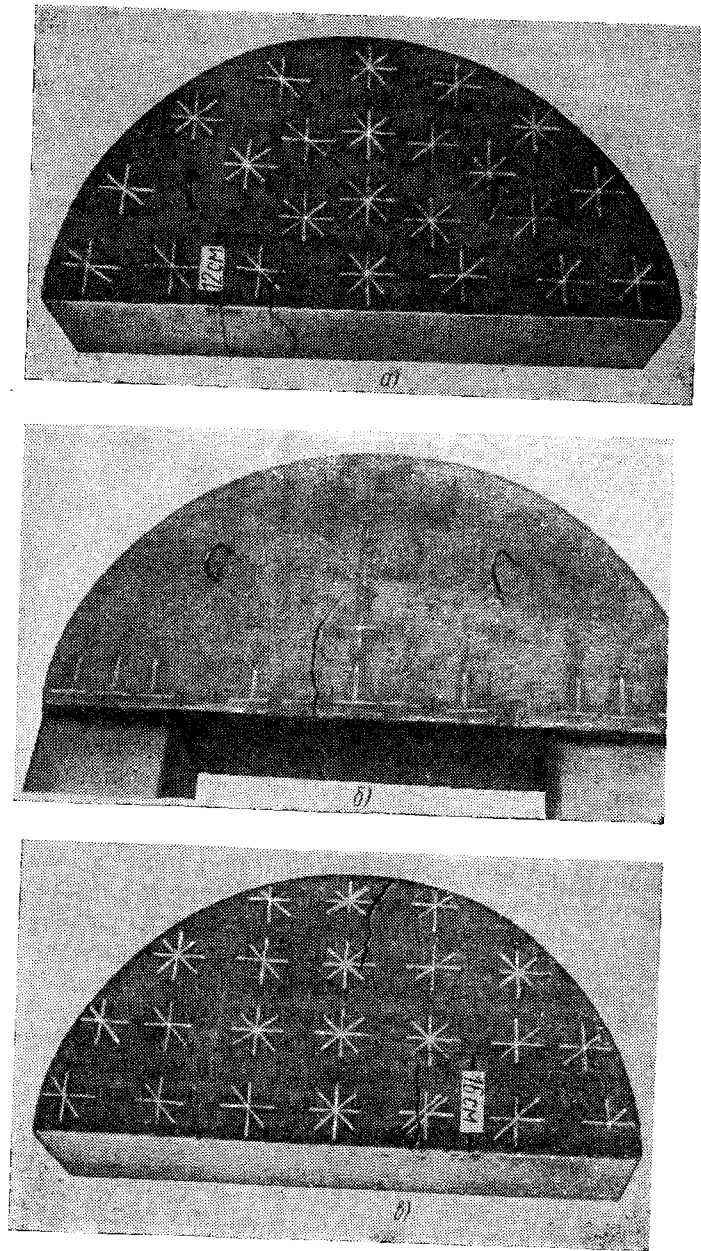
Для разработки метода расчета конструкций с дисками полукруглой формы были проведены теоретические исследования. Эти исследования представляют собой продолжение работ, начатых канд. техн. наук Хлебным Я. Ф. Задача решается вариационным методом. Критерием для наилучшего приближения компонентов напряжений к их истинным значениям служит принцип Кастильяно, выражающий в энергетической форме принцип кинематики о неразрывности деформаций. Аппроксимируя искомую функцию рядом, мы должны считать наилучшим такое приближение, которому отвечает условие

$$\partial_{вн} = \min, \quad (3)$$

где $\partial_{вн}$ — выражение внутренней энергии системы.

Функцию напряжений представим в виде двух слагаемых

$$F(r, \theta) = F_{0к}(r, \theta) + \sum_{i=1}^n a_i F_{0i}(r, \theta), \quad (4)$$



Фиг. 8. Образование трещин в диске:

a — при первой схеме нагружения при действии нормального давления от оплетки и сил трения; *б* — при первой схеме нагружения при намотке на поворотном столе ДН-5, *в* — при второй схеме нагружения при действии нормального давления от оплетки и сил трения.

каждое из которых принимаем в таком виде:

$$F_{0\kappa}(r, \theta) = R_{\kappa} \Phi_{\kappa}; \quad (5)$$

$$F_{0i}(r, \theta) = R_{0i} \Phi_{0i}. \quad (6)$$

Параметр a_i находится из условия

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{an}}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

где $F_{0\kappa}(r, \theta)$ отвечает граничным условиям;
 $F_{0i}(r, \theta)$ дает нулевые значения на контуре.

Подставляя аппроксимирующую функцию (4) в уравнение равновесия плоской задачи и вводя безразмерную координату $\varrho = \frac{r}{R}$ (где $0 \leq \varrho \leq 1$; R — радиус полудиска; r — переменный радиус), получаем в общем виде выражения для напряжений в полярных координатах:

$$\sigma_r = \sigma_r^{\kappa} + \sum_1^n a_i \sigma_r^0 = \frac{1}{R^2} \left[\frac{R_{\kappa}}{\varrho^2} \Phi_{\kappa}'' + \frac{R'_{\kappa}}{\varrho} \Phi_{\kappa}' + \sum_1^n a_i \left(\frac{R_{0i}}{\varrho^2} \Phi_{0i}'' + \frac{R'_{0i}}{\varrho} \Phi_{0i}' \right) \right]; \quad (7)$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}^{\kappa} + \sum_1^n a_i \sigma_{\theta}^0 = \frac{1}{R^2} \left(R_{\kappa}'' \Phi_{\kappa} + \sum_1^n a_i R_{0i}'' \Phi_{0i} \right); \quad (8)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^{\kappa} + \sum_1^n a_i \tau_{r\theta}^0 = -\frac{1}{R^2} \left[\left(\frac{R'_{\kappa}}{\varrho} - \frac{R_{\kappa}}{\varrho^2} \right) \Phi_{\kappa}' + \sum_1^n a_i \left(\frac{R'_{0i}}{\varrho} - \frac{R_{0i}}{\varrho^2} \right) \Phi_{0i}' \right], \quad (9)$$

где $\sigma_r^{\kappa}, \sigma_{\theta}^{\kappa}, \tau_{r\theta}^{\kappa}$ — напряжения, выраженные через функцию (5);
 $\sigma_r^0, \sigma_{\theta}^0, \tau_{r\theta}^0$ — напряжения, выраженные через функцию (6).

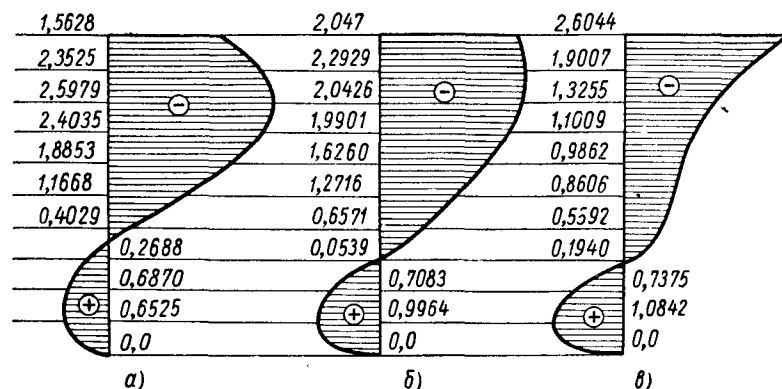
Функцию (5) можно задать в виде полинома, тригонометрического ряда или в сочетании их. В статье Я. Ф. Хлебного «Применение вариационных методов к расчету элементов конструкций прессов» для решения этой задачи применялись полиномы. Для случая нагружения диска равномерно распределенной нагрузкой по криволинейному контуру функция напряжений (6) была принята

$$F_{0i}(\varrho, \theta) = R_{0i} \Phi_{0i} = (1 - \varrho)^2 \varrho^{3m} (\alpha - \varphi)^2 \varphi^{2n} \dots, \quad \text{где} \quad (10)$$

для полудиска:

$$\alpha = \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Однако для получения правильной картины распределения напряжений в диске, решение нуждается в уточнении введением дополнительных членов аппроксимирующего ряда. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что при решении задачи в полиномах можно улучшить предыдущие решения уже



Фиг. 9. Изменение эпюры σ_θ в зависимости от вида аппроксимирующей функции R_{0i} :

a — при $t = 1$; б — при $t = 2$; в — при $t = 4$.

при одном первом члене аппроксимирующего ряда, если принять функцию в виде

$$F_{0i(q, \theta)} = \left(1 - q^{\frac{1}{t}}\right)^2 q^{3m} (\pi - \varphi)^2 \varphi^{2n} \dots, \quad (11)$$

где $t, m, n = 1, 2, 3, \dots$

Если для сравнения выбрать за критерий тангенциальные напряжения по среднему радиальному сечению, то наиболее близка по своему характеру к экспериментальной оказывается эпюра σ_θ , полученная с функцией (11) при $t = 4$ (фиг. 9, в). Изменение эпюры σ_θ при $\theta = \frac{\pi}{2}$ в зависимости от R_{0i} показано на фиг. 9, а—в, где угол θ отсчитывается от горизонтальной оси.

Однако, как видно из фигур, все еще неясным остается вопрос о величине напряжений в полюсе полярной системы. Дополнительные члены ряда уточняют предыдущие решения, но в полюсе по-прежнему дают нулевые значения для напряжений. Этого можно избежать, если для решения задачи функцию напряжений принять в виде

$$F_{0i(q, \theta)} = R_{0m} \Phi_{0n} = (1 - q^l)^2 q^{2m} (1 - 2lq^n) \sin^2 \theta \dots, \quad (12)$$

где $t, m, n = 1, 2, 3, \dots$; $l = 0, 1, 2$.

Уже при первом члене при $t, m = 1, l = 0$, т. е. при

$$F_{0i(q, \theta)} = (1 - q)^2 q^2 \sin^2 \theta \dots \quad (13)$$

удалось получить в полюсе полярной системы для напряжений конечную величину. Тогда напряженное состояние полудиска при равномерно распределенной нагрузке по его криволинейной части и нагрузке, распределенной по произвольному закону по прямолинейной части, описывается формулами:

$$\sigma_r = \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{R'_k}{q} \Phi_k + a_1 [(1 - 2q + q^2) 2 \cos 2\theta + 2(1 - 3q + 2q^2) \sin^2 \theta] \right\}; \quad (14)$$

$$\sigma_\theta = \left\{ \frac{1}{R^2} R''_k \Phi_k + a_1 (2 - 12q + 12q^2) \sin^2 \theta \right\}; \quad (15)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{R^2} a_1 (1 - 4q + 3q^2) \sin 2\theta \dots \quad (16)$$

При распределении нагрузки по прямолинейному контуру диска по закону

$$q_2(q) = k \cdot q^{3/2},$$

где k — коэффициент, определяемый из условия равновесия, напряженное состояние полудиска при одном первом члене ряда описывается формулами:

$$\sigma_r = q \left\{ -q^{3/2} + 0,3787 [2(1 - 2q + q^2) \cos 2\theta + 2(1 - 3q + 2q^2) \sin^2 \theta] \right\}; \quad (17)$$

$$\sigma_\theta = q \left\{ -2,5q^{3/2} + 0,3787 (2 - 12q + 12q^2) \sin^2 \theta \right\}. \quad (18)$$

$$\tau_{r\theta} = -q \cdot 0,3787 (1 - 4q + 3q^2) \sin 2\theta, \quad (19)$$

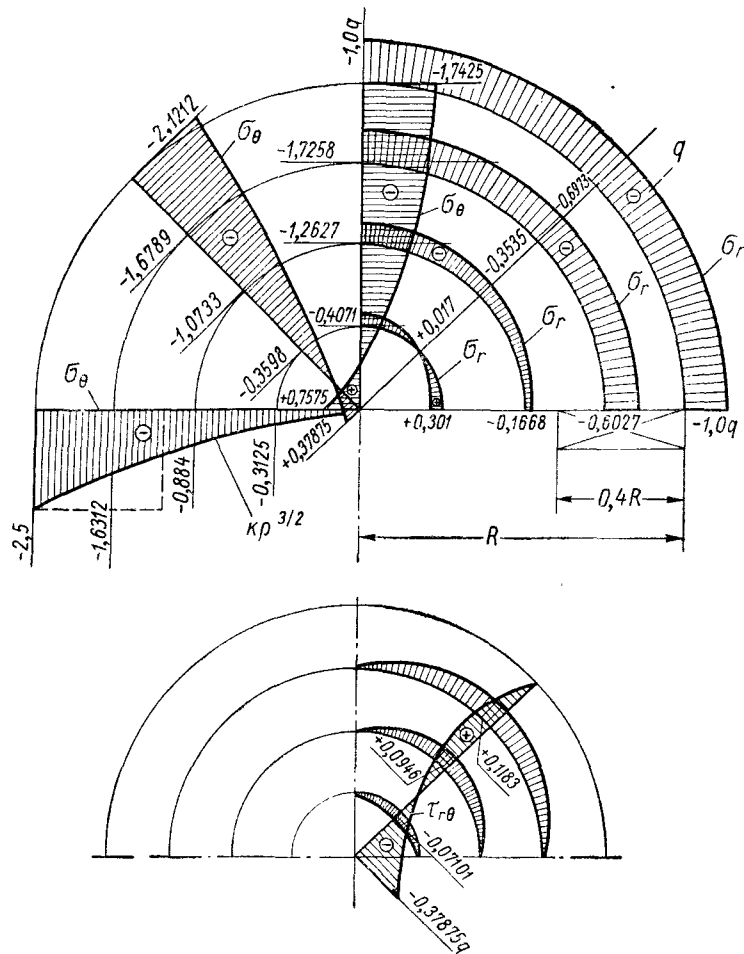
где q — равномерно распределенная нагрузка по криволинейному контуру диска.

Эпюры напряжений показаны на фиг. 10.

Можно применить еще один способ решения задачи с использованием элементарного решения для простой балки с учетом бокового обжатия.

Примем часть функции напряжений $F_{\sigma\kappa}(\varrho, \theta)$ в виде

$$F_{\sigma\kappa} = R^2 \left[\left(2R \iint \varrho f(1) d\varrho^2 - R \iint f(1) d\varrho^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} q \varrho^2 \right) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \iint q_2(\varrho) d\varrho^2 \right]. \quad (20)$$



Фиг. 10. Эпюры напряжений в полукруглом диске в полярных координатах от равномерно распределенной нагрузки по криволинейному контуру и нагрузки, распределенной по прямолинейному контуру по закону $k\rho^{3/2}$ (теоретически).

Тогда напряжения σ_r^κ , σ_θ^κ , $\tau_{r\theta}^\kappa$ выразятся формулами:

$$\sigma_r^\kappa = \frac{1}{R^2 \varrho} \cdot \frac{\partial F_{\sigma\kappa}}{\partial \varrho} + \frac{1}{R^2 \varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 F_{\sigma\kappa}}{\partial \theta^2} =$$

$$= (R\varrho f(1) - Rf(1) + q) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \frac{1}{\varrho} \int q_2(\varrho) d\varrho + \\ + 2 \cos 2\theta \left(\frac{1}{3} R\varrho f(1) - \frac{1}{2} Rf(1) + \frac{1}{2} q - \frac{1}{\varrho^2} \iint q_2(\varrho) d\varrho^2 \right); \quad (21)$$

$$\sigma_\theta^\kappa = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 F_{\sigma\kappa}}{\partial \varrho^2} = (2R\varrho f(1) - Rf(1) + q) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta q_2(\varrho); \quad (22)$$

$$\tau_{r\theta}^\kappa = \frac{1}{R^2 \varrho^2} \cdot \frac{\partial F_{\sigma\kappa}}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2 \varrho} \cdot \frac{\partial^2 F_{\sigma\kappa}}{\partial \theta \partial \varrho} = \left(-\frac{2}{3} R\varrho f(1) + \frac{1}{2} Rf(1) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} q - \frac{1}{\varrho^2} \iint q_2(\varrho) d\varrho^2 + \frac{1}{\varrho} \int q_2(\varrho) d\varrho \right) \sin 2\theta; \quad (23)$$

$$f(\varrho) = \frac{6}{R} \left[\iint q d\varrho^2 - \int \int q_2(\varrho) d\varrho^2 \right]; \quad (24)$$

$$f(1) = \frac{6}{R} \left[\int_0^1 q d\varrho^2 - \int_0^1 \int_0^1 q_2(\varrho) d\varrho^2 \right], \quad (25)$$

где q — равномерная нагрузка на криволинейном участке контура диска;

$q_2(\varrho)$ — нагрузка на прямолинейном участке контура диска.

Функция (20) удовлетворяет полностью всем граничным условиям и уравнениям равновесия. Функцию, дающую нулевые значения на контуре $F_{oi}(\varrho, \theta)$, примем в прежнем виде [уравнение (13)]. Тогда напряженное состояние полудиска выразится по формулам (7)–(9) или (14)–(16), где σ_r^κ , σ_θ^κ и $\tau_{r\theta}^\kappa$ принимаются по формулам (20)–(23).

Если нагрузка по прямолинейному контуру распределена по закону $q_2(\varrho) = -2,5q\varrho^{3/2}$, то при одном нулевом члене мы получим элементарное решение для простой балки по формуле Навье с учетом бокового обжатия на фиг. 11, позиция 0.

При нулевом и одном первом члене ряда мы получим эпюру σ_θ (фиг. 11, кривая I).

Кривая III получена при одном первом члене ряда с функцией (12) при $t, m, l = 1, n = 100$.

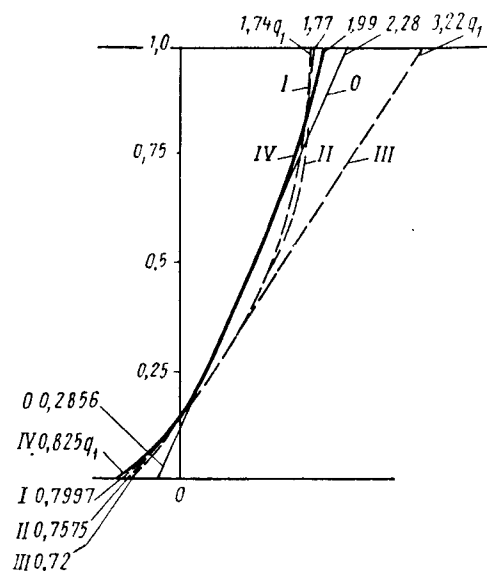
Для сравнения приведена экспериментальная кривая IV, полученная при загрузении диска равномерно распределенной нагрузкой по криволинейному контуру от оплетки при намотке на поворотном столе ДН-5.

Как видно из фиг. 11, растягивающие напряжения σ_θ более чем в 2,5 раза превышают значения, полученные из элементарного решения по формуле Навье (позиция 0). Наиболее близки к экспериментальной кривые I и II.

Первая получена при использовании элементарного решения в качестве первого приближения, вторая — при использовании в первом приближении одного первого члена аппроксимирующей функции (13).

Аналогичные результаты можно получить и для нагрузки, соответствующей второму виду загрузки.

Сравнение экспериментальной эпюры на фиг. 6, а и 11 (кривая IV) с теоретической на фиг. 10 и 11 (кривые I и II) показывает,



Фиг. 11. Напряжений σ_0 в сечении диска при $\theta = \frac{\pi}{2}$ от равномерно распределенной нагрузки по криволинейному контуру диска и нагрузки, распределенной по прямолинейному контуру по закону $q_2(r) = -2,5q_0 r^{3/2}$.

0 — при одном нулевом члене ряда по формуле Навье; I — при нулевом и одном первом члене ряда; II — при одном первом члене ряда; III — при одном первом члене ряда (другой вид аппроксимирующей функции); IV — кривая, полученная из эксперимента.

От равномерно распределенной нагрузки в диске создается равномерное дополнительное обжатие, уменьшающее растягивающие напряжения, одинаково действующие при обоих видах загрузки. Если по криволинейному контуру действует еще и трение, то нагрузка от оплетки уже не будет равномерно распределенной, и работа диска в одном случае может улучшаться, в другом ухудшаться. Причем степень улучшения или ухудшения работы ригеля зависит от величины трения.

Вообще трение неблагоприятно действует и на работу арматуры и бетона.

Выводы

Из проведенных экспериментальных исследований можно сделать следующие выводы:

1. От давления оплетки в диске возникает дополнительное боковое обжатие, уменьшающее растягивающие напряжения при обоих видах нагружения.

2. При испытании на первый вид нагружения в полукруглом диске в среднем радиальном сечении возникает двузначная эпюра напряжений σ_0 с растянутой зоной у прямолинейной грани.

3. При первом виде нагружения для полукруглого диска худшим будет случай нагружения криволинейного контура диска равномерно распределенной нагрузкой без трения.

4. При этом виде нагружения возможны два случая образования трещин:

первый — от растягивающих напряжений в среднем радиальном сечении при ширине опор $b_{on} = 0,4 \div 0,5R$;

второй — от главных напряжений вблизи опор при ширине последних $b_{on} < 0,4R$.

5. При втором виде нагружения в среднем радиальном сечении возникает двузначная эпюра напряжений σ_0 с растянутой зоной у криволинейной грани.

6. Величина напряжений, а также характер распределения давлений под штампом зависят как от вида внешней нагрузки, так и от размеров и жесткости штампа. При менее жестком штампе диск работает в более худших условиях.

7. При втором виде нагружения худшим будет тот случай, когда по криволинейному контуру, кроме нормального давления от оплетки, еще действует трение.

8. При этом виде нагружения возможны также два вида образования трещин:

первый — от растягивающих напряжений в среднем радиальном сечении при ширине штампа $b_{шт} \leq R$;

второй — от главных напряжений вблизи штампа при ширине последнего $b_{шт} > R$.

9. При действии сил трения оплетки о бетон диска усилие по длине проволоки в зависимости от полярного угла можно с достаточной для практики точностью определять по формуле (1).

Из проведенных теоретических исследований можно сделать следующие выводы:

1. Сравнение теоретических исследований с экспериментальными показывает, что предложенная методика расчета полудисков вполне приемлема и дает результаты, совпадающие с экспериментом в пределах 15%.

2. Предложены аппроксимирующие функции, дающие совпадение с экспериментом уже при одном первом члене ряда как при первом, так и при втором виде нагружения.

3. Получены аналитические выражения для напряжений в замкнутой форме, позволяющие получить конечные величины для напряжений в любой точке плоской области, в том числе и в полюсе полярной системы.

4. Наиболее близки к эксперименту результаты аппроксимирующих функций, дающих в первом приближении элементарное решение для простой балки по формуле Навье с учетом бокового обжатия.

5. Теоретические исследования показывают, что величины растягивающих напряжений, полученные по элементарной теории, более чем в 2,5 раза меньше этих же величин, полученных методом теории упругости; поэтому расчет полудиска следует производить по предложенной методике или каким-либо другим более точным методом по сравнению с предложенным.

6. Формулы, описывающие напряженное состояние полудиска, получены для равномерно распределенной нагрузки по криволинейному контуру и нагрузки, распределенной по прямолинейному контуру по любому закону.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, 1934.
2. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
3. Пратусевич Я. А. Вариационные методы в строительной механике. Гостехиздат, 1948.
4. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. Физматгиз, 1959.
5. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд-во «Высшая школа», 1961.

Кандидаты техн. наук
АГАДЖАНОВ В. И., ХЛЕБНОЙ Я. Ф.,
инженеры ОКУНЕВ Г. Н. и ФОНОВ В. М.

ЖЕЛЕЗОБЕТОННАЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННАЯ СТАНИНА ПРЕССА УСИЛИЕМ 600 т

Коллективом сотрудников НИИЖБ и ВНИИМЕТМАШа разработана конструкция и изготовлен гидравлический пресс-автомат ТЖ-600 со станиной из предварительно напряженного железобетона.

Пресс-автомат предназначен для прессования прутков или тонкостенных труб из цветных сплавов.

Нагретые в электронагревательной печи до температуры 450—500° С заготовки подаются в контейнер со скоростью 200 шт. в 1 ч.

Прессование труб производится усилием 600 т при помощи иглы, которая жестко закреплена на конце пресс-штемпеля.

Изготовленный пресс-автомат ТЖ-600 имеет следующую техническую характеристику:

Номинальное усилие пресса в т	600
Давление рабочей жидкости в кг/см ²	220
Максимальный ход траверсы в мм	1000
Рабочий ход плунжера в мм	300
Скорость прессования в мм/сек	600
Длина отпрессованных изделий в м	До 7,5
Производительность пресса в шт/ч	250
Габаритные размеры пресса в м:	
длина	1,8
ширина	2,1
высота	6,8
Общий вес пресса в т	45

Конструкция пресса обеспечивает максимальную автоматизацию всего процесса прессования, начиная от подачи заготовок и кончая удалением отпрессованных изделий.

Конструкция станины

Станина пресса состоит из железобетонных элементов: верхнего и нижнего ригеля и четырех колонн (фиг. 1).

После сборки станины все ее элементы при помощи предварительно напряженной проволоочной арматуры объединяются в единую пространственную раму.

В железобетонных элементах станины забетонированы металлические закладные детали, к которым после их механической обработки крепятся узлы пресса (цилиндры, стол, направляющие и др.).

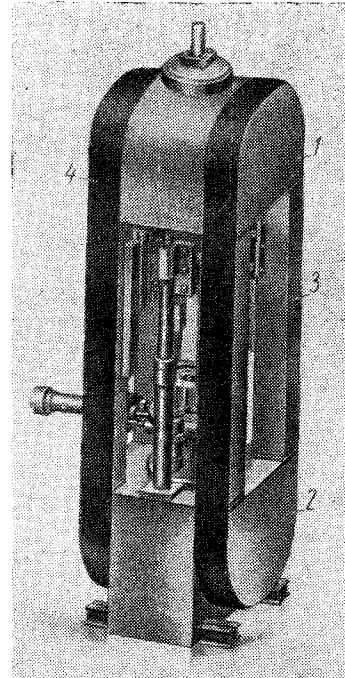
Главный рабочий цилиндр пресса расположен в теле верхнего ригеля, в котором забетонирована металлическая труба с тремя утолщенными поясами, служащими направляющими для запрессовки рабочего цилиндра. В нижней части ригеля находится стальная труба с плитой с выступающими по четырем углам пластинами, в которые упираются колонны станины. Для обеспечения равномерной передачи нагрузки от цилиндра на верхний ригель, закладная труба жестко приварена к плите ригеля и имеет в нижней части стальной бурт с косынками. Расположение главного рабочего цилиндра в верхнем ригеле позволило значительно снизить высоту пресса.

В нижнем ригеле станины забетонирована труба диаметром 357 мм, образующая отверстие для выхода отпрессованных изделий.

Кроме того, в нижнем ригеле забетонированы двутавры для опирания пресса и стальная плита, на которую устанавливается круглый стол с контейнером.

Колонны станины квадратного сечения 400×400 мм имеют закладную металлическую деталь для крепления направляющих подвижной траверсы пресса. По торцам колонн в местах их опирания с ригелями расположены стальные плиты.

Для прочной анкеровки закладных деталей в бетоне и для более равномерного распределения усилий в элементах станины к закладным деталям приварены круглые арматурные стержни.



Фиг. 1. Станина:

1 — верхний ригель; 2 — нижний ригель; 3 — колонны; 4 — напряженная проволоочная арматура.

Ненапряженная арматура станины принята в виде стержней и каркасов из круглой стали периодического профиля.

Предварительно напряженная арматура принята из высокопрочной гладкой проволоки диаметром 5 мм.

Арматура навивается на станину двумя замкнутыми поясами, проходящими вдоль колонн, и наружным криволинейным поверхностям ригелей.

Бетон для изготовления станины принят марки «500» с пределом прочности 500 кг/см^2 на 28-й день твердения.

Все бетонные поверхности станины покрываются антикоррозионным составом для их защиты от действия масел и эмульсий.

Основные принципы расчета станины

Нагрузка на станину. Станина находится под воздействием многократно повторяющейся нагрузки с циклом 250 загрузок в 1 ч. Наиболее ответственными элементами станины являются ригели, которые находятся под воздействием двух видов нагружения. Первый вид нагружения имеет место в рабочем состоянии пресса, когда из заготовки формируется изделие. Усилие в 600 т передается на верхний ригель через бурты цилиндра (по кругу), а на нижний ригель через круглый стол. В ненагруженном состоянии станины ригели подвергаются давлению предварительно напряженной арматуры, которое вызывает в последних напряжения, противоположные по знаку с первым видом нагружения.

Стойки станины как в первом, так и при втором виде нагружения испытывают сжимающие напряжения. При рабочем ходе цилиндра эти напряжения уменьшаются, а в ненагруженном состоянии увеличиваются.

Основные расчетные предпосылки. Верхний и нижний ригели станины представляют собою сложные пространственные конструкции. Верхний ригель — тело, ограниченное параболическим цилиндром четвертого порядка, плоскостями, перпендикулярными образующим цилиндра, и еще одной плоскостью, перпендикулярной к последним двум. Нижний ригель — параллелепипед, по двум граням которого образованы наплывы, по форме идентичные с верхним ригелем. В обоих ригелях имеются цилиндрические вертикальные отверстия. В верхнем ригеле — для расположения рабочего цилиндра, в нижнем — для выхода отпрессованных изделий (фиг. 1).

Даже приближенные расчеты таких конструкций представляют сложную задачу. В данном случае при расчете из ригелей мысленно выделялись наиболее жесткие их элементы, представляющие собой диски. Толщина этих дисков принималась равной ширине полосы-границы, по которой располагается предварительно напряженная арматура.

Так как жесткости мысленно выделенных элементов являются наибольшими по сравнению с остальными частями ригеля, то ими

воспринимается значительная доля нагрузки, приходящейся на весь ригель. В расчетах принято (в запас прочности), что вся нагрузка, приходящаяся на ригель, воспринимается выделенными элементами.

Таким образом, сложная пространственная задача приведена к плоской задаче. Однако решение плоской задачи для диска, ограниченного таким сложным контуром, также представляет значительные трудности. Расчет такого диска пришлось вести с принятием гипотезы плоских сечений. Но, так как в действительности расчетная модель представляет собой балку-стенку (сложного профиля), то это приводило к некоторым завышениям напряжений в сжатой зоне нормального сечения и, наоборот, давало заниженные напряжения в растянутой зоне. Поэтому напряжения в растянутой зоне определялись также исходя из расчета квадратной балки-стенки, т. е. при отношении высоты к пролету, равном единице. В этом случае, как известно, нейтральная ось расположена примерно на $\frac{1}{4}$ высоты балки. Распределение напряжений в растянутой зоне принималось по прямоугольной эпюре.

За расчетные величины напряжений принимались наименее благоприятные, взятые из обоих методов расчета.

Нагрузкой на расчетную модель-диск в ненагруженном состоянии станины служило давление предварительно напряженной арматуры. Так как радиус кривизны в криволинейной части контура является переменным, то это давление также будет переменным. При выборе формы очертания диска важно было сохранить максимально возможные размеры высоты диска в опорных сечениях, а максимальные величины интенсивностей давления оттянуть к опорным сечениям для уменьшения изгибающих моментов в диске при ненагруженном состоянии станины. Боковое давление арматуры использовалось для уменьшения растягивающих напряжений в «вертикальных» сечениях диска. В расчетах криволинейные эпюры давления арматуры заменены: вертикальное — равновеликими треугольными эпюрами, а горизонтальное — равновеликими трапециoidalными эпюрами.

Давление ригеля на колонны принято равномерно распределенным по площади торца колонны.

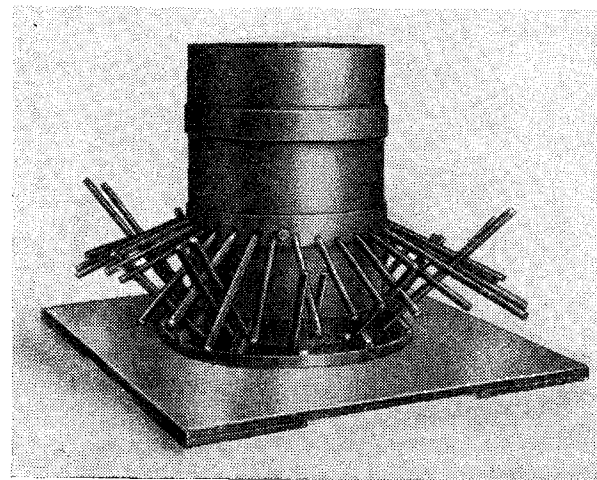
За расчетное давление арматуры в ненагруженном состоянии станины принималось давление арматуры без учета потерь.

Что касается нагрузки, передаваемой буртом рабочего цилиндра на ригель через кольцевой фланец, а следовательно, и на расчетную модель последнего — диск, то таковая имеет крайне сложный характер. В расчете предполагается, что после конструктивных мероприятий ее условно можно считать распределенной по прямолинейной части контура диска симметрично на участке, ограниченном сектором, имеющим угол 45° , а вершину, расположенную в центре цилиндрического отверстия ригеля.

Таким образом, половина рабочего усилия пресса в 300 т распределяется на указанном участке расчетной модели в виде равномерно распределенной нагрузки и является первым видом ее загрузки. При этом давление арматуры по криволинейной части диска (в этом расчетном случае) принимается с учетом потерь.

Изготовление станины

Изготовление железобетонных элементов. По разработанным НИИЖБом рабочим чертежам ВНИИМЕТМАШем были изготовлены металлические закладные детали станины, к которым затем приваривались анкерные стержни для прочного их сцепления с бетоном.



Фиг. 2. Приварка анкерных стержней к закладной трубе верхнего ригеля.

На фиг. 2 показана закладная труба верхнего ригеля в процессе приварки к ней анкерных стержней. Анкера были приняты из круглой стали диаметром 30 мм марки Ст. 3 по ГОСТ 380-60 и приваривались к металлической трубе торцовым швом. Для улучшения качества сварки стержни, с подлежащего приварке торца, обрабатывались.

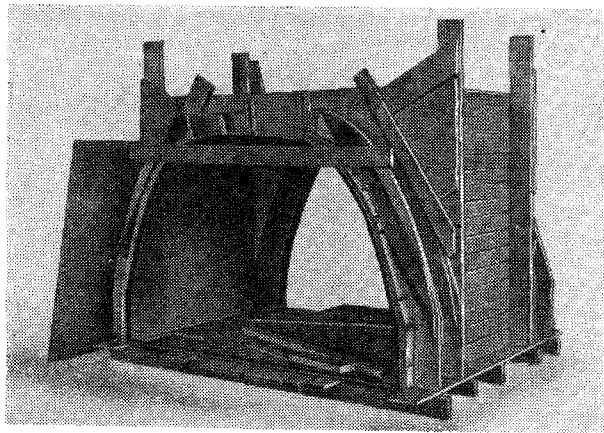
Для предохранения элементов станины от повреждений в процессе транспортировки, монтажа и изготовления, острые бетонные грани окаймлялись уголками, к которым также были приварены анкерные стержни.

После приварки анкерных стержней к закладным деталям устанавливали арматуру, которая состояла из криволинейных и прямых стержней периодического профиля.

Для каждого элемента станины была изготовлена деревянная опалубка, обшитая по внутренним поверхностям фанерой.

Опалубка верхнего ригеля составлялась из двух боковых разъемных частей с внутренней криволинейной поверхностью, соответствующей поверхности ригеля — параболы четвертой степени. Кроме того, торцовые поверхности ригеля закрывались двумя сплошными плоскими щитами.

Все элементы опалубки стягивались тязями. Прочность опалубки была обеспечена постановкой по наружным поверхностям с четырех сторон уголков № 70 с отверстиями по концам.



Фиг. 3. Опалубка нижнего ригеля в процессе изготовления.

Для стоек станины была изготовлена опалубка, предназначенная для бетонирования сразу двух стоек, т. е. с двойной оборачиваемостью.

В боковых наружных щитах опалубки оставлены вырезы, в которых при бетонировании помещалась закладная металлическая деталь.

На фиг. 3 показан общий вид опалубки нижнего ригеля в процессе ее изготовления.

Торцовая опалубка нижнего ригеля также состоит из сплошных плоских щитов.

Укрепление опалубки при бетонировании нижнего ригеля было обеспечено установкой с четырех сторон уголков № 70, снятых с опалубки верхнего ригеля и стянутых по концам тязями.

Бетон для предварительно напряженной станины принят марки «500».

Уплотнение бетонной смеси производили при помощи глубинных вибраторов.

При бетонировании нижних слоев бетона в нижней части опалубки были сделаны окна, через которые подавали часть бетонной смеси и производили уплотнение бетона в углах ригелей и в нижних слоях.

После заполнения опалубки бетонной смесью до уровня окон, окна в опалубке закрывали и дальнейшее уплотнение производили вибраторами сверху, до полного окончания бетонирования.

Открытые поверхности бетона ригелей были тщательно заглажены и укрыты слоем сырых опилок.

Распалубку ригелей производили на шестой день твердения.

Для защиты бетонных поверхностей станины от возможного воздействия масел и эмульсий изготовленные элементы станины были покрыты антикоррозийным составом на основе эпоксидной смолы ЭДФ-3 (фиг. 4).

До отправки на обработку железобетонные элементы станины были выдержаны в течение 8—15 дней для получения бетона необходимой прочности.

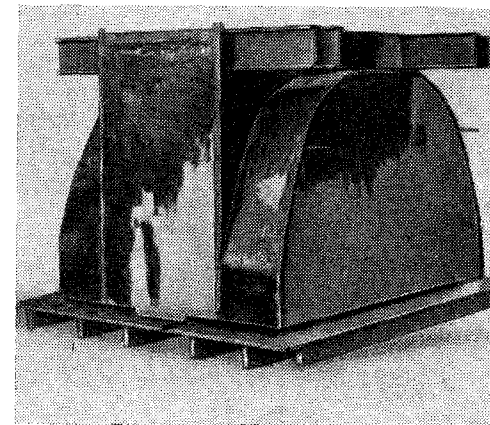
В процессе бетонирования железобетонных элементов были изготовлены контрольные бетонные кубы размером $20 \times 20 \times 20$ см. Контрольные кубы, изготовленные при бетонировании верхнего ригеля, показали временное сопротивление бетона (среднее из трех испытаний) на 14-й день твердения 500 кг/см^2 , а на 30-й день твердения 630 кг/см^2 .

Кубы, изготовленные при бетонировании нижнего ригеля, показали соответственно 510 кг/см^2 на 14-й день твердения и 606 кг/см^2 на 28-й день твердения бетона. Оставшиеся серии бетонных кубов были испытаны в момент испытания станины и показали среднее временное сопротивление на сжатие $500\text{—}600 \text{ кг/см}^2$.

Вес отдельных железобетонных элементов станины достигал $12\text{—}14 \text{ т}$, обработка поверхности механических деталей проводилась на обычных металлообрабатывающих станках.

Сборка станины и навивка напряженной арматуры

Монтаж станины из готовых элементов. Монтаж станины производился в горизонтальном положении, на месте производства последующей навивки на нее высокопрочной проволоки.



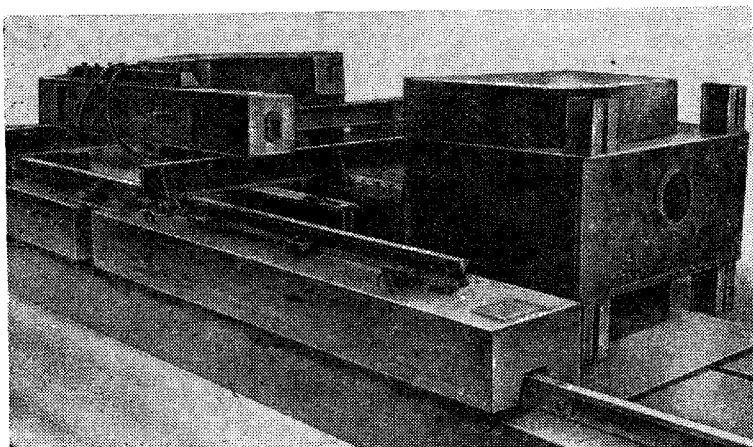
Фиг. 4. Покрытие ригеля антикоррозийным составом.

Последовательность монтажа заключалась в следующем:

1. На металлическом листе размером $2000 \times 6000 \times 25$ мм, служившем основанием для сборки, устанавливали верхний и нижний ригели с расстоянием между ними около 4 м.

2. В пазы платиков верхнего ригеля вставлялись с плотной посадкой металлические вкладыши, которые должны фиксировать насадку стоек.

3. После установки вкладышей производилась установка стоек, из которых две нижние стойки на подкладках укладывались



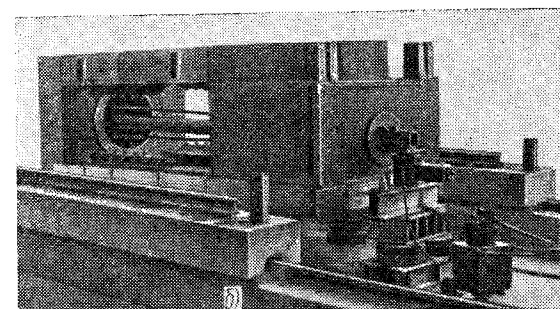
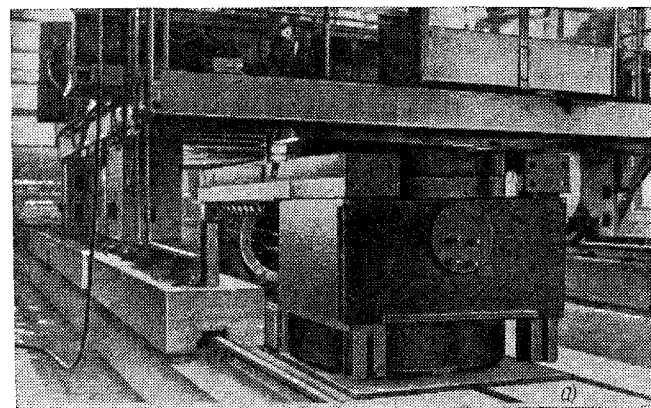
Фиг. 5. Сборка станины из железобетонных элементов.

на металлический лист, а две верхние стойки опирались на металлические балки (фиг. 5).

Для плотного примыкания стоек с верхним ригелем каждую стойку слегка вывешивали мостовым краном, а затем со стороны свободного торца стоек легкими ударами кувалды подавали стойки в направлении к ригелю.

4. Соединение стоек прессы с нижним ригелем производилось в обратной последовательности, т. е. вкладыши устанавливались в пазы торцов стоек, а затем подводился нижний ригель краном и своими пазами в платиках примыкал к вкладышам. После того, как было произведено примыкание нижнего ригеля к стойкам, через имеющиеся отверстия верхнего и нижнего ригелей пропускали четыре тяжа для стяжки всех элементов станины. Усилие от тяжей передавалось на круглые металлические фланцы, которые передавали нагрузку на ригели и стойки.

Намотка на станину предварительно напряженной арматуры. Намотка непрерывной предварительно напряженной арматуры осуществлялась с помощью самоходной намоточной машины типа

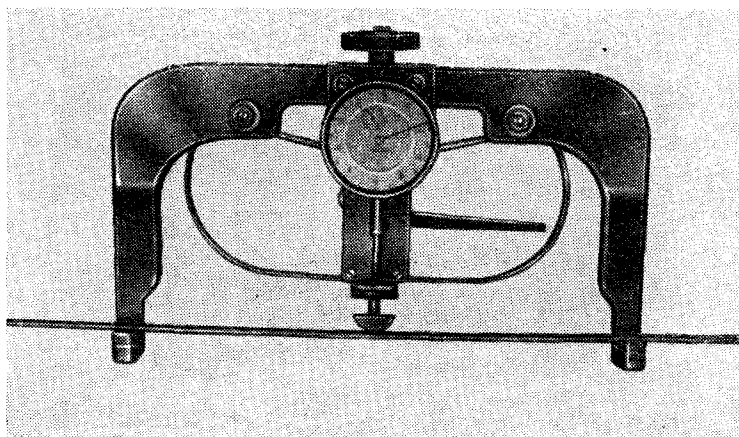


Фиг. 6. Технология намотки напряженной арматуры на станину:

а — намотка первого пояса арматуры; б — подъем станины перед переворачиванием; в — намотка второго пояса арматуры.



ДН-7. Намотка арматуры производится при возвратно-поступательном движении самой машины по рельсам вдоль и возвратно-поступательном движении каретки со шпинделем поперек. Размещение арматуры по высоте происходит при подъеме и опускании шпинделя, встроенного в корпус каретки машины. С помощью машин типа ДН-7 решается вопрос о создании предварительно напряженной арматуры непрерывно армированных конструкций с любой конфигурацией и направлением в габаритах шириной до 3,2 м, высотой до 0,5 м и практически неограниченной длины.



Фиг. 7. Пружинный прогибомер для определения усилия натяжения проволоки.

Натяжение арматуры осуществляется грузом через систему блоков. Помимо грузового метода натяжения арматуры, машина ДН-7 может осуществлять комбинированное натяжение арматуры (груз + электронагрев). Температура нагрева в зависимости от диаметра проволоки принимается 300—400° С.

Вследствие того, что высота подъема и опускания шпинделя с арматурой не превышает 0,5 м, намотка осуществлялась в два этапа.

В первый этап входит предварительная подготовка конструкций к намотке и намотка одной стороны станины (фиг. 6, а).

После намотки первого слоя начиналась намотка второго, а затем третьего. Поверхность каждого слоя покрывалась эпоксидной смолой для защиты от коррозии. Суммарное число витков в трех слоях равно 200 шт.

Второй этап начинается с перекантовки станины для дальнейшей обмотки. Для этой цели через отверстия в станине и фланцах стяжного устройства была вставлена толстостенная труба, служив-

шая осью, вокруг которой можно было перевернуть станину. Усилиями домкратов станина была поднята над полом и подвешена на трубе (фиг. 6, б), перевернута и затем снова опущена на пол. После этого снова начинался процесс обмотки. Обмотка второй стороны станины изображена на фиг. 6, в. После намотки третьего слоя концы арматуры отрезались и закреплялись фиксирующими болтами.

Во время намотки велся контроль за величиной усилия напряжения арматуры путем периодических замеров усилия с помощью пружинного прогибомера (фиг. 7)

Средняя величина усилия напряжения на одну проволоку по показаниям прогибомера была равна 1200 кг.

Испытание станины

Испытание готовой станины проводилось на опытном заводе ВНИИМЕТМАШа с целью определения несущей способности (прочности) и общего характера деформаций станины от действия пробной нагрузки.

Кроме того, для выяснения напряженного состояния элементов станины при воздействии эксплуатационной нагрузки 600 т были проведены дополнительные испытания с измерением деформаций способом электротензометрии.

Станина загружалась при помощи гидравлического домкрата, имеющего максимальное усилие 1000 т с насосом, приводимым в движение электроприводом. Передача нагрузки от домкрата на станину осуществлялась посредством набора жестких металлических штампов. От верхнего жесткого штампа усилие передавалось на бурт металлического стакана, забетонированного в верхнем ригеле станины.

Первый этап испытания заключался в пробном нагружении станины со ступенями 200; 400; 500; 700 т без установки приборов с повторением полных циклов нагружения до 10 раз.

После приложения каждой ступени нагружения проводился наружный осмотр станины, причем обращалось особое внимание на следующее:

1) появление трещин в наиболее опасных сечениях станины, в частности, в средней зоне между дисками на боковой поверхности верхнего ригеля, в среднем сечении плоскости диска, а также в опорных сечениях ригеля;

2) раскрытие швов между верхним ригелем и стойками прессы.

3) деформативность верхнего ригеля в зоне приложения нагрузки, а также поперечную деформацию металлического стакана в верхней части ригеля;

4) работу стыков высокопрочной предварительно напряженной арматуры.

Во время испытаний видимых трещин в опасных сечениях не обнаружено, а также не наблюдалось раскрытия швов между ригелем и стойками пресса.

Общая вертикальная деформация верхнего ригеля в зоне приложения нагрузки определялась по рискам, нанесенным на поверхности поршня в месте его выхода из цилиндра домкрата в момент приложения нагрузки от 20 до 750 т по этапам.

Суммарная деформация при нагрузке 750 т находилась в пределах 0,5—1,2 мм.

Максимальная нагрузка на станину была доведена до 780 т. Таким образом, коэффициент перегрузки по отношению к эксплуатационной нагрузке (600 т) равен 1,3 и превышает коэффициент перегрузки $k = 1,25$, обычно принимаемый при испытании прессов.

Деформации металлического стакана в поперечном направлении измерялись по двум взаимно перпендикулярным диаметрам штихмасом, точность измерения которого равна 0,01 мм. Изменений в поперечных размерах стакана по двум диаметральному направлениям не наблюдалось.

Не замечено также каких-либо существенных изменений при нагружении станины в стыках предварительно напряженной арматуры.

Вторым этапом испытания предусматривалось определить в наиболее характерных сечениях элементов станины возникающие деформации от приложения нагрузки в пределах эксплуатационной, равной 600 т. Деформации измерялись при помощи электронного измерителя АИ-1.

На фиг. 8 показана схема расстановки электротензометрических датчиков с базой измерения, равной 50 мм.

На верхнем ригеле, как наиболее ответственном элементе, наклеивались датчики по всем расчетным сечениям, а именно: по средним сечениям с двух сторон параболического цилиндра, по средним сечениям между полудисками и у граней оснований двух плоскостей А—А и Б—Б.

На нижнем ригеле датчики были наклеены только на одной плоскости Б—Б. По три датчика было наклеено на каждую стойку станины пресса. В два ряда по контуру со стороны А—А были наклеены датчики на проволоки арматурного пояса. На верхнем ригеле по плоскости Б—Б датчики были наклеены на защитный слой эпоксидной смолы для сравнения работы с датчиками, наклеенными на бетон.

Для контроля деформаций в среднем сечении между дисками и в других характерных точках ставились дублирующие датчики.

В верхней части металлического стакана в поперечном направлении по диаметру был установлен прогибомер с чувствительностью 0,01 мм. Статическая нагрузка давалась, как и в первом этапе испытания, домкратом со ступенями загрузки 200; 400;

500; 600 т с последующим разгрузением 500; 400; 200 и 0 т. Максимальная нагрузка была доведена до 700 т, а относительные деформации замерялись с точностью $1 \cdot 10^{-6}$. Деформации, полученные при приложении нагрузки по среднему сечению между дисками верхнего ригеля, показаны на фиг. 9 а.

При нагрузке 500 т, судя по показаниям датчиков (растяжение), в верхней зоне ригеля должны были возникнуть волосяные трещины.

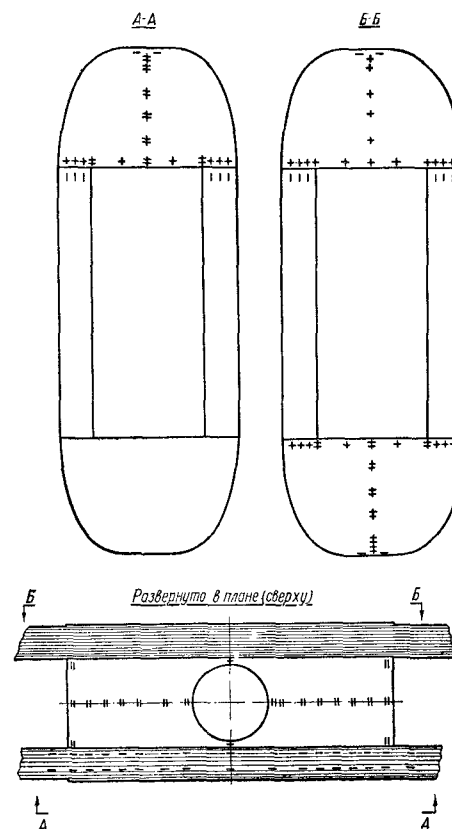
По наружному осмотру невооруженным глазом никаких трещин обнаружено не было. При более тщательном осмотре с помощью лупы на одной стороне посередине исследуемого участка были обнаружены две микротрещины и на другой стороне ригеля—одна микротрещина.

Когда нагрузка была доведена до 700 т, увеличения трещин, а также резкого роста деформаций не наблюдалось, что дало возможность судить о постоянной жесткости ригеля в данном сечении и достаточной несущей способности станины.

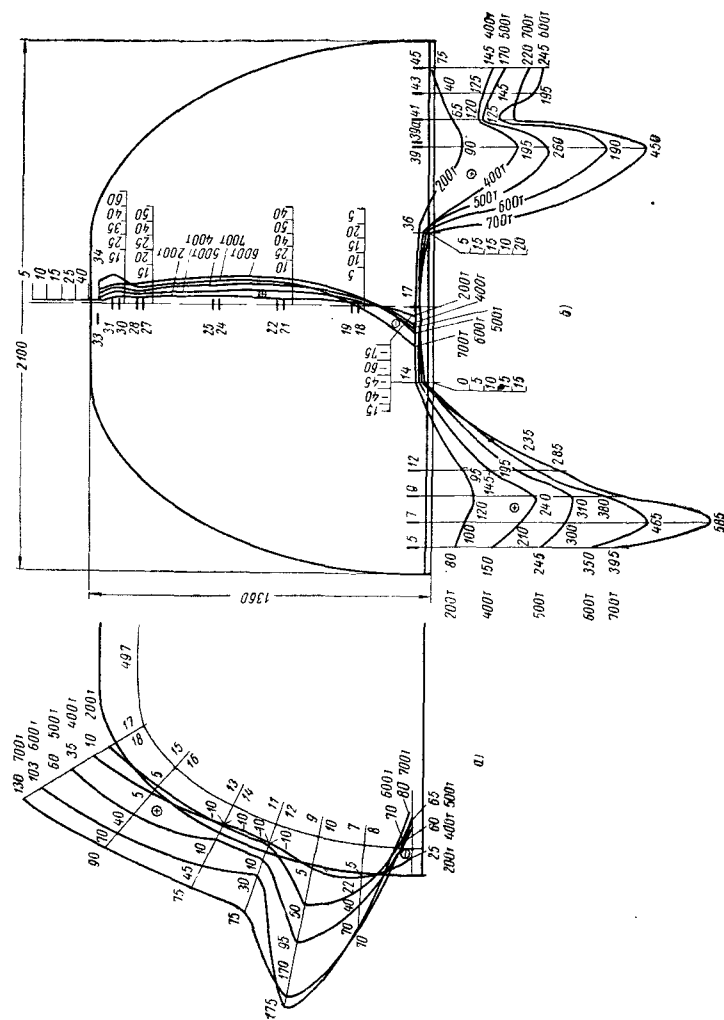
Хотя по приведенным данным и можно судить о надежности работы станины при эксплуатации пресса, однако для увеличения трещиностойкости при дальнейшем проектировании станин следует предусмотреть поперечное предварительное напряжение ригелей в направлении, перпендикулярном плоскостям дисков. Это особенно важно, если в процессе эксплуатации пресса возможны перегрузки станины, превышающие 600 т в условиях их многократного приложения.

Полученные относительные деформации в плоскости дисков со стороны А—А (см. фиг. 8) верхнего ригеля приведены на фиг. 9, б.

Эпюра деформации диска со стороны Б—Б аналогична эпюре, приведенной на фиг. 9, б, хотя датчики на стороне Б—Б наклеивали на эпоксидной смоле.



Фиг. 8. Схема наклейки тензодатчиков при испытании станины.



Фиг. 9. Эпюры деформаций бетона:
а — по среднему сечению между дисками верхнего ригеля; б — по среднему и нижнему сечению диска верхнего ригеля станины.

В среднем сечении плоскости диска нейтральная ось находится на $\frac{1}{4}$ высоты диска от нижней плоскости ригеля. Принимая модуль упругости бетона $E_b = 3,8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ при марке бетона «500», получаем величину максимального сжимающего напряжения в крайнем волокне, равной $20\text{—}25 \text{ кг/см}^2$; величины растягивающих напряжений колеблются в этих же пределах.

В силу того, что величины напряжений в среднем сечении от обжатия, полученные во время намотки высокопрочной проволоки, превышают растягивающие напряжения при эксплуатационной нагрузке в 2—3 раза, можно считать все вертикальное сечение сжатым. На фиг. 9 также показаны деформации бетона у нижней грани дисков, т. е. в местах примыкания стоек к ригелю, а также между стойками. Деформации, замеренные по вертикальным датчикам, дают возможность судить о распределении напряжений, возникающих в зоне примыкания стоек к ригелю и в пролете между стойками. При этом нужно отметить, что напряжения в центре пролета приближаются к нулю.

По деформациям стоек отмечалась их неравномерная работа, которая, по-видимому, вызвана перекосом их во время монтажа, а также эксцентрицитетом при приложении нагрузки от домкрата.

О характере приращения напряжений в арматуре по контуру можно судить по деформациям, замеренным датчиками (фиг. 10). На прямолинейном участке максимальное приращение напряжений в проволоке при действии нагрузки в 700 т равно 415 кг/см^2 . Расчетная величина наибольшего предварительного напряжения была принята $0,65 R_n$, т. е. 11000 кг/см^2 . Во время намотки напряжение в арматуре при усилии 1200 кг на одну проволоку составляло 6120 кг/см^2 . Таким образом, полное напряжение при эксплуатационной нагрузке равно $6120 + 415 = 6535 \text{ кг/см}^2$, что значительно меньше расчетной величины.

Деформаций в поперечном направлении металлического стержня по прогибомерам не замечено.

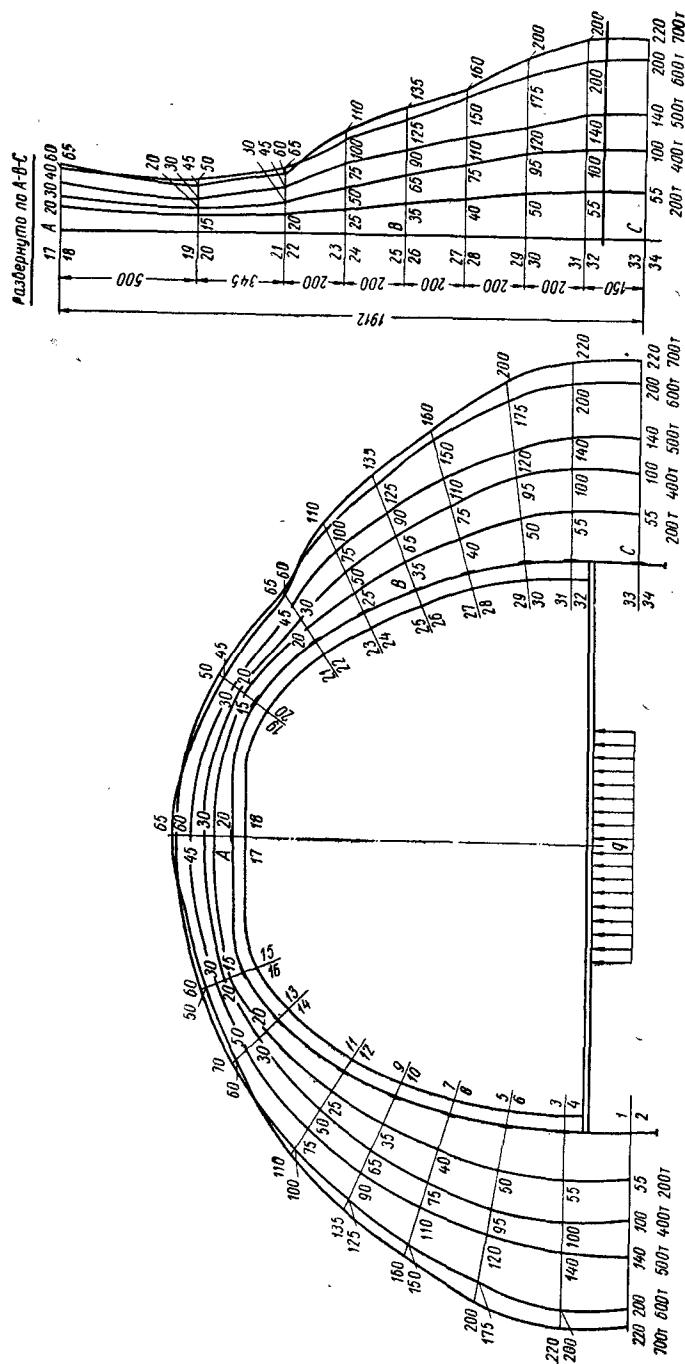
Таким образом, испытание станины подтвердило ее высокую прочность и жесткость, что позволило рекомендовать пресс ТЖ-600-1 для работы в производственных условиях.

Технико-экономические показатели

Известные до сих пор в отечественной и зарубежной практике прессостроения гидравлические прессы выполнялись со станинами из металла, вес которых составляет $50\text{—}60\%$ от общего веса прессы.

При изготовлении железобетонных станин прессов 1 м^3 железобетона позволяет заменить от $1,25$ до $2,0 \text{ т}$ металла.

В таблице приведены сравнительные технико-экономические показатели станин шестисоттонного прессы, выполненных в металле и железобетоне.



Фиг. 10. Эпюры деформаций арматуры, примыкающей к криволинейной поверхности верхнего ригеля.

Сравнительные технико-экономические показатели станин шестьсоттонного пресса

Наименование показателя	Исполнение станины	
	в железо-бетоне	в металле
Общий вес станины в <i>т</i>	30	15,5
Объем бетона в <i>м³</i>	9,6	—
Вес металла в <i>т</i>	7,3	15,5
в том числе закладные детали в <i>т</i>	4,7	—
Трудоемкость на 1 <i>т</i> чистого веса станины в чел.-час	32,6	44,5
Площадь станины в плане в <i>м²</i>	3,5	3,1
Стоимость станины в тыс. руб.	3,6	10,8

Таким образом, только от применения железобетона на один пресс экономится более 10 *т* конструктивной стали и около 3 *т* конструктивной стали заменяется дешевой круглой арматурной сталью, применяемой для железобетонных конструкций.

Экономия денежных средств составляет 7,2 тыс. руб. при одновременном сокращении сроков изготовления станины.

Канд. техн. наук **КАРАНФИЛОВ Т. С.**

ЖЕЛЕЗОБЕТОННАЯ КЛЕТЬ ПРОКАТНОГО СТАНА «КВАРТО-200»

Прокатные станы являются основным оборудованием металлургических предприятий по обработке металлов давлением. Главная линия каждого прокатного стана состоит из рабочих клеток, двигателей и передаточных механизмов.

Рабочая клетка, состоящая из двух станин, между которыми располагаются прокатные валки, и воспринимающая все давление, приложенное к валкам при прокатке, является наиболее ответственной конструкцией всего прокатного стана, к ней предъявляются весьма высокие требования как по прочности, так и по жесткости.

В крупных прокатных станах вес одной клетки составляет 100—200 т и более. Прокатный стан может состоять из одной клетки (одноклетевые станы) или нескольких (многоклетевые станы). Так, например, листовые станы включают в себя до пяти клеток, а сортовые до двенадцати клеток и более. Таким образом, в одном стане общий вес рабочих клеток может достигать 1000 т и более. В год изготавливается примерно до 100 шт. рабочих клеток различных размеров. Общий их вес составляет около 10 тыс. т.

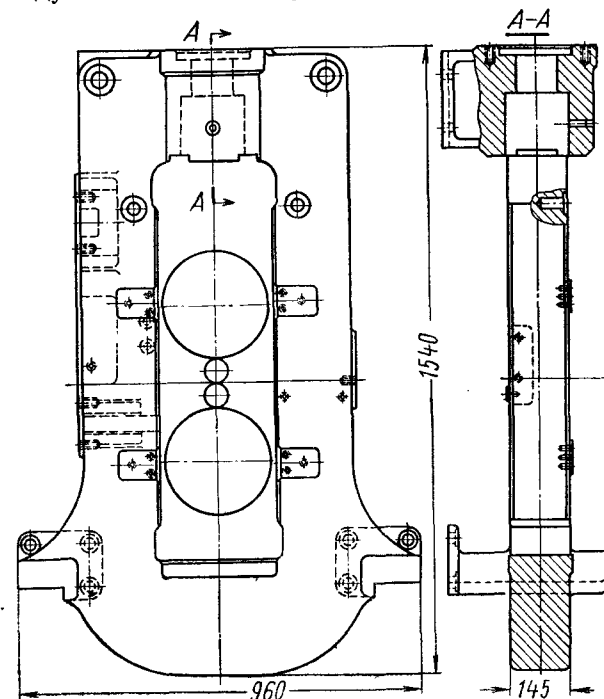
Рабочие клетки прокатных станов изготавливаются из стального литья. Однако крупные литые детали из стали обладают рядом существенных недостатков (см. статью Людковского И. Г.), которые послужили основной причиной для изыскания новых, более эффективных способов формообразования станин рабочих клеток прокатных станов. Применение для этих целей железобетона дает экономию металла, удешевление и сокращение сроков изготовления конструкций.

До настоящего времени никакого опыта в части применения железобетона для клеток прокатных станов не было. Поэтому, прежде чем приступить к разработке железобетонных клеток для крупных прокатных станов, необходимо было сначала проработать данный вопрос для клеток небольших размеров, с тем чтобы после накопления некоторого опыта перейти уже к более крупным. С этой целью и была поставлена первая задача — за-

проектировать, изготовить и испытать небольшую железобетонную клетку для опытно-промышленного стана «Кварто-200», предназначенного для холодной прокатки цветных металлов. Эта задача решалась в НИИ бетона и железобетона Госстроя СССР¹. Сам прокатный стан «Кварто-200» разрабатывался и изготовлялся во ВНИИМЕТМАШе.

Конструкция клетки

Рабочая клетка стана «Кварто-200», выполненная в металле, состоит из двух стальных литых станин закрытого типа, соединенных между собой болтами (фиг. 1).



Фиг. 1. Станина клетки прокатного стана «Кварто-200» из стального литья.

Краткая характеристика рабочей клетки «Кварто-200»

Размеры в мм:	
поперечного сечения стоек	180×145
нижнего ригеля	280×145
Внутренние размеры станин в мм	1000×280
Расстояние между осями станин в мм	450
Размер между станинами в мм	1000×300
Общий вес клетки в кг	2100

¹ В работе принимали участие инженеры Кулыгин Ю. С. и Волков Ю. С.

Для разработки конструкции железобетонной клетки прокатного стана «Кварто-200» были поставлены следующие условия:

а) деформация станин клетки по вертикали между опорами подшипников валков (между опорными подушками) при эксплуатационных нагрузках не должна превышать 0,09 мм;

б) коэффициент запаса прочности станин при эксплуатационных нагрузках должен быть не менее 2;

в) клеть должна быть рассчитана на выносливость, поскольку нагрузки являются многократно повторными;

г) бетон клетки должен быть надежно защищен от действия масел и эмульсий, а также и от механических повреждений.

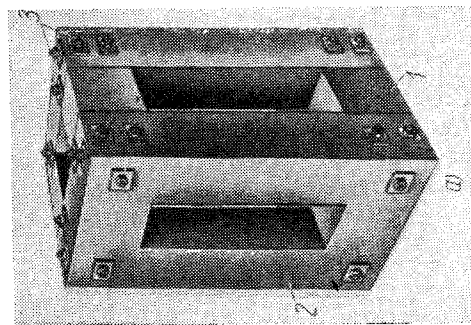
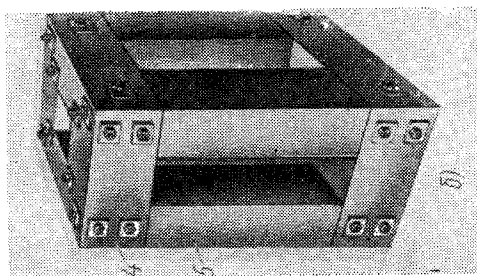
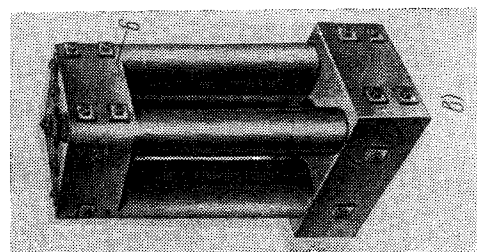
Эти условия послужили основными исходными данными для разработки конструкции и определения сечений элементов железобетонной клетки.

Разработано в эскизном исполнении несколько вариантов конструкций железобетонной клетки стана «Кварто-200». Некоторые из этих вариантов показаны на фиг. 2.

Конструкция клетки, показанная на фиг. 2, а, состоит из двух вертикальных рам и четырех междурамных ригелей. Каждая рама представляет собой станину клетки. На фиг. 2, б показана клеть, состоящая из двух горизонтальных рам и четырех междурамных стоек. В обоих вариантах предварительное обжатие рам и клетки в целом осуществляется напрягаемой стержневой арматурой. Сечение стоек 300×300 мм, сечение ригелей 400×300 мм. Из рам и междурамных стоек (или ригелей) клеть собирается сначала на сварке, а затем уже обжимается; при этом рамы обжимаются до сборки клетки.

Как уже отмечалось выше, бетон клетки должен быть хорошо защищен от действия масел и эмульсий, а также и от отколов при ударах. Наиболее надежной защитой может служить металлическая облицовка, которая в то же время является и опалубкой при бетонировании; при этом стойки целесообразно делать круглыми, так как они могут быть выполнены из стандартных труб и, кроме того, в этом случае отпадает надобность в их временном креплении при бетонировании, как в случае прямоугольных стоек. Помимо этого, наличие металлической облицовки позволяет довольно просто решать вопросы прикрепления к станинам клетки направляющих для опирания подшипников валков и других элементов конструкций оборудования клетки. В этом случае все крепления осуществляются на сварке.

Вариант клетки с металлической облицовкой показан на фиг. 2, в. Клеть этого варианта была принята в дальнейшем к разработке, испытанию и внедрению в опытно-промышленном стане «Кварто-200». Конструкция клетки состоит из четырех стоек круглого сечения, соединенных сверху и внизу прямоугольными ригелями (архитравами). В центре ригеля имеется технологическое



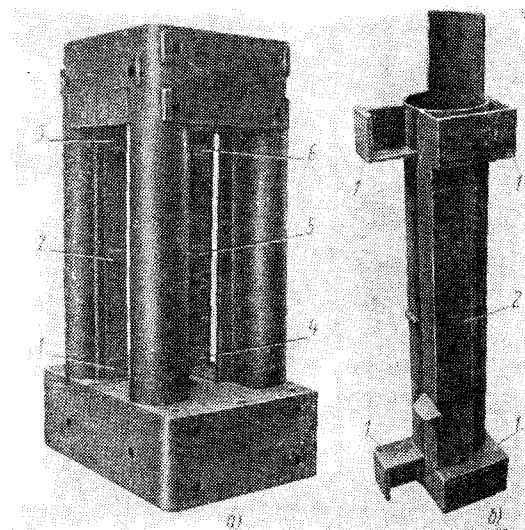
Фиг. 2. Варианты железобетонной клетки стана «Кварто-200» с прямоугольными (а и б) и круглыми (в) стойками:

1 — междустанинные ригели; 2 — станина; 3 — напрягаемая стержневая арматура; 4 — ригельная рама; 5 — стойка; 6 — ригель-архитрав.

отверстие диаметром 257 мм. Стойки выполнены из стандартных труб, заполненных бетоном (трубобетон). Наружный диаметр трубы 273 мм, толщина стенки 8 мм. К каждой стойке приварены направляющая и узлы соединения стоек в станине и станин в клетки (фиг. 3, б). Соединение стоек в клетке между собой осуществлено на болтах с установкой фиксаторов (шпонок), что позволяет окончательно обрабатывать каждую стойку в отдельности

и затем уже собирать стальной каркас клетки из полностью готовых элементов. Последнее обстоятельство имеет важное значение для большой клетки, стальной каркас которой будет изготавливаться на заводе-изготовителе, а бетонирование клетки должно производиться непосредственно на ее рабочем месте.

Верхний ригель клетки имеет размер 863×843 мм, нижний — 1200×843 мм. Высота ригелей 400 мм. Боковые и внутренние грани ригелей облицованы 2-мм стальным листом, а торцовые грани, где нет стальной облицовки, покрыты специальной антикоррозионной



Фиг. 3. Стальной каркас:

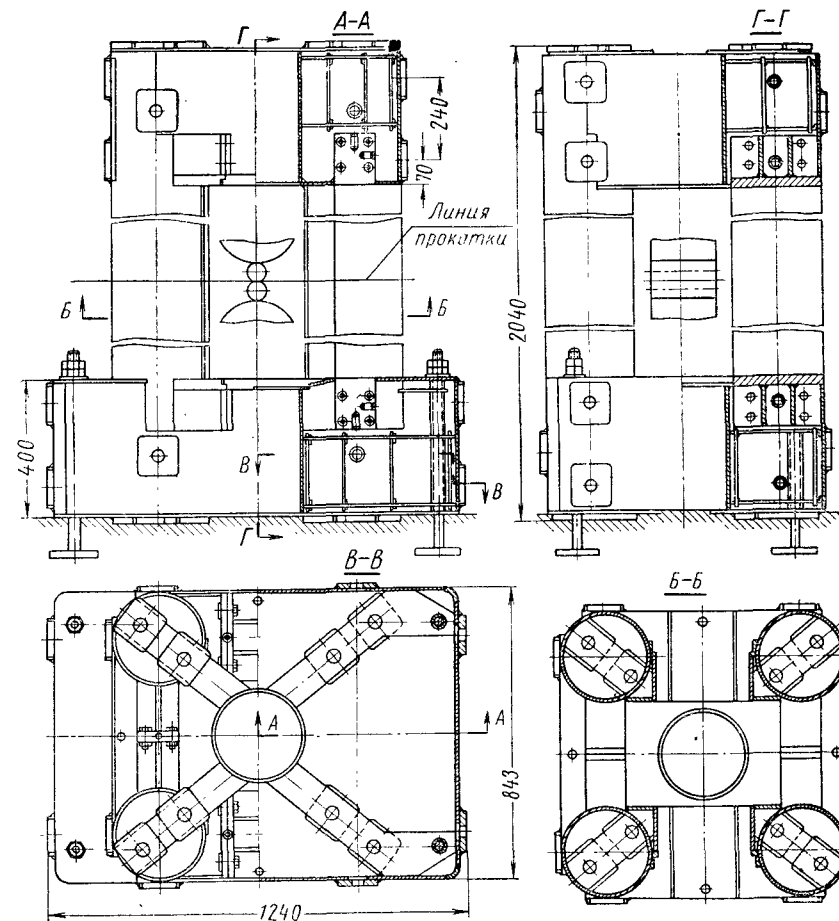
а — железобетонной клетки стана «Кварто-200», б — стойки клетки с направляющей и приваренными узлами для соединений: 1 — узлы соединений стоек между собой в пространственную конструкцию клетки; 2 — направляющая; 3—б — пластины.

мастикой, состоящей из молотого песка и эпоксидной смолы с отвердителем. Каждый ригель конструктивно армирован двумя сетками из арматуры диаметром 6 и 10 мм.

Таким образом, принятая конструкция железобетонной клетки для прокатного стана «Кварто-200» состоит из стального каркаса (кожуха), заполненного бетоном. Общий вид стального каркаса показан на фиг. 3, а. Конструкция каркаса показана на фиг. 4*.

Сборка стального каркаса клетки производится в следующем порядке. Сначала на болтах собираются в единую пространственную конструкцию все четыре стойки. Затем на сварке крепится к стойкам облицовка наружных граней ригелей. После этого уста-

навливаются заранее изготовленные арматурные каркасы, которые привариваются к облицовке ригелей. В последнюю очередь устанавливаются отрезки труб для образования технологических отверстий в ригелях. Трубы закрепляются путем приварки к арма-

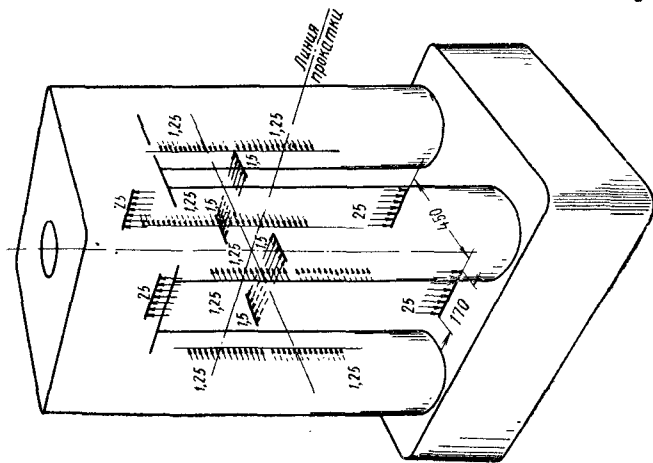


Фиг. 4. Конструкция стального каркаса железобетонной клетки стана «Кварто-200».

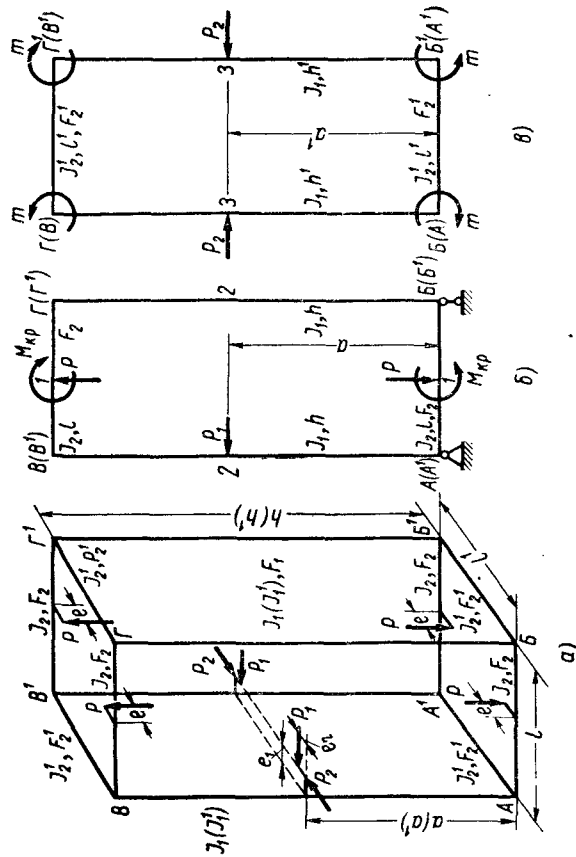
турным каркасам и облицовке. Общий вес каркаса клетки составляет 944 кг.

Усилия, возникающие от давления металла при прокатке и от натяжения моталки, полностью передаются станинам клетки. Эти усилия являются внешними нагрузками на клеть. К стальной клетке они приложены без эксцентриситетов, а к железобетонной с некоторыми эксцентриситетами, так как сечения элементов

* Проект каркаса выполнен во ВНИИМЕТМАШ инженерами Романовым В. В. и Голяницкой Т. Н.



Фиг. 5. Схема нагрузок в м на клеть прокатного стана «Кварто-200».



Фиг. 6. Расчетные схемы опытной железобетонной клетки стана «Кварто-200»: а — расчетная схема клетки; б — расчетная схема рамы-станины; в — расчетная схема поперечной рамы; г — расчетная схема рамы-станины. $e_1 = 6$ см; $e_2 = 13$ см; $P = 25$ т; $P_1 = 1,5$ т; $P_2 = 1,25$ т; $h = 153$ см; $l = 86$ см; $l' = 55,3$ см; $h' = 159$ см; $a = 90,5$ см; $a' = 93,5$ см.

железобетонной клетки, определяемые по заданной деформации, близкой к деформации стальной клетки, превышают сечения элементов последней, а валки остаются прежних размеров, без изменений, т. е. такими же, как и в стальной клетке. Это вызвано тем, чтобы в случае необходимости железобетонная клетка могла быть легко заменена стальной без изменения остального оборудования стана «Кварто-200». Поэтому работа всех элементов железобетонной клетки значительно усложняется по сравнению со стальной. Стойки и ригели станин железобетонной клетки при эксплуатационных нагрузках с учетом предварительного обжатия работают на сжатие, изгиб в двух плоскостях и кручение. Схема приложения эксплуатационных нагрузок к железобетонной клетке стана «Кварто-200» показана на фиг. 5. На этой схеме указаны также и величины действующих нагрузок.

Железобетонная клетка прокатного стана «Кварто-200», как видно на фиг. 5, представляет собой массивную пространственную конструкцию. Точный статический расчет такой конструкции встречает значительные затруднения. Поэтому опытная клетка была рассчитана приближенно — путем расчленения пространственной конструкции на отдельные замкнутые плоские рамы. В приближенном расчете действительная работа конструкции в какой-то степени упрощена и схематизирована (фиг. 6, а—г). Для установления степени соответствия принятой расчетной схемы действительной работе опытной клетки, последняя была испытана и притом только на деформативность, поскольку расчет по деформациям в этом случае является основным и определяющим сечения элементов. Испытания опытной клетки производились на статические и многократно повторные нагрузки.

Бетонирование клетки

Материалы, из которых был приготовлен бетон для опытной клетки, следующие: цемент портландский Белгородского завода, активность 510 кг/см^2 ; предел прочности при растяжении $29,7 \text{ кг/см}^2$; песок горный средней крупности; щебень известняковый крупностью 5—20 мм.

В расчетах клетки принят бетон марки «500» с модулем упругости $4,1 \times 10^5 \text{ кг/см}^2$. Исходя из этого, на основании анализа результатов испытания из пробных замесов кубов на прочность и призмы на деформативность, для бетонирования клетки был принят следующий состав бетона в расчете на 1 м^3 :

цемента в кг	660
песка сухого в кг	383
щебня сухого в кг	1113
воды в л	244
водоцементное отношение	0,37
осадка конуса в мм	10
25 Сборник 1835	385

Клеть бетонировалась в вертикальном положении за два приема. Сначала бетонировался нижний ригель, а затем на второй день клеть была перевернута и было выполнено бетонирование стоек и верхнего ригеля; для этого в стойках на уровне верхней плоскости нижнего ригеля были сделаны диафрагмы из 2-мм стального листа. Бетон укладывался слоями по 25—35 см с непрерывным вибрированием глубинным вибратором. Трубы (каналообразователи) с наружным диаметром 45 мм извлекались из бетона вручную через 3 ч после окончания бетонирования. В течение этого времени они через каждые 20—30 мин проворачивались вокруг своей оси для облегчения извлечения. Перед установкой в клеть трубы смазывались жидким маслом. Твердение бетона происходило естественным путем.

Таблица 1

Результаты испытания контрольных кубов и призм

№ образцов	Возраст в сут-ках	Предел прочности бетона в кг/см ²				$\frac{R_{np\ 10}^{cp}}{R_{k\ 10}^{cp}}$	Средний модуль упругости, замеренный при $0,5R_{np\ 10}$ $E_6 \cdot 10^{-5}$ в кг/см ²	Начальный модуль упругости $E_0 \cdot 10^{-5}$ в кг/см ²
		Кубиковая прочность		Призменная прочность				
		$R_{k\ 10}$	$R_{k\ 10}^{cp}$	$R_{np\ 10}$	$R_{np\ 10}^{cp}$			
1 2 3	3	347 332 312	330	180 240 305	242	0,735	2,08 2,68 2,78	2,48 3,02 3,10
4 5 6	7	450 536 515	500	300 317 345	320	0,640	3,70 3,19 3,27	3,74 3,51 3,57
7 8 9	14	570 613 575	586	420 517 490	476	0,812	3,24 3,91 3,56	4,35 4,90 3,85
10 11	28 35	586 665	620	528 565	547	0,885	3,20 4,55	3,61 4,95
13 14 15	78 80 80	782 589 727	699	635 680 640	652	0,934	3,66 4,58 4,03	4,04 4,75 4,12
16 17 18	103 104 105	706 714 695	705	665 650 580	632	0,896	4,40 4,35 3,63	4,18 4,00 4,00

$R_{np\ 10}$ и $R_{k\ 10}$ — прочность бетона в призмах $10 \times 10 \times 31$ и кубах $10 \times 10 \times 10$.

$R_{пр10}$ и $R_{к10}$ — прочность бетона в призмах $10 \times 10 \times 31$ и кубах $10 \times 10 \times 10$.

Одновременно с бетонированием опытной клетки из того же бетона были изготовлены контрольные призмы размером $10 \times 10 \times 31$ см и кубы размером $10 \times 10 \times 10$ см. Призмы и кубы распалубливались через двое суток и до испытания находились в камере влажного хранения. Результаты испытаний призм и кубов приведены в табл. 1.

Деформации бетона при испытании призм определялись по среднему значению показаний четырех тензометров, установленных по четырем граням призмы на базе 100 мм. Нагрузка создавалась ступенями по 2 т ($\sigma = 20$ кг/см²) с выдержкой по 10 мин на каждой ступени.

Средний модуль упругости E_6 (его часто называют также модулем деформации бетона) определялся по тангенсу угла между осью деформаций ϵ и секущей, соединяющей начало координат с точкой на кривой диаграммы $\epsilon - \sigma$, соответствующей $\sigma = 0,5R_{пр10}$. Начальный модуль упругости E_0 (его называют также истинным модулем упругости бетона) вычислялся как среднее арифметическое число из тангенсов углов между осью ϵ и секущими, соединяющими начало координат с точками на диаграмме $\epsilon - \sigma$ при мгновенном нагружении, соответствующими $\sigma = 40; 80; 120$ кг/см² и т. д., через 40 кг/см².

Контроль расстояния между направляющими

Важным условием работы клетки прокатного стана является высокая жесткость конструкции, определяемая по допускаемым деформациям при эксплуатационных нагрузках. От величины деформации клетки зависит точность изготовления прокатываемых изделий.

Обработка стальной литой клетки производится после старения и стабилизации усадки металла; при этом обеспечиваются параллельность направляющих по высоте станин и требуемое расстояние между ними. Во время эксплуатации клетки расстояния между направляющими несколько меняются вследствие изгиба стоек, но эти изменения, благодаря высокой жесткости клетки, невелики.

В железобетонной клетки расстояния между направляющими станин могут меняться вообще не только от эксплуатационных нагрузок во время работы стана, но также и во время изготовления клетки: а) при бетонировании — вследствие давления на стенки каркаса бетона при его вибрировании; б) в период твердения бетона — вследствие его усадки; в) при предварительном обжатии клетки — вследствие деформаций сжатия ригелей. Для выяснения величин изменения расстояний между направляющими, в каждом случае производились соответствующие замеры индикатором с ценой деления 0,01 мм. Точность измерения находилась в пределах 0,04 мм. Измерения производились двумя приборами — основным и дублиром, чтобы исключить случайные ошибки при отсчетах.

Для замеров расстояния между направляющими, к последним в трех местах по высоте были приварены и затем обработаны специальные пластинки (платики). Расстояние между двумя противоположными платиками измерялось в четырех точках по углам платика и принималось среднее значение. Результаты измерений приведены в табл. 2, где даны не истинные расстояния между платиками, а разница в показаниях индикаторов при измерениях. При уменьшении расстояния между направляющими показания индикаторов увеличиваются и, наоборот.

Таблица 2

Результаты измерений расстояний между направляющими

№ платиков (фиг. 3, а)	Разница показания индикаторов в мк					
	Перед бетонированием	Через день после бетонирования	Перед обжатием (через 50 дней после бетонирования)	После обжатия (через 65 дней после бетонирования)	После испытания при отсутствии эксплуатационных нагрузок (через 98 дней после бетонирования)	После испытания при горизонтальной нагрузке 3 т (через 98 дней после бетонирования)
1	0,0	-19	-19	+81	+56	+46
2	0,0	-21	-19	+118	+83	+76
3	0,0	-61	+13	+96	+81	+84
4	0,0	-5	-5	+59	+33	+38
5	0,0	-18	-11	+87	+61	+52
6	0,0	-37	-16	+65	+61	+60

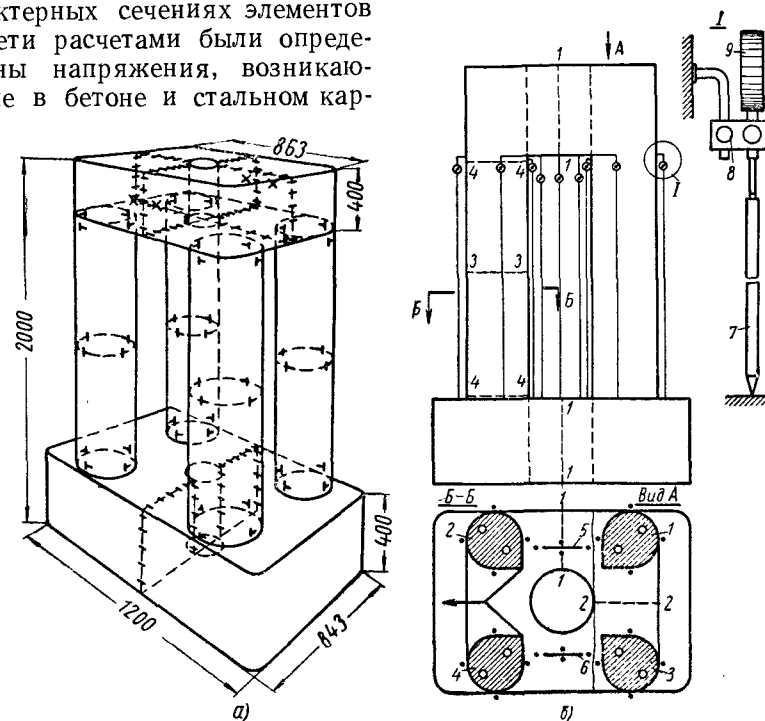
Как видно из табл. 2, процесс бетонирования и усадка бетона при твердении практически никакого влияния на изменение расстояний между направляющими не оказали. Имеющаяся в этих случаях тенденция к некоторому увеличению расстояний между направляющими объясняется по-видимому повышением температуры стального каркаса вследствие экзотермии бетона. Однако это увеличение составляет в среднем всего лишь от 9 до 27 мк, что находится в пределах точности измерений. После предварительного обжатия клетки расстояния между направляющими уменьшились в среднем на 85 мк. По расчету это уменьшение в упругой стадии составляет около 50 мк. Разница в 35 мк также находится в пределах точности измерений. Однако следует отметить, что имеющаяся некоторая тенденция к уменьшению расстояний между направляющими против расчета может быть объяснена ползучестью бетона.

Расстояния между направляющими измерялись также и после окончания испытаний клетки при отсутствии эксплуатационных нагрузок и при действии только одной горизонтальной нагрузки величиной 3 т. Как видно из табл. 2, расстояния при этом практически не изменились.

Таким образом, можно считать, что уменьшение расстояний между направляющими после обжатия клетки соответствует практически расчету и может быть заранее учтено при проектировании клетки.

Предварительное обжатие клетки

Расчет сечений элементов клетки выполнен в соответствии с действующими нормативными документами по проектированию предварительно напряженных железобетонных конструкций. В характерных сечениях элементов клетки расчетами были определены напряжения, возникающие в бетоне и стальном кар-



Фиг. 7. Схемы расположения на опытной клет:

а — проволочных тензодатчиков; б — индикаторов; 1, 2, 3 и 4 — стойки; 5 и 6 — линии приложения нагрузки; 7 — стержень; 8 — хомутки 9 — индикатор.

касе при предварительном обжатии и эксплуатационных нагрузках, а также и деформации клетки. Для определения действительных напряжений, в тех же сечениях были наклеены проволочные тензодатчики, с помощью которых измеряются относительные деформации в данной точке. Схема расположения тензодатчиков на клет показана на фиг. 7, а.

Тензодатчики были наклеены также и на стержни напрягаемой арматуры для контроля усилий при их натяжении. На каждом

стержне было четыре датчика — по два в двух сечениях, взятых на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины стержня. В каждом сечении датчики располагались на противоположных сторонах стержня. Выводные провода от датчиков крепились к стержню изоляционной лентой в нескольких местах и выходили наружу под шайбой.

Ригели клетки при эксплуатационных нагрузках с учетом предварительного обжатия испытывают одновременно осевые изгибающие и крутящие усилия. Для измерения осевых деформаций и деформаций изгиба в среднем сечении каждого ригеля были наклеены датчики по всему периметру, а для измерения деформаций кручения на наружных гранях двух ригелей были наклеены датчики крестом под углом 45° к продольной оси ригеля.

Расстояние между опорными подушками каждой станины рабочей клетки при эксплуатационных нагрузках увеличивается вследствие осевых деформаций стоек, деформаций изгиба и кручения ригелей и деформаций смятия бетона под опорными подушками.

Для измерения в процессе испытания клетки изменения расстояния между опорными подушками станин и деформаций стоек, на клетки было установлено 28 шт. индикаторов с ценой деления 0,002 мм. Схема расположения индикаторов на клетки показана на фиг. 7, б.

Для того чтобы получить деформацию стойки по ее оси и изменение расстояния между опорными подушками по линии равнодействующей давления валков, на каждой стойке и между опорными подушками каждой станины установлено по четыре индикатора.

При предварительном обжатии клетки и в процессе ее испытания статическими нагрузками индикаторы к клетке крепились при помощи специальных хомутов и коротышей из арматуры диаметром 8 мм, приваренных к каркасу клетки (фиг. 7, б).

Для предварительного обжатия клетки применена стержневая горячекатаная арматура периодического профиля с расчетным диаметром 36 мм из стали марки 35ГС, упрочненная вытяжкой до 5500 кг/см² при удлинении на 6%. Все стержни были обточены до диаметра 33 мм по всей длине. Это сделано для того, чтобы уменьшить опасность повреждения датчиков на стержнях при установке последних в каналы диаметром 45 мм. Резьбовая нарезка на концах стержней 2М33×1,5. Гайки высотой 45 мм из стали марки 40Х. Шайбы под гайки размером 120×120 мм толщиной 20 мм из стали марки Ст. 3.

Механические характеристики стали 35ГС до и после упрочнения стержней и химический состав плавки приведены в табл. 3.

Натяжение напрягаемой стержневой арматуры осуществлялось гидравлическим однопоршневым домкратом типа ДС-60/315, который предварительно был протарирован. Максимальное тяговое усилие домкрата 60 т, ход поршня 315 мм.

390

Таблица 3

Механические характеристики стали 35ГС до и после упрочнения стержней и химический состав плавки

Сталь 35ГС	Механические характеристики				
	Предел пропорциональности в кг/см ²	Предел текучести в кг/см ²	Предел прочности в кг/см ²	Модуль упругости в кг/см ²	Относительное удлинение в %
До упрочнения	3750	3890	6180	$1,97 \cdot 10^6$	23
После упрочнения вытяжкой	2500	5960	6570	$1,9 \cdot 10^6$	14,2
Сталь 35ГС	Химический состав в %				
	Углерод С	Марганец Mn	Кремний Si	Фосфор Р	Сера S
До упрочнения	0,32	0,86	0,85	0,024	0,045
После упрочнения вытяжкой	—	—	—	—	—

Контролируемое усилие натяжения каждого стержня 35 т, установившееся усилие по расчету 30 т. Натяжение стержней производилось в два этапа. Сначала все стержни натягивались до усилия 17,5 т, а затем до 35 т. В обоих этапах сначала натягивались все вертикальные стержни, а затем все горизонтальные.

Усилия натяжения стержней контролировались по манометру на насосной станции и по показаниям датчиков на стержнях. При натяжении каждого стержня показания датчиков фиксировались дважды: при создании требуемого усилия в стержне домкратом и после снятия домкрата, когда усилие в стержне полностью передавалось на гайку. Это дало возможность судить о потерях напряжения в стержнях, возникающих от обжатия шайб и гаек после снятия домкрата.

Потери напряжений в вертикальных стержнях длиной 2 м от обжатия шайб и гаек составили в среднем около 14%, а в горизонтальных стержнях длиной 0,85 и 1,2 м — в среднем около 18%. В данном случае значительное влияние на увеличение потерь в горизонтальных стержнях оказало еще и то обстоятельство, что шайбы неплотно прилегали к необработанным граням ригелей и при снятии домкрата они частично деформировались. Толщина

шайб 20 мм оказалась недостаточной и в промышленном образце клетки она была увеличена до 26 мм.

При натяжении арматуры показания датчиков фиксировались как на натягиваемом стержне, так и на всех уже ранее натянутых; при этом установлено, что усилия в уже натянутых стержнях при натяжении любого стержня менялись (увеличивались или уменьшались) ничтожно мало — в пределах 1% от величины контролируемого усилия.

Деформации клетки при натяжении стержней измерялись индикаторами. После натяжения каждого стержня отсчеты снимались по всем индикаторам. При натяжении всех стержней от 0 до 17,5 т (первый этап натяжения) средняя деформация стоек составила 0,103 мм, а между опорными подушками станин — 0,124 мм; при натяжении стержней от 17,5 до 35 т (второй этап натяжения) средняя деформация стоек составила 0,122 мм, а между опорными подушками — 0,143 мм. Деформации клетки на втором этапе натяжения стержней оказались на 20% выше, чем деформации на первом этапе, что можно объяснить ростом пластических деформаций бетона с увеличением его напряжения.

Приведенные деформации стоек и изменение расстояния между опорными подушками станин являются средними из показаний четырех индикаторов. Разница показаний индикаторов на одной стойке составляла в среднем около 20%. В этих же пределах находился и разброс показаний индикаторов между опорными подушками станин.

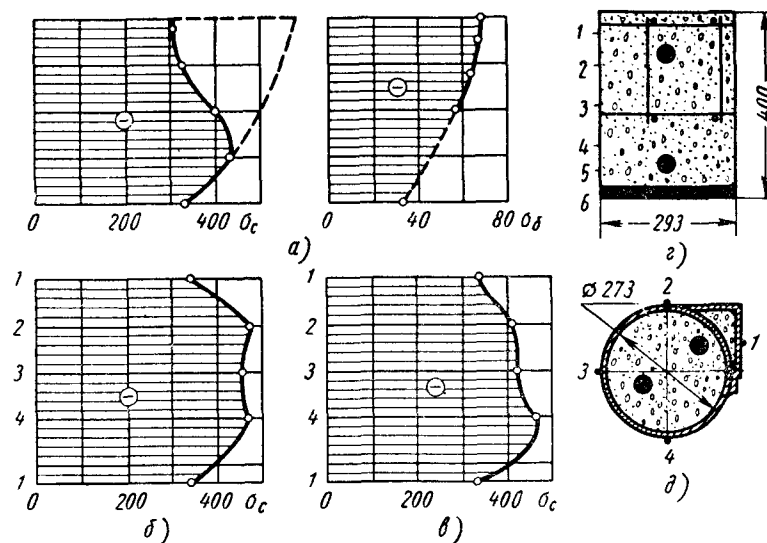
При натяжении вертикального стержня в какой-либо стойке противоположная по диагонали стойка испытывала растяжение, а все остальные — сжатие. Деформации стоек при натяжении всех стержней на 35 т составили 0,225 мм, а деформации между опорными подушками — 0,267 мм. Разница в 0,042 мм получилась, по-видимому, за счет изгиба ригеля, вследствие неравномерного обжатия стоек.

Напряжения в сечениях элементов клетки при обжатии определялись по показаниям датчиков: в стальной оболочке при $E_c = 2 \cdot 10^6$ кг/см², в бетоне при $E_b = 4 \cdot 10^5$ кг/см². Как видно из схемы расположения датчиков на клетке (фиг. 7, а), каждый датчик в средних сечениях стойки дублировался 4 раза, а в крайних сечениях (у ригеля) — 8 раз. Датчики на ригелях дублировались 2—4 раза (в ригелях имелись также и глубинные датчики).

Напряжения в каждой точке определялись по среднему значению показаний всех датчиков, дублирующих данный, т. е. расположенных на клетке симметрично; при этом показания датчиков, отличавшихся от остальных более, чем на 25%, не учитывались. Вычисленные таким образом напряжения в стойках и ригелях клетки приведены в табл. 7. Эпюры напряжений показаны на фиг. 8.

Уменьшение напряжения в верхней части стальной оболочки ригеля следует объяснить неполной совместной работой стальной

обшивки с бетоном. Это подтверждается тем, что в процессе обжатия по линии контакта обшивки с бетоном образовались небольшие трещины; следовательно, имело место частичное отставание 2-мм стального листа от бетона. При полной совместной работе обшивки



Фиг. 8. Эпюры напряжений от предварительного отжатия:

а — в среднем сечении ригеля станин; б — в среднем сечении стойки; в — в сечении стойки у ригеля; г — сечение ригеля; д — сечение стойки; σ_c — напряжения в кг/см² в стальном каркасе; σ_b — напряжения в кг/см² в бетоне.

с бетоном эпюра напряжений должна соответствовать пунктирной линии (фиг. 8). Для этого обшивка должна иметь большую толщину и чаще расположенные анкерные стержни, приваренные к арматурным сеткам.

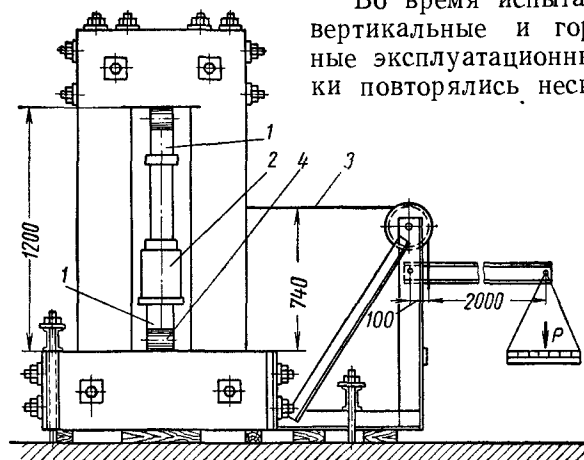
Испытание клетки на эксплуатационные нагрузки

Схема испытания клетки (фиг. 9) принята в соответствии со схемой приложения эксплуатационных нагрузок, показанной на фиг. 5; при этом равномерно распределенные горизонтальные нагрузки в запас прочности заменены сосредоточенными силами, приложенными в плоскости прокатки, которая на 140 мм выше среднего сечения стоек. Вертикальная нагрузка на клетку создавалась гидравлическим домкратом мощностью 100 т, установленным внутри клетки. Давление от домкрата на станины клетки передавалось через распределительные балки и катки диаметром 100 мм и длиной 170 мм, причем один каток к балке приварен, а другой

установлен свободно (катучая опора). Эксплуатационная вертикальная нагрузка составляет 50 т — по 25 т на каждую станину клетки.

Горизонтальные эксплуатационные нагрузки на клеть в испытаниях создавались при помощи рычажной установки. Тяги со стойками соединены шарнирно. При усилии в тросе 3 т и угле между тягами 80° (фиг. 7, б) нагрузки, приложенные к стойке вдоль и нормально к линии прокатки, составляли 1,5 и 1,25 т.

Во время испытания клетки вертикальные и горизонтальные эксплуатационные нагрузки повторялись несколько де-



Фиг. 9. Схема статических испытаний клетки эксплуатационными нагрузками:

1 — распределительные балки; 2 — гидравлический домкрат на 100 т; 3 — трос; 4 — катки.

сятков раз как в отдельности, так и при совместном их действии; вертикальная нагрузка, кроме того, несколько раз увеличивалась до 100 т, т. е. в 2 раза. Показания индикаторов фиксировались после каждого приложения нагрузки, а датчиков — после нескольких повторений.

Основной задачей испытания клетки на действие эксплуатационных нагрузок являлось определение деформации (изменение расстояния) между опорными подушками ригелей станин, которая складывается из деформации растяжения стоек, деформации изгиба (прогиба) ригелей станин и деформации смятия (сжатия) бетона в ригелях под стальными опорными подушками. Чтобы определить все эти деформации, индикаторы были установлены на всех стойках, между опорными подушками станин и между торцовыми гранями клетки. Разность деформаций стоек и между опорными подушками станин составляет сумму деформаций изгиба и смятия бетона под опорными подушками обоих ригелей одной станины. Разность деформаций между торцовыми гранями клетки

и между опорными подушками составляет сумму деформаций смятия бетона под опорными подушками ригелей станины. Замеренные при статических эксплуатационных нагрузках деформации клетки приведены в табл. 4—6.

В табл. 4 приведены деформации стоек и деформации между опорными подушками станин при действии только одной вертикальной нагрузки величиной 50 т, повторявшейся 55 раз, и величиной 100 т, повторявшейся 15 раз. Как видно, средняя деформация растяжения стоек составляет 0,029 мм, а средняя деформация между опорными подушками обеих станин — 0,080 мм.

В первых двух циклах нагружения клетки нагрузка 50 т прикладывалась ступенями по 10 т с выдержкой по 3—4 мин на каждой ступени для снятия отсчетов. Деформации при этом возрастали практически по линейной зависимости. Следовательно, материал конструкции работал в упругой стадии. В первых трех циклах выдержка при нагрузке 50 т составляла по 1 ч. Деформации упругого последствия между опорными подушками при этом составили 0,012 мм, 0,006 мм и 0,005 мм. В циклах испытания нагрузкой в 100 т ступенями по 25 т деформации также возрастали практически линейно.

В табл. 5 приведены деформации, возникающие в клетке от действия только одной горизонтальной нагрузки величиной 3 т, а также от совместного действия вертикальной и горизонтальной нагрузок. Величины деформаций от действия горизонтальной нагрузки 3 т составляют 1—2 мк и находятся в пределах точности измерений. Следовательно, можно считать, что горизонтальные нагрузки практически не влияют на деформации клетки и поэтому в расчетах их можно не учитывать.

В табл. 6 приведены деформации между торцовыми гранями клетки и деформации смятия бетона под опорными подушками ригелей. Как видно, деформация смятия бетона в одном ригеле составляет 0,015 мм. Зависимость между нагрузками и деформациями здесь также близка к прямолинейной.

При эксплуатационной нагрузке 50 т получены экспериментально следующие деформации клетки: растяжение стойки — 0,030 мм, прогиб ригеля — 0,010 мм, смятие бетона под опорной подушкой — 0,015 мм. Деформация между опорными подушками станин, следовательно, составляет $0,03 + 2(0,01 + 0,015) = 0,080$ мм.

При увеличении вертикальной нагрузки до 100 т трещин в бетоне ригелей обнаружено не было, ригели работали без трещин.

Во время испытания клетки определялись напряжения во всех стойках и ригелях; при этом в стойках только в стальной оболочке, а в ригелях — в стальной оболочке и в бетоне. Полученные экспериментально напряжения в среднем сечении ригеля станины и в среднем и крайнем сечениях стойки приведены в табл. 7; эпюры напряжений показаны на фиг. 10, а — в.

Таблица 4

Деформации опытной клетки при действии только вертикальной нагрузки

№ циклов нагрузок	Нагрузка в т	Деформации в мм							
		Растяжение стоек клетки (фиг. 7, б)					Увеличение расстояния между опорными подушками станины (фиг. 7, б)		
		1	2	3	4	Сред- нее	5—5	6—6	Сред- нее
1	10	5	5	5	6	5	20	14	17
	20	9	9	10	12	10	28	32	30
	30	17	12	20	18	15	47	56	52
	40	21	16	26	25	22	60	74	67
	50	26	22	32	32	28	78	94	86
	Выдержка 1 ч	41	33	40	45	40	85	110	98
2	10	4	3	3	3	3	12	11	12
	20	8	8	7	8	8	25	28	27
	30	15	15	13	16	15	36	46	41
	40	23	21	20	23	22	51	66	59
	50	30	28	27	30	29	68	86	77
	Выдержка 1 ч	38	34	33	35	35	72	93	83
3	50 Выдержка 1 ч	31 32	29 30	30 31	30 32	30 31	74 73	82 93	78 83
4—8 9—13 14—18 19—28 24—28 29—33 34—37 38—55	50 50 50 50 50 50 50 50	28 30 29 29 30 29 30 28	26 29 27 28 28 29 28 34	27 29 27 28 28 29 29 28	29 30 28 30 30 30 30 24	28 30 28 28 29 29 29 29	75 75 78 76 75 75 73 66	82 85 83 86 86 86 86 80	79 81 81 81 81 81 80 73
56—65	25 50 75 100	13 30 47 64	15 31 47 63	12 28 44 60	11 28 46 63	13 29 46 63	24 70 116 160	36 84 132 176	30 77 124 168
66—70	100	66	69	57	53	61	133	178	156

Таблица 5

Деформации опытной клетки при нагрузках:
50 т — вертикальная и 3 т — горизонтальная

Нагрузка в <i>t</i> (10 циклов)	Деформации в <i>мк</i>							
	стоек (фиг. 7, б)					между опорными подушками (фиг. 7, б)		
	1	2	3	4	Сред- няя	5—5	6—6	Сред- няя
Горизонтальная на- грузка 3 <i>t</i> . . .	0	—2	0	—2	—1	—2	—1	—2
Вертикальная нагруз- ка 50 <i>t</i>	30	30	30	31	30	74	87	80
Суммарная нагрузка 3 <i>t</i> + 50 <i>t</i>	30	28	30	29	29	72	86	79

Таблица 6

Деформации смятия бетона под опорными подушками

Коли- чество циклов	Нагрев в т	Деформации в мк								
		между опорными подушками (фиг. 7, б)			между торцовыми гранями клетки			смятие бетона в двух ригелях станины		
		5—5	6—6	Сред- нее	5—5	6—6	Сред- нее	5—5	6—6	Сред- нее
7	50	73	86	80	50	48	49	23	38	31
3	100	160	176	168	112	104	108	48	72	60

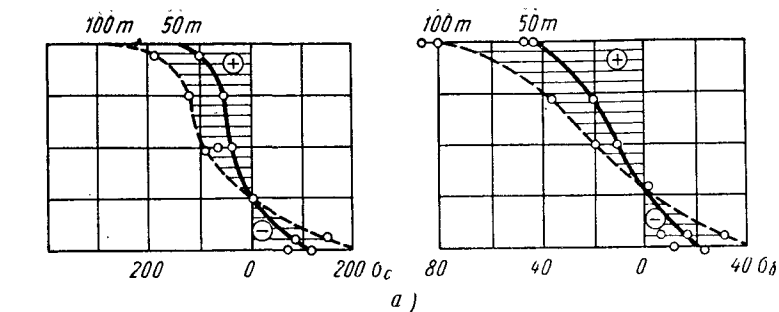
Суммарные эпюры напряжений в ригеле и в стойке станины от предварительного обжатия и эксплуатационных нагрузок (эпюры напряжений в эксплуатационной стадии) показаны на фиг. 11, а — в.

Как видно, максимальное напряжение стальной оболочки в ригеле составляет 460 кг/см^2 . Максимальное напряжение бетона в ригеле равно 53 кг/см^2 . Среднее напряжение сжатия оболочки в стойке 380 кг/см^2 , а бетона — 29 кг/см^2 .

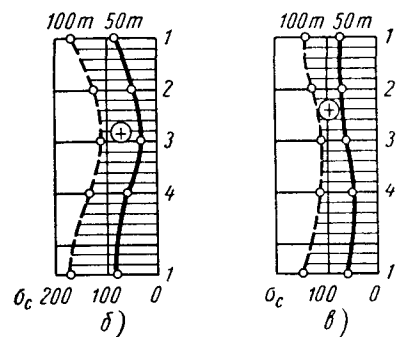
Показания датчиков, наклеенных на ригели станин крестом для измерения деформаций, вызванных нормальными напряжениями (под углом 45° к оси ригеля) от кручения, находились в пределах точности измерений, которая составляет $\varepsilon = 10^{-5}$. Отсюда

Напряжения σ_c в кг/см^2 в стальном каркасе клетки, полученные из опытов при $E_c = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ и по расчету

Сечения (фиг. 7, б)	Точки определения напряжений в сечении (фиг. 8)	Предварительное обжатие	Эксплуатационная нагрузка			Напряжения по расчету от нагрузки $50 \text{ м} + 3 \text{ м}$
			Вертикальная 50 м	Вертикальная $50 \text{ м} +$ горизонтальная 3 м	Вертикальная $100 \text{ м} +$ горизонтальная 3 м	
Стойки 4 и 2 у ригеля (сечение 4—4)	1	—340	+72	+76	+168	+64
	2	—410	+60	+44	+122	+66
	3	—420	+48	+30	+106	+64
	4	—480	+66	+60	+128	+62
Стойки 3 и 1 у ригеля (сечение 4—4)	1	—340	+72	+86	+172	+64
	2	—410	+60	+92	+156	+66
	3	—420	+48	+46	+86	+64
	4	—480	+66	+58	+118	+62
Стойки 4 и 2 в средней части (сечение 3—3)	1	—340	+70	+64	+134	+57
	2	—470	+62	+65	+130	+93
	3	—460	+50	+50	+100	+68
	4	—470	+60	+50	+110	+33
Стойки 3 и 1 в средней части (сечение 3—3)	1	—340	+70	+70	+140	+57
	2	—470	+62	+85	+147	+93
	3	—460	+50	+40	+90	+68
	4	—470	+60	+60	+120	+33
Ригель станины (сечение 1—1)	1	—310	+96	+96	+190	+152
	2	—310	+44	+44	+110	+88
	3	—410	+40	+40	+90	+24
	4	—440	+10	+10	+20	—40
	5	—360	—80	—80	—150	—95
	6	—340	—120	—120	—220	—
Ригель между станинами (сечение 2—2)	1	—195	+30	+30	+66	+54
	2	—340	+26	+20	+44	+27
	3	—330	+18	+12	+24	+1
	4	—280	+10	—7	—12	—27
	5	—140	—14	—20	—44	—53
	6	—110	—38	—30	—60	—

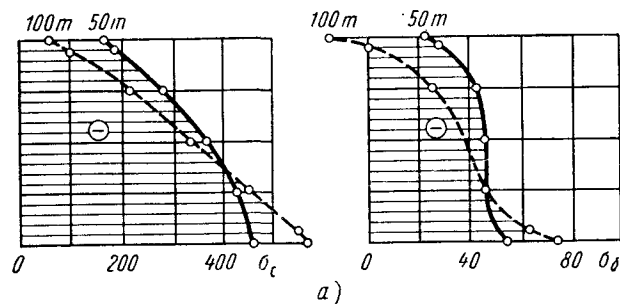


а)

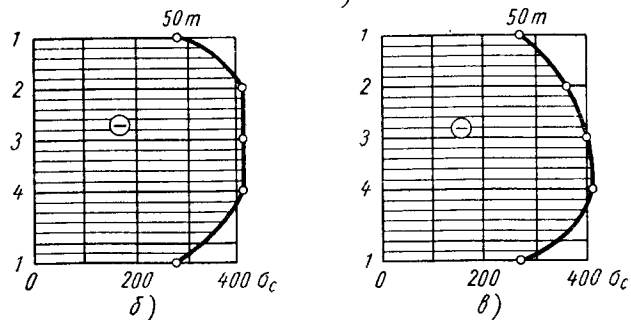


Фиг. 10. Эпюры напряжений от эксплуатационных нагрузок:

а — в среднем сечении ригеля;
 б — в среднем сечении стойки;
 в — в сечении стойки у ригеля;
 σ_c — напряжение в кг/см^2 в стальном каркасе; σ_b — напряжение в кг/см^2 в бетоне.



а)



Фиг. 11. Эпюры напряжений в эксплуатационной стадии:

а — в среднем сечении ригеля;
 б — в среднем сечении стойки;
 в — в сечении стойки у ригеля.

точность определения напряжений в стальном каркасе равна $\sigma_c = \varepsilon E_c = 10^{+5} \times 2 \times 10^6 = 20 \text{ кг/см}^2$. Следовательно, можно считать, что фактические нормальные напряжения в каркасе ригеля от кручения находятся в пределах 10 кг/см^2 . По расчету эти напряжения составляют 9 кг/см^2 . Напряжения в бетоне от кручения, следовательно, будут около 2 кг/см^2 . Таким образом, напряжения в ригелях, возникающие от кручения, можно не учитывать по их малости.

При испытании клетки определялись дополнительные растягивающие усилия в стержнях напрягаемой арматуры, возникающие от эксплуатационных нагрузок, которые составляли не более 2% от установившегося усилия 30 т , т. е. не более 600 кг .

Через 4 месяца после обжатия клетки (после окончания испытания) были замерены фактические усилия в стержнях напрягаемой арматуры от предварительного натяжения (по показаниям манометра при подтяжке стержней домкратом). Эти усилия оказались в пределах $26,7\text{—}30,8 \text{ т}$ при контролируемом усилии натяжения 35 т , а потери, следовательно, составили $4,2\text{—}8,3 \text{ т}$ (по расчету 5 т).

Сравнение результатов экспериментов с расчетами

Для оценки степени соответствия принятой схемы расчета клетки ее действительной работе при обжатии и при эксплуатационных нагрузках, необходимо сравнить результаты испытаний с расчетами. Ниже приводятся такие сравнения по деформациям и напряжениям.

Изменение расстояния между опорными подушками станин, как уже отмечалось, складывается из деформации растяжения стоек, деформации изгиба ригелей и деформации смятия бетона под опорными подушками. Величины этих деформаций, полученные из экспериментов и путем расчетов, приведены в табл. 8.

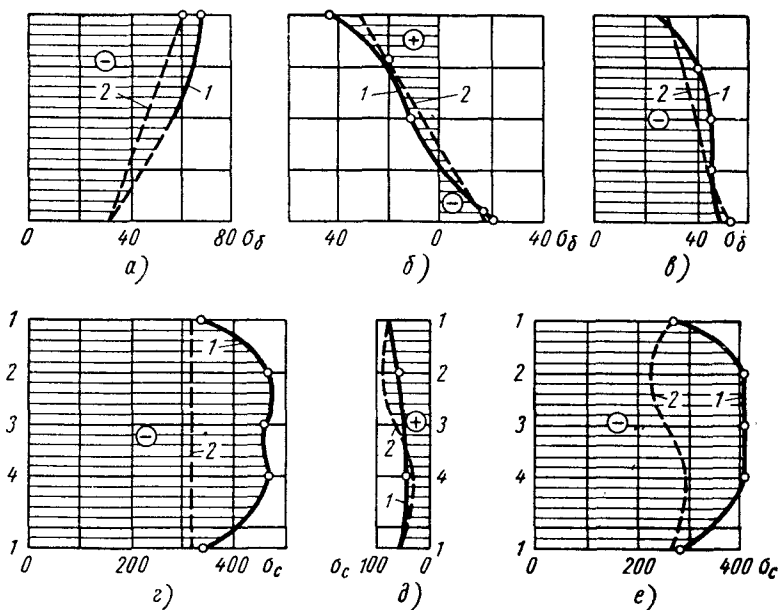
Таблица 8

Деформации, полученные из опытов и расчетом

Характер деформации	Деформации в мк			
	Нагрузка 50 т		Нагрузка 100 т	
	по расчету	из опыта	по расчету	из опыта
Растяжение стоек между ригелями	34	30	68	61
Изгиб (прогиб) двух ригелей станины	18	19	36	47
Смятие бетона под опорными подушками двух ригелей станины	36	31	72	60
Деформация между опорными подушками	88	80	176	168

Как видно, деформации клетки, полученные экспериментальным путем при нагрузке 50 т , очень близко совпадают с расчетными величинами деформаций; отклонения составляют 5—16%, в основном в сторону уменьшения фактических деформаций. При нагрузке 100 т отклонения фактических (экспериментальных) деформаций от расчетных составляют 5—30%.

Таким образом, полученные при испытании клетки деформации очень хорошо согласуются с расчетными данными. Следовательно,



Фиг. 12. Эпюры напряжений:

a, б и в — в среднем сечении ригеля, соответственно от предварительного обжатия, от нагрузки 50 т , суммарная; г, д и е — в среднем сечении стойки, соответственно от предварительного обжатия, от нагрузки 50 т , суммарная; 1 — экспериментальные; 2 — расчетные.

можно считать, что принятая приближенная схема расчета клетки практически соответствует ее фактической работе.

Напряжения в стальном каркасе клетки, полученные из опытов при испытании клетки и по расчету, приведены в табл. 7. Для примера на фиг. 12, а — в показаны эпюры напряжений бетона в среднем сечении ригеля и в стальной оболочке в среднем сечении стойки. Как видно, экспериментальные напряжения бетона в ригеле довольно близко совпадают с расчетными. Максимальные отклонения не превышают 16%. Экспериментальные напряжения в стальной оболочке стойки значительно превышают расчетные по упругой стадии. Отклонения достигают 45%. Объясняется это

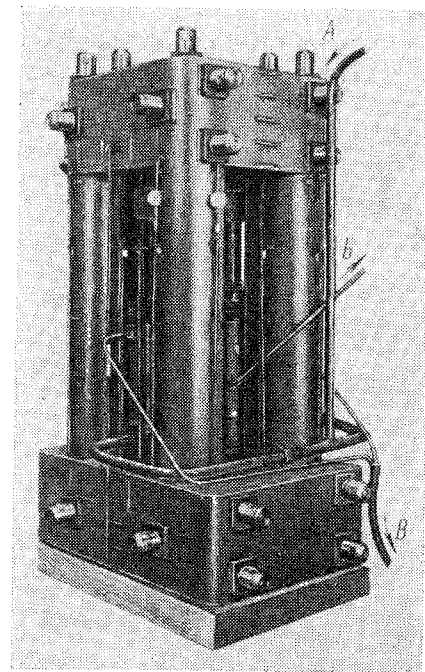
перераспределением напряжений между бетоном и стальной оболочкой (в сечении стойки стальная оболочка составляет 17%) вследствие ползучести бетона, что не учитывалось в расчетах.

Испытание клетки на многократно повторные нагрузки

Рабочая клеть прокатного стана должна обладать довольно высокой жесткостью, так как с повышением последней повышается и точность прокатываемых изделий; при этом для сохранения ста-

бильной и качественной прокатки жесткость конструкций клетки в процессе работы стана не должна уменьшаться. Это условие при стальных клетях выдерживается, так как упругие свойства стали даже при длительной работе стана практически не меняются. Бетон же, как известно, обладает свойством ползучести, которое выражается в том, что при длительном действии напряжений происходит рост остаточных деформаций. При многократном повторении напряжений, как показывают некоторые исследования, растут не только остаточные деформации, но и упругие.

Поскольку клеть стана «Кварто-200» в процессе работы испытывает многократно повторные воздействия внешних нагрузок, то вполне естественно было предположить, что с увеличением количества циклов повторения этих нагрузок будет иметь место рост остаточных и упругих деформаций клетки. Для определения характера и величины этих деформаций опытная



Фиг. 13. Испытания клетки пульсирующими домкратами на воздействие многократно повторных нагрузок:

А — от пульсатора; Б — к манометру; В — сброс масла.

клеть была испытана на многократно повторные напряжения. Эти испытания проводились двумя пульсирующими домкратами (фиг. 13) с частотой изменения нагрузок 400 циклов в 1 мин. Схема установки домкратов показана на фиг. 14. Деформации измерялись переносными индикаторами с ценой деления 0,002 мм. Для этого в соответствующих местах были приварены стержни диаметром 12 мм с припаянными на концах шариками диаметром 4 мм. Точность измерений 1—3 мк.

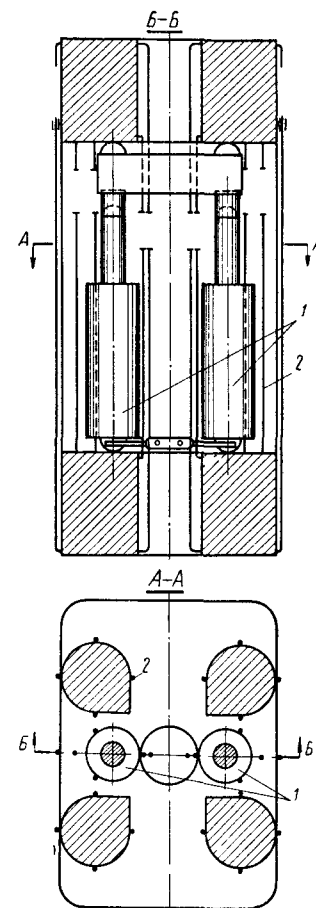
Клеть прокатного стана «Кварто-200» работает в сложном режиме: в процессе прокатки изделия вертикальная нагрузка на клеть меняется от $P_{\min} = 35$ до $P_{\max} = 50$ т, а в момент захвата изделия валками от $P_{\min} = 0$ до $P_{\max} = 50$ т, где между P_{\min} и P_{\max} нагрузка P получает непрерывный ряд значений. Таким образом, клеть в процессе работы испытывает повторную нагрузку в двух режимах: при $q = P_{\min} : P_{\max} = 35 : 50 = 0,7$ и при $q = 0 : 50 = 0$; при этом оба режима повторяются по очереди один раз при прокатке каждой единицы изделия. Предполагается, что за свой срок службы железобетонная клеть стана «Кварто-200» может испытывать 10^7 циклов нагрузки при $q = 0,7$ и $2 \cdot 10^6$ циклов нагрузки при $q = 0$. В соответствии с этими данными и проводились испытания клетки на многократно повторные нагрузки; при этом испытания во втором режиме проводились при $q = 0,1$, так как осуществить испытания при $q = 0$ не представлялось возможным (следует отметить, что изменение q в пределах от нуля до 0,1 никакого влияния на деформацию бетона не оказывает).

Результаты испытания клетки на деформативность при многократном повторении нагрузок приведены в табл. 9. Как видно, после $18 \cdot 10^6$ циклов повторения нагрузок ($10 \cdot 10^6$ циклов при $q = 0,7$ и $8 \cdot 10^6$ циклов при $q = 0,1$) упругая деформация между опорными подушками станины практически не изменилась, а остаточная деформация составила всего лишь 0,078 мм.

Промышленная клеть

Промышленная клеть прокатного стана «Кварто-200» была изготовлена после окончания испытаний опытной клетки. В ее конструкцию были внесены некоторые изменения (увеличена толщина шайб, установлены диафрагмы в стойках и др.).

Материалы, из которых был приготовлен бетон для промышленной клетки, следующие: цемент Брянского завода активностью



Фиг. 14. Схема установки пульсирующих домкратов и расположения точек измерения деформаций:

1 — пульсирующие домкраты; 2 — точки измерения деформаций между ригелями.

Результаты испытаний опытной клетки на многократно повторные нагрузки

Характер деформации	Деформации в мм в зависимости от количества циклов повторения нагрузок															
	$Q = \frac{35}{50} = 0,7$								$Q = \frac{5}{50} = 0,1$							
	I								II							
	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001
Растяжение стоек между ригелями	30	36	34	36	34	34	36	34	39	36	35	35	36	36	37	35
Изгиб (прогиб) двух ригелей станины	16	10	7	10	10	10	10	10	8	10	10	10	8	7	14	8
Сжатие бетона под опорными подушками станины	27	28	27	29	25	28	27	28	28	28	27	28	30	29	27	31
Увеличение расстояния между опорными подушками станины	73	74	68	75	69	74	74	74	73	72	71	73	72	72	78	74
Растяжение стоек между ригелями	—	0	14	23	27	26	26	26	30	24	46	50	48	55	75	68
Изгиб и сжатие бетона под опорными подушками двух ригелей	—	0	2	4	0	1	3	3	0	3	2	0	2	0	9	10
Увеличение расстояния между опорными подушками станины	—	0	16	27	27	27	29	27	30	27	48	50	50	55	84	78
Остаточная деформация																
Упругая деформация																

582 кг/см²; предел прочности при растяжении восьмерок 33,1 кг/см²; песок горный мелкий, щебень гранитный крупностью 5—20 мм.

На основании анализа результатов испытания на прочность и деформативность кубов и призм из бетона пробных замесов для бетонирования промышленной клетки был принят бетон следующего состава в расчете на 1 м³:

цемента в кг	600
песка сухого в кг	415
щебня сухого в кг	1200
воды в кг	207
водоцементное отношение	0,345
консистенция смеси в сек	25

Сначала до сборки всей клетки были забетонированы внутренние полости направляющих всех стоек (см. фиг. 3, б), чтобы в процессе обработки направляющих, выполняемой до сборки каркаса, они не деформировались. Бетонирование промышленной клетки производилось точно так же, как и опытной клетки — в два приема: сначала бетонировался нижний ригель, а затем стойки и верхний ригель. Для контроля качества бетона были изготовлены одновременно призмы размером 10 × 10 × 31 см и кубы размером

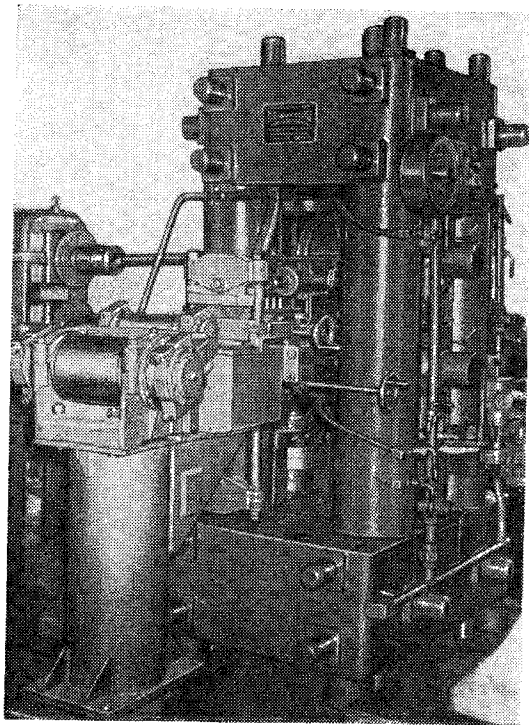
Таблица 10

Результаты испытания контрольных кубов и призм

№ образцов	Возраст в сутках	Предел прочности бетона						$\frac{R_{np}^{cp}}{R_{к10}^{cp}}$	$\frac{R_{к20}^{cp}}{R_{к10}^{cp}}$	Средний модуль упругости $E_0 \cdot 10^{-6}$ в кг/см ²	Начальный модуль упругости $E_0 \cdot 10^{-5}$ в кг/см ²
		Кубиковая прочность				Призменная прочность					
		$R_{к10}$	$R_{к20}$	$R_{к10}^{cp}$	$R_{к20}^{cp}$	R_{np10}	R_{np10}^{cp}				
1	4	447	375			253		0,61	0,70	2,93	2,95
2	4	510	245	460	324	275	280			3,28	3,14
3	4	424	350			308				2,56	3,14
4	7	595	464			377		0,70	0,79	3,05	3,65
5	8	517	390	540	425	400	376			2,95	3,80
6	8	507	415			348				3,20	3,78
7	14	537	530			388		0,69	1,08	3,30	3,60
8	15	509	652	558	602	415	385			3,36	3,77
9	14	627	625			451				3,16	3,63
10	28	496	625			475		0,94	1,16	3,50	3,81
11	28	494	540	528	612	483	495			3,70	3,83
12	28	582	670			525				3,64	3,90
13	65	740	585			475		0,80	0,92	3,71	4,08
14	65	691	650	660	610	550	532			3,83	4,46
15	65	546	595			570				3,69	4,10

10 × 10 × 10 см и 20 × 20 × 20 см. Результаты испытаний кубов и призм приведены в табл. 10.

Для предварительного обжатия промышленной клетки, как и в опытной клетки, применена стержневая горячекатаная арматура периодического профиля диаметром 36 мм из стали марки 35ГС, упрочненная вытяжкой до 5500 кг/см² при удлинении на 6%.



Фиг. 15. Стан «Кварто-200» с железобетонной клетью.

Стержни не обтачивались, как в опытной клетки. Контролируемое усилие натяжения каждого стержня — 35 т, установившееся по расчету — 30 т. Натяжение производилось в два приема: сначала все стержни были натянуты на 17,5 т, а затем на 35 т. В обоих случаях натяжение начиналось с вертикальных стержней. Общий вид стана «Кварто-200» с железобетонной клетью показан на фиг. 15.

Выводы

1. Экспериментальные величины деформаций клетки практически совпадают с расчетными. Отклонения находятся в преде-

лах 5—16%. Упругая деформация между опорными подушками станин при эксплуатационной нагрузке 50 т составляет 70—80 мк; по расчету она равна 88 мк.

2. После 18·10⁶ циклов повторения нагрузок упругая деформация между опорными подушками станин совсем не изменилась, а остаточная составила 0,078 мм.

3. Под действием горизонтальных эксплуатационных нагрузок упругая деформация между опорными подушками станин изменяется всего лишь на 1—2 мк. Поэтому можно считать, что горизонтальные нагрузки практически не влияют на деформации клетки и в расчетах их можно не учитывать.

4. Направляющие клетки могут окончательно обрабатываться до бетонирования, так как процесс бетонирования и усадка бетона в процессе его твердения практически никакого влияния на деформации клетки с трубобетонными стойками не оказывают. Изменения же расстояний между направляющими, возникающие от предварительного обжатия клетки, могут быть учтены расчетом. Полости направляющих должны быть забетонированы до их обработки.

5. Потери напряжений в стержнях напрягаемой арматуры периодического профиля длиной 0,85—2,0 м, диаметром 36 мм из стали марки 35ГС составили 14—18%. Через 4 месяца потери составили в среднем 19% (от 14 до 24%).

6. Экспериментальные напряжения бетона очень близки к расчетным. Отклонения не превышают 16%. В ригелях экспериментальные напряжения бетона несколько выше расчетных, а в стойках — ниже. Напряжения в стальном каркасе стоек на 45% выше расчетных по упругой стадии, что объясняется перераспределением напряжений вследствие усадки и ползучести бетона.

7. Расчет ригелей станин на кручение можно не производить, так как напряжения от кручения при эксплуатационных нагрузках малы — в стальной обшивке 10 кг/см², в бетоне около 2 кг/см².

8. Установившиеся усилия в напрягаемой арматуре должны быть такими, чтобы во всех сечениях элементов клетки в эксплуатационной стадии были только сжимающие напряжения; при этом минимальные в данном сечении напряжения бетона должны находиться в пределах 20—30 кг/см².

9. Статический расчет клетки можно производить приблизительно по правилам строительной механики стержневых систем, расчленив пространственную конструкцию клетки на замкнутые плоские рамы в двух взаимно перпендикулярных плоскостях; при этом в плоскости прокатки рамами являются станины клетки.

10. Расчеты сечений железобетонных элементов (стоек и ригелей) следует производить в соответствии с действующими нормативными документами по проектированию предварительно напряженных железобетонных конструкций.

Канд. техн. наук **КАРАНФИЛОВ Т. С.**
Инж. **ВОЛКОВ Ю. С.**

ЖЕЛЕЗОБЕТОННАЯ КЛЕТЬ ПРОКАТНОГО СТАНА, ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННАЯ НАВИВКОЙ ВЫСОКОПРОЧНОЙ ПРОВОЛОКИ

В статье даются сведения о конструировании, расчете, изготовлении и основных результатах испытания железобетонной клетки прокатного стана «Кварто».

Клеть представляет собой пространственную конструкцию (фиг. 1), состоящую из шести железобетонных элементов двух типов: четырех одинаковых стоек и двух одинаковых толстых круглых ригелей — архитравов (фиг. 2). Сборка клетки осуществляется на сварке (фиг. 3, а — в), для чего в местах соединения стоек с ригелями имеются закладные металлические детали. Стойки и ригели конструктивно армированы. Рассматриваемая конструкция клетки может быть выполнена как в сборном, так и в монолитном вариантах.

Станины рабочей клетки, воспринимающие все давление металла на валки при прокате, являются весьма ответственными элементами прокатного стана. Поэтому к конструкции станин предъявляются довольно высокие требования как по прочности, так и по жесткости.

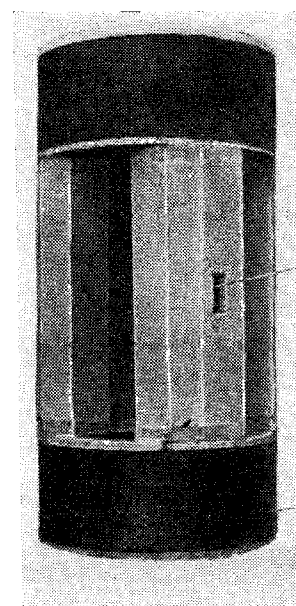
В металле станины изготавливаются обычно из стального литья с пределом прочности 4500—6000 кг/см². Так как по условию работы станины должны обладать высокой жесткостью, то напряжения в них, как правило, невелики и составляют в среднем 350—450 кг/см².

В процессе работы стана возможны случаи значительного возрастания давления металла на валки, вследствие непрерывной подачи или остывания прокатываемой полосы. Это может привести даже к поломке валков, но напряжения в станинах при этом не должны превышать предела пропорциональности, чтобы не вызвать остаточную деформацию. Для этого коэффициент запаса клетки должен быть [6]

$$k = k_0 \frac{R_n}{\sigma_y} c,$$

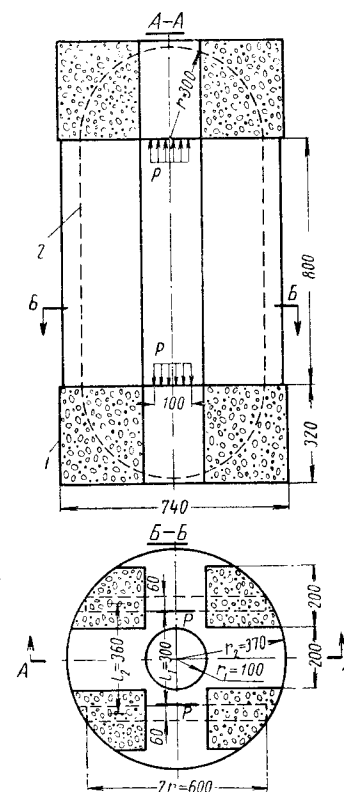
где k_0 — коэффициент запаса валков, принимаемый равным 5;
 R_n и σ_y — нормативное сопротивление (предел прочности) и предел пропорциональности материала стальной клетки, причем $\sigma_y = 0,5 R_n$;
 c — коэффициент, учитывающий возможные неточности в определении прочности материала валков и клетки, принимаемый равным 1,25—1,5.

Таким образом, коэффициент запаса прочности стальной клетки получается равным $k = 12,5 \div 15$.



Фиг. 1. Опытная сборная клеть с обмоткой в двух направлениях:

1 — навивка проволоки на ригель; 2 — вертикальная навивка.



Фиг. 2. Основные размеры опытной клетки:

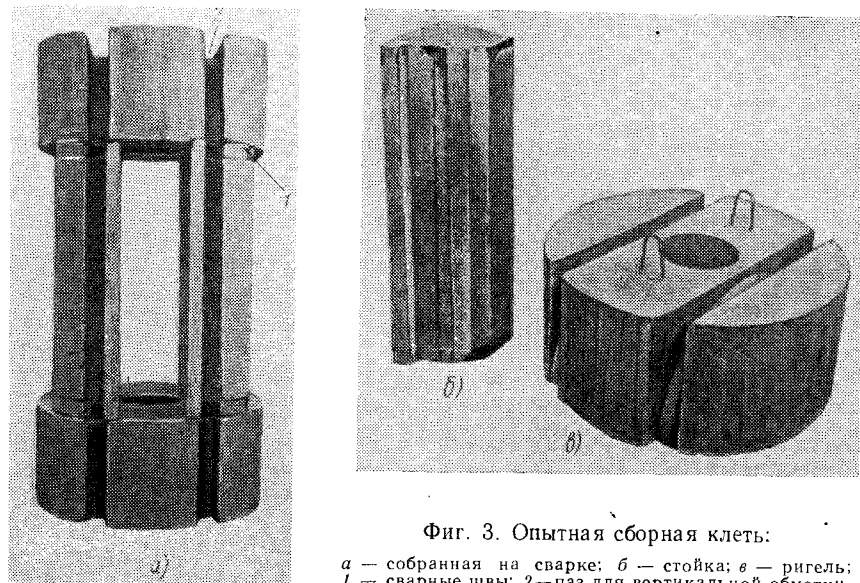
1 — навивка проволоки на ригель; 2 — вертикальная навивка.

В случае изготовления клетки прокатного стана из предварительно напряженного железобетона, армированного высокопрочной проволокой, коэффициент запаса клетки по прочности можно несколько снизить, приняв более высокое значение предела пропорциональности материала проволоки по отношению к нормативному сопротивлению.

Высокопрочная проволока, применяемая для предварительного напряжения бетона, не имеет ярко выраженного предела пропорциональности. Условно можно принять $\sigma_y = 0,8 R_a^n$, так как это напряжение соответствует остаточному удлинению всего лишь на 0,2%, которое не повлияет существенно на дальнейшую эксплуатацию клетки.

По аналогии с предыдущим, принимая $c = 1,2 \div 1,5$, получим $k = 8 \div 10$.

Следует отметить, что в стадии изготовления клетки натяжение проволоки осуществляется при напряжении не менее $\sigma_0 = 0,65 \sigma_s$,



а для повышения выносливости конструкции желательно увеличить величину предварительного напряжения до $0,75 \sigma_s$ [2]. Это напряжение уже вызовет некоторую остаточную деформацию; следовательно, можно допустить, что при последующих кратковременных перегрузках возрастание напряжений в арматуре до этих значений не вызовет ощутимых остаточных деформаций в ней.

В рассматриваемой железобетонной клетке архитрав хотя и является пространственной конструкцией, но, так как нагрузка приложена симметрично и в плоскостях вертикальной обмотки (фиг. 2, сечение Б — Б), то для расчета клетку можно расчленить на две плоские рамы. Кроме того, так как клетка представляет собой сборную конструкцию, то можно принять свободное опирание архитрава на стойки. Тогда ригель выбранной нами рамы ста-

нет балкой переменного сечения на двух опорах пролетом $l = 2r$, а стойки окажутся центрально сжатыми (фиг. 4, а). Такое расчленение клетки содержит известные допущения, но в некоторых случаях, например при эскизном и эскизно-техническом проектировании, можно ограничиться приближенным расчетом.

В расчетах клетки рассматриваются три расчетных случая, соответствующие трем напряженным состояниям:

- 1) при действии расчетной нагрузки;
- 2) в момент натяжения арматуры;
- 3) при эксплуатационных нагрузках.

В первом случае предельным состоянием будет момент появления трещин, а в остальных двух случаях — момент появления растягивающих напряжений; при этом для всех трех случаев расчет следует вести по упругой стадии с использованием коэффициента приведения металла к бетону.

При действии расчетной нагрузки (расчетные схемы на фиг. 4, б) ригель отделяется от стоек и напряжения в плоскости сопряжения стоек с ригелем равны нулю. Следовательно, равнодействующая усилий в предварительно напряженной арматуре вертикального пояса в этом случае будет меньше таковой после окончания предварительного обжатия из-за потерь предварительного напряжения

$$N^I = \frac{P_p}{2} (\sigma_n + 300) F_n = \frac{kP}{2} = q^I r, \quad (1)$$

где N^I — равнодействующая усилий в предварительно напряженной арматуре вертикального пояса обмотки станины при действии расчетной нагрузки;

P_p — расчетная нагрузка на станину. За P_p принимается такая нагрузка, которая вызывает появление трещин в бетоне;

300 — приращение напряжения в арматуре, отвечающее предельной относительной растяжимости бетона;

σ_n — установившееся напряжение в арматуре с учетом всех потерь;

F_n — площадь сечения напрягаемой арматуры;

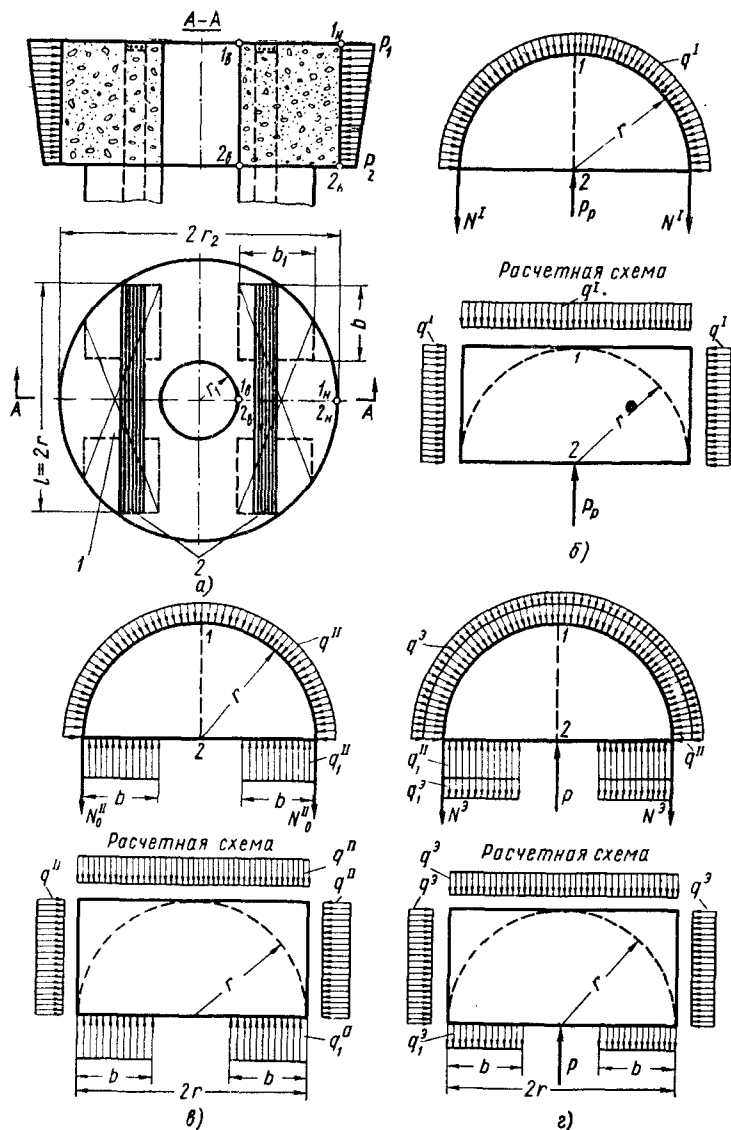
k — коэффициент запаса;

P — эксплуатационная нагрузка;

q^I — нагрузка на ригель от вертикальной обмотки при действии расчетной нагрузки;

r — радиус вертикальной намотки.

При определении установившегося напряжения в арматуре учитываются потери предварительного напряжения, происходящие от усадки и ползучести бетона, смятия бетона под витками напрягаемой арматуры, от релаксации арматуры и воздействия многократно повторной нагрузки (в случае расчета конструкций на выносливость).



Фиг. 4. К расчету архитрава железобетонной клетки:

а — архитрав железобетонной клетки; б — действие расчетной нагрузки; в — предварительное обжатие; г — эксплуатационная стадия; 1 — ригель станины; 2 — обмотка станины.

Ригели имеют высоту, равную половине их пролета. Поэтому распределение нормальных напряжений в среднем сечении ригелей можно принять, как в балке-стенке [4], по приближенной эпюре, показанной на фиг. 5. Легко убедиться, что напряжения будут максимальными в среднем сечении полудиска.

Принятый вид эпюры нашел экспериментальное подтверждение (см. статью Окунева Г.Н.).

По условию равновесия момент внешних сил должен равняться моменту внутренних сил.

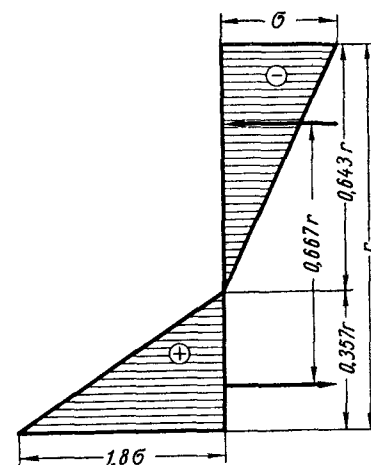
Приравнявая эти моменты, получим

$$\sigma_2^I = -2,33 \frac{q^I}{r_2 - r_1}. \quad (2)$$

Учитывая горизонтальные силы $q^I r$ (фиг. 4, б), напряжения в точках 1 и 2 на внешней и внутренней поверхностях архитрава будут

$$\sigma_1^I = 3,19 \frac{q^I}{r_2 - r_1}; \quad (3)$$

$$\sigma_2^I = -3,33 \frac{q^I}{r_2 - r_1}. \quad (4)$$



Фиг. 5. К расчету ригеля станины. Принятая эпюра нормальных напряжений в среднем сечении.

При действии возможной наибольшей перегрузки растягивающие напряжения в ригелях будут максимальными. Чтобы не произошло преждевременного разрушения ригеля в растянутой зоне, необходимо эти растягивающие напряжения погасить, создав равные им предварительные напряжения путем радиального обжатия ригеля горизонтальной обмоткой. Возникающие при этом от предварительного радиального обжатия сжимающие тангенциальные напряжения в данной конструкции ригеля с цилиндрическим отверстием в центре можно определить, пользуясь формулами сопротивления материалов для расчетов толстостенных цилиндров. Число слоев при сплошной навивке горизонтального пояса в верхней части ригеля как раз и определится из условия равенства тангенциальных сжимающих напряжений от горизонтальной обмотки растягивающим напряжениям от расчетной нагрузки. Причем на внешней грани ригеля, как следует из формулы Ламе [1], напряжения будут меньше, чем на внутренней; они то и будут расчетными при определении величины бокового обжатия. Число слоев α напрягаемой арматуры, а следовательно, и величину бокового обжатия рассматриваемого ригеля на уровне верхних

волокон следует назначать с учетом потерь предварительного напряжения

$$\alpha = \frac{dr_2}{\sigma_n f_a} \cdot \frac{3,2q^I (r_2 + r_1)}{r_2^2 + r_1^2}, \quad (5)$$

где d и f_a — диаметр и площадь сечения навиваемой проволоки; r_2 и r_1 — наружный и внутренний диаметры ригеля (фиг. 4, а).

Предварительное напряжение. Расчет в этом случае состоит в определении в элементах конструкции клетки напряжений, возникающих от предварительного обжатия клетки обмоткой. Расчетные схемы предварительного напряжения ригелей клетки показаны на фиг. 4, в:

$$N_0^{II} = \sigma_0 F_n - \sigma_a F_a = \sigma_b F_n; \quad (6)$$

$$q^{II} = \frac{N_0^{II}}{r}; \quad (7)$$

$$q_1^{II} = q^{II} \frac{r}{bb_1}, \quad (8)$$

где σ_0 — предварительное напряжение арматуры, контролируемое в момент натяжения;
 N_0^{II} — суммарное усилие в напрягаемой арматуре;
 q^{II} — нагрузка на ригель от напрягаемой арматуры вертикального пояса;
 σ_a — сжимающее напряжение в ненапрягаемой арматуре, принимаемое в стадии обжатия конструкции равным потерям напряжений от усадки бетона;
 F_a — площадь ненапрягаемой арматуры;
 q_1^{II} — распределенная нагрузка на опоре (среднее напряжение в плоскости сопряжения ригеля со стойкой, принимаемое по прямоугольной эпюре);
 b и b_1 — размеры сечения стойки.

После проявления всех потерь в напрягаемой арматуре усилие N_0^{II} определится по той же формуле (6), но вместо σ_0 следует подставить σ_n . Величина q^{II} с учетом потерь (т. е. q_n^{II}) определится по формуле (7) после подстановки нового значения N_0^{II} .

Точно так же, как это было сделано выше, исходя из принятой эпюры напряжений, приведенной на фиг. 5, приравнивая между собой моменты внутренних и внешних сил, можно получить выражение для определения напряжений бетона в ригеле только от вертикальной обмотки.

При предварительном напряжении клетки максимальные растягивающие напряжения на уровне нижних волокон ригеля могут быть погашены впоследствии горизонтальной обмоткой.

Число слоев горизонтальной обмотки для обжатия нижней части ригеля определится на этот раз из условия равенства растя-

гивающих напряжений от усилия предварительного напряжения вертикального пояса и тангенциальных сжимающих напряжений от усилия горизонтальной обмотки.

$$\alpha = \frac{\left[q^{II} \left(3,2 - 4,2 \frac{b}{r} \right) \right] (r_2 + r_1) dr_2}{(r_2^2 + r_1^2) \sigma_n f_a}. \quad (9)$$

Суммарные напряжения для верхних волокон на наружной (σ_{1n}^{II}) и внутренней (σ_{1s}^{II}) гранях архитрава приближенно можно получить, складывая соответственно напряжение от горизонтальной обмотки с напряжениями от вертикальной обмотки:

$$\sigma_{1n}^{II} = -3,19 \frac{q^I}{r_2 - r_1} - \frac{q^{II}}{r_2 - r_1} \left(3,33 - 2,33 \frac{b}{r} \right); \quad (10)$$

$$\sigma_{1s}^{II} = -3,19 \frac{q^I}{r_2 - r_1} \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 + r_1^2} - \frac{q^{II}}{r_2 - r_1} \left(3,33 - 2,33 \frac{b}{r} \right). \quad (11)$$

Напомним, что величина бокового обжатия для верхних волокон будет определяться величиной растягивающих напряжений, возникающих от расчетной нагрузки.

Суммарные напряжения для нижнего волокна на внутренней грани архитрава приближенно можно получить, складывая напряжения от горизонтальной обмотки с напряжениями от вертикальной обмотки:

$$\sigma_{2s}^{II} = \frac{q^{II}}{r_2 - r_1} \left(3,2 - 4,2 \frac{b}{r} \right) \left(1 - \frac{2r_2^2}{r_2^2 + r_1^2} \right). \quad (12)$$

Суммарные напряжения для нижнего волокна внешней грани будут равны нулю, так как именно из условия равенства их нулю, как уже указывалось, и подбирается величина бокового обжатия.

При вычислении напряжений следует учитывать потери для каждой стадии предварительного обжатия.

Таким образом, величина бокового обжатия и количество слоев навиваемой проволоки при обжатии архитрава для верхних волокон будет определяться величиной растягивающих напряжений, возникающих от расчетной нагрузки, а для нижних волокон — величиной растягивающих напряжений, возникающих при навивке вертикальной арматуры.

Эксплуатационное напряженное состояние в элементах клетки возникает при действии эксплуатационной нагрузки. Для расчетов на однократную и повторную нагрузки необходимо знать напряжения, возникающие в элементах клетки как от предварительного обжатия, так и при действии эксплуатационной нагрузки.

При действии на станину эксплуатационной нагрузки P (фиг. 4, г) бетон в стойках и напрягаемая арматура вертикальной

обмотки станины будут испытывать от силы P растяжение; при этом будут иметь место зависимости

$$\frac{\sigma_a^{III}}{\sigma_b^{III}} = \frac{E_a}{E_b} = n; \quad (13)$$

$$P = 2(\sigma_a^{III} F_n + \sigma_b^{III} F_b), \quad (14)$$

где σ_a^{III} и σ_b^{III} — напряжение в предварительно напряженной арматуре вертикального пояса обмотки и в бетоне стойки, вызванные только эксплуатационной нагрузкой.

Из выражений (13) и (14) легко получить дополнительное усилие растяжения в вертикальной обмотке $N_a^s = F_n \sigma_a^{III}$ и растягивающее усилие в стойке $N_b^s = F_b \sigma_b^{III}$:

$$N_a^s = \frac{P}{2} \cdot \frac{n\mu}{1+n\mu}; \quad (15)$$

$$N_b^s = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{1+n\mu}, \quad (16)$$

где $\mu = \frac{F_n}{F_b}$.

Дополнительные равномерно распределенные нагрузки на ригель и на стойку от эксплуатационной нагрузки будут

$$q^s = \frac{N_a^s}{r}; \quad (17)$$

$$q_1^s = \frac{N_b^s}{bb_1}. \quad (18)$$

Суммарные напряжения на внешней и внутренней гранях ригеля в эксплуатационной стадии определяются по той же эпюре напряжений, которая была использована для первой и второй стадии, и складываются из напряжения от горизонтальной обмотки, напряжения от вертикальной обмотки и напряжения от эксплуатационной нагрузки. Первые два напряжения следует определять с учетом потерь предварительного напряжения.

Для верхних волокон внешней и внутренней граней архитрава

$$\sigma_{ln}^{III} = -3,19 \frac{q^I}{r_2 - r_1} - \frac{q_n^{II}}{r_2 - r_1} \left(3,33 - 2,33 \frac{b}{r} \right) + \frac{q^s}{r_2 - r_1} \left[\frac{4,2(l-b)}{n\mu} + 3,2 \right]; \quad (19)$$

$$\sigma_{lb}^{III} = -3,19 \frac{q^I}{r_2 - r_1} \cdot \frac{2r_2^2}{r_2^2 + r_1^2} - \frac{q_n^{II}}{r_2 - r_1} \left(3,33 - 2,33 \frac{b}{r} \right) + \frac{q^s}{r_2 - r_1} \left[\frac{4,2(l-b)}{n\mu} + 3,2 \right]. \quad (20)$$

Для нижних волокон внешней и внутренней граней архитрава

$$\sigma_{2n}^{III} = -\frac{q^s}{r_2 - r_1} \left[\frac{2,32(l-b)}{n\mu} - 3,32 \right]; \quad (21)$$

$$\sigma_{2b}^{III} = -\frac{q_n^{II}}{r_2 - r_1} \left(3,2 - 4,2 \frac{b}{r} \right) \frac{2r_2^2}{r_2^2 + r_1^2} + \frac{q_n^{II}}{r_2 - r_1} \left(3,2 - 4,2 \frac{b}{r} \right) - \frac{q^s}{r_2 - r_1} \left[\frac{2,32(l-b)}{n\mu} + 3,32 \right]. \quad (22)$$

Определение деформаций

К конструкции клетки предъявляются жесткие требования по деформациям станины в период эксплуатации. Суммарная деформация станины будет складываться из деформаций стоек, прогиба ригелей и смятия бетона ригелей под опорами валков. Деформации стоек определяются по формуле

$$\Delta l_{cm} = \frac{Pl_{cm}}{2F_n E_b}, \quad (23)$$

где l_{cm} — длина стойки;

F_n — приведенная площадь сечения стойки.

Прогиб ригеля может быть определен методами теории упругости. Для элементарного расчета и в запас жесткости (примерно на 20% по суммарной деформации станины) прогиб ригеля можно определить как для обычной балки по формуле

$$f_{rig} = \frac{Pr^3}{8E_b J_{rig}}, \quad (24)$$

где J_{rig} — момент инерции ригеля.

Смятие бетона под опорами валков можно определить как осадку жесткого штампа [1] по формуле

$$f_{cm} = 0,9 \frac{P(1-\mu^2)}{aE_b}, \quad (25)$$

где a — сторона квадратного штампа, эквивалентного по площади выбранному;

μ — в этом случае коэффициент Пуассона для бетона.

Под жестким штампом здесь подразумевается закладная деталь, на которую непосредственно опираются валки.

Испытание клетки

Для проверки основных положений расчета в НИИЖБ была изготовлена и испытана модель клетки прокатного стана «Кварто».

Описание конструкции клетки дано в начале данной статьи. Габариты клетки были назначены применительно к существующему пульсаторному оборудованию. Ввиду малой мощности пульсатора, коэффициент запаса прочности клетки был выбран равным 4.

Из этих же соображений обжатие архитрава было осуществлено всего одним слоем высокопрочной проволоки.

Основные размеры клетки даны на фиг. 2. При поверочном расчете клетки было принято: $b = b_1 = 20 \text{ см}$; $r = 30 \text{ см}$; $r_1 = 10 \text{ см}$; $r_2 = 37 \text{ см}$; $l = 2r = 60 \text{ см}$; $E_a = 1,8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $E_b = 4,0 \times 10^5 \text{ кг/см}^2$; бетон марки «600»; $F_b = 400 \text{ см}^2$; напрягаемая арматура — холодноотянутая проволока диаметром 3 мм; $R_a^n = 19\,000 \text{ кг/см}^2$; $P = 11\,000 \text{ кг}$; высота стойки — 80 см; $F_n = 2,68 \text{ см}^2$; $F_a = 3,9 \text{ см}^2$.

Элементы клетки бетонировались в деревянной опалубке; распалубка произведена через семь дней. Состав бетона 1 : 0,58 : 1,69; В/Ц = 0,37.

Расход напрягаемой арматуры высокопрочной проволоки — на клетку составляет 40 кг. Полный расход металла с учетом закладных деталей и конструктивной арматуры 100 кг; объем бетона 0,37 м³; вес клетки 0,9 т. На такое же усилие клетку из стального листа весит 1,4 т.

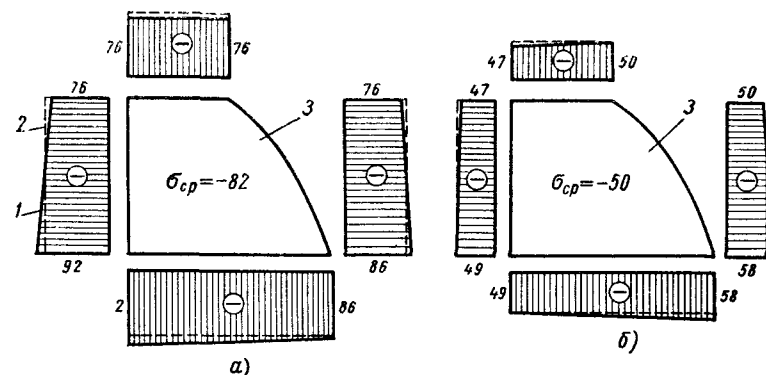
Предварительное обжатие клетки осуществлено обмоткой высокопрочной стальной холодноотянутой круглой проволокой диаметром 3 мм (ГОСТ 7348-55). Усилие натяжения проволоки при обмотке 870 кг. Вертикальная обмотка клетки, которой обжимаются стойки, состоит из двух поясов по 42 витка проволоки в каждом. Расчетными являются 38 витков. Контролируемое усилие в одном поясе $38 \times 0,87 = 33 \text{ т}$; установившееся усилие 26 т. Сначала были намотаны оба вертикальных пояса, причем после намотки второго пояса напряжения в арматуре первого пояса увеличились на 54 кг/см², что составляет около 0,45% от контролируемого напряжения. Напряжения в бетоне и арматуре измерялись с помощью тензодатчиков сопротивления и индикаторами часового типа с ценой деления 2 мк, причем на бетон датчики были наклеены до начала обжатия, а на напрягаемую арматуру наклеивались сразу же по окончании навивки очередного пояса.

Расчетная площадь сечения напрягаемой арматуры одного вертикального пояса равна $0,0706 \cdot 38 = 2,68 \text{ см}^2$. Контролируемое напряжение 12 350 кг/см²; установившееся напряжение 9700 кг/см². После обжатия каждого ригеля горизонтальной обмоткой напряжения в арматуре вертикальных поясов уменьшились на 16 кг/см², что составляет около 0,13% контролируемого напряжения. Как видно, потери предварительного напряжения в арматуре вертикальных поясов, происходящие от обжатия ригелей горизонтальной обмоткой, весьма незначительны и поэтому в расчетах их можно не учитывать.

При обжатии первой станины клетки намоткой вертикального пояса средняя деформация сжатия стоек этой станины составила 0,171 мм (0,177 и 0,165 мм); при этом стойки второй станины испытывали растяжение, средняя величина которого составила 0,036 мм. При обжатии второй станины деформация сжатия стоек этой ста-

нины составила 0,196 мм, а деформация растяжения стоек первой станины 0,037 мм. Средняя деформация сжатия всех четырех стоек клетки от намотки обоих вертикальных поясов составила 0,147 мм. Следовательно, при фактическом модуле упругости бетона в период обжатия $E_b = 4,0 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ среднее напряжение сжатия в стойке равно $0,147 \cdot 4,0 \cdot 10^5 : 800 = 73 \text{ кг/см}^2$, что близко совпадает с расчетом (по расчету 82 кг/см²).

Испытания клетки на статическую и многократно повторную нагрузку проводились через 8 месяцев после предварительного ее обжатия. Если принять во внимание, что за это время все по-



Фиг. 6. Эпюры напряжений в стойках клетки (в кг/см²):

а — при предварительном обжатии; б — в эксплуатационной стадии; 1 — напряжения, полученные из эксперимента; 2 — расчетные напряжения; 3 — поперечное сечение стоек.

тери предварительного напряжения в арматуре в основном уже проявились, то среднее напряжение в стойках от обжатия к этому времени должно составлять 65 кг/см².

Эксплуатационная нагрузка на одну стойку составляет 5500 кг. Среднее напряжение растяжения в стойке от этой нагрузки равно 13,8 кг/см², а среднее напряжение сжатия в эксплуатационной стадии, следовательно, будет $65 - 13,8 = 51,2$. Фактическое среднее напряжение сжатия в стойке в эксплуатационной стадии, вычисленное по показаниям датчиков, равно 50 кг/см², т. е. практически полностью совпадает с расчетом (фиг. 6, а и б).

Среднее экспериментальное напряжение растяжения бетона в стойке от эксплуатационной нагрузки составляет 14,5 кг/см², а по расчету оно равно 13,8 кг/см².

По расчету напряжение в арматуре вертикальной обмотки от эксплуатационной нагрузки без учета сцепления с бетоном составляет 60 кг/см².

На действие многократно повторных нагрузок клетку испытывали в пульсаторе «Шоппер» (фиг. 7) при $P_{\max} = 22 \text{ т}$ и $P_{\min} = 10 \text{ т}$. Напряжения растяжения от сил P в стойках составляли

14 и 16 кг/см^2 . Установившееся напряжение сжатия в стойках от предварительного обжатия равно 65 кг/см^2 . Следовательно, клеть испытывалась при характеристике цикла повторных напряжений

$$q = \frac{51}{59} = 0,86.$$

В соответствии со СНиП П-В. 1-62 [5] при $q > 0,6$ проверка выносливости бетона сжатой зоны не требуется, но основной

целью испытания железобетонной клетки являлось определение деформаций при многократно повторных нагрузках. Кривые изменения упругих и остаточных деформаций в зависимости от количества циклов повторения напряжений показаны на фиг. 8.

Как видно, даже при невысоком максимальном напряжении в цикле и небольшом перепаде повторных напряжений (всего только 8 кг/см^2) упругая деформация между опорными подушками станин непрерывно росла вплоть до 10^6 циклов повторения напряжений. Правда, прирост упругой деформации при этом незначительный и за $5 \cdot 10^6$ циклов он составляет всего лишь 12 мк (начальная деформация 73 мк , после $5 \cdot 10^6$ циклов — 85 мк). Упругая деформация растяже-

Фиг. 7. Опытная сборная клеть в пульсаторе.

ния одних только стоек равна соответственно 22 и 29 мк . Остальная деформация — начальная 51 мк и конечная 56 мк — складывается из деформации изгиба ригелей станин и деформации смятия бетона под опорными подушками. Упругая деформация после $5 \cdot 10^6$ циклов практически стабилизировалась.

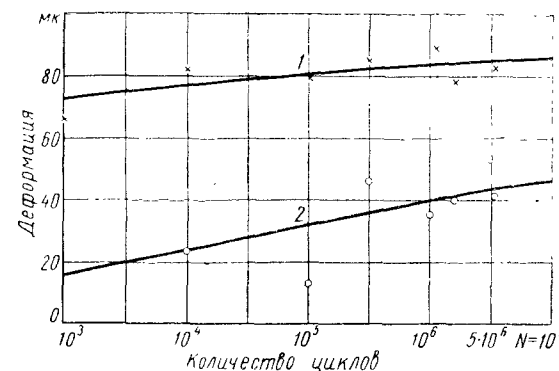
Остаточная деформация после $5 \cdot 10^6$ циклов составила 47 мк . Рост ее более интенсивный, чем упругой деформации. Тенденцию к стабилизации трудно отметить даже после $5 \cdot 10^6$ циклов повторения напряжений.

Следует заметить, что рост остаточной деформации будет благоприятно сказываться на работе стоек, уменьшая в значительной

мере потери в напрягаемой арматуре от действия многократно повторной нагрузки. Отрицательное действие такой деформации на точность прокатки может быть легко устранено регулированием нажимных устройств.

Как и на стадии предварительного обжатия, деформации клетки измерялись индикаторами часового типа и тензодатчиками сопротивлений.

Кроме испытанной конструкции клетки, могут быть предложены и другие. Вариант конструкции клетки, показанной на фиг. 9, а,



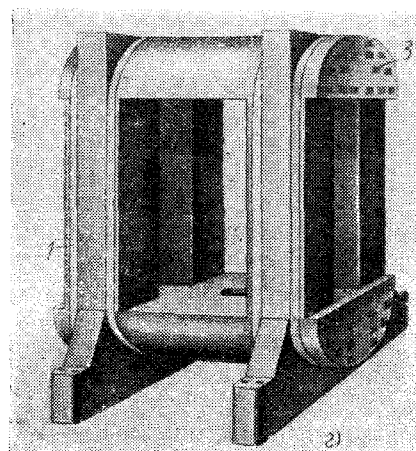
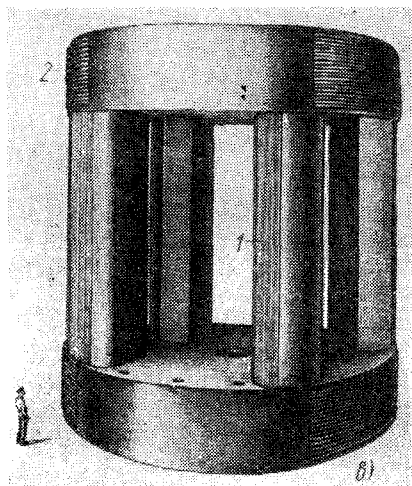
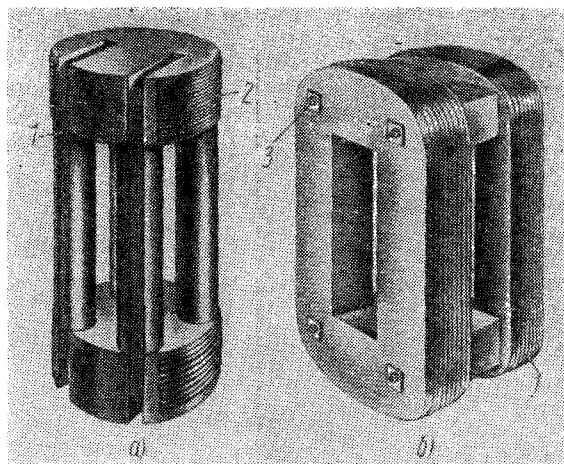
Фиг. 8. График изменения упругой и остаточной деформаций между опорными подушками сборной клетки в зависимости от N при $q = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} = \frac{10}{22} = 0,455$.

1 — упругие деформации; 2 — остаточные деформации.

отличается лишь формой сечения стоек. Клеть состоит из четырех стоек круглого сечения и двух толстых круглых плит (ригелей). Стойки и ригели изготавливаются отдельно, а затем соединяются в пространственную конструкцию клетки на сварке. Предварительное обжатие клетки создается путем обмотки высокопрочной проволокой в двух направлениях. В круглых стойках, которые предполагается изготавливать из трубобетона, для расположения арматуры пазы не делаются. Напрягаемая арматура в этом случае располагается снаружи стойки в специально приваренном к ней коробе. В пределах стоек проволока в лазах должна защищаться от коррозии специальными покрытиями. Для этого можно рекомендовать покрытия на основе эпоксидных смол. Такие покрытия наносятся слоем 3—5 мм . Для защиты покрытия от механических повреждений пазы в пределах стоек закрываются стальным листом.

Конструкция клетки, показанная на фиг. 9, б, состоит из двух рам с ригелями криволинейного очертания и четырех междурамных ригелей. Каждая рама представляет собой станину клетки.

Предварительное обжатие рам создается намоткой натягаемой проволоки. Междурамные ригели в клетке обжимаются натягаемой стержневой арматурой. Ригели рам могут очерчиваться по окружности, эллипсу, параболе или по другой более сложной



Фиг. 9. Эскизные варианты железобетонной клетки прокатного стана:

а — со стойками из трубобетона и круглыми ригелями; б — из двух силовых рам с полукруглыми ригелями; в — со стойками из трубобетона и архитравами эллиптического очертания в плане; г — с прямоугольными стойками и ригелем-полудиском; 1 — вертикальная навивка проволоки; 2 — горизонтальная навивка проволоки; 3 — стержневая предварительно напряженная арматура.

кривой. Рациональная форма очертания ригеля зависит от геометрических размеров станин.

Наиболее выгодными в технико-экономическом отношении являются такие конструкции клетки, в которых предварительное обжатие бетона осуществляется обмоткой высокопрочной проволокой (фиг. 1 и 9). Такие конструкции значительно проще в изготовлении (отсутствуют внутренние каналы для установки стержневой арматуры) и требуют меньшего расхода металла, так как применяется высокопрочная проволока. Намотка проволоки производится на поворотном столе (небольшая клетка) или же специальной намоточной машиной на месте изготовления клетки.

На основании опыта, полученного при проектировании и испытании клетки прокатного стана с предварительным напряжением навивкой проволоки, были проработаны в эскизном исполнении два варианта железобетонной клетки листопрокатного стана «4200». По первому варианту (фиг. 9, в) клетка состоит из четырех трубобетонных стоек (диаметром 2,1 м), соединенных сверху и снизу в пространственную конструкцию толстыми ригелями (архитравами) эллиптического очертания. Предварительное обжатие клетки осуществляется обмоткой высокопрочной проволокой, при этом стойки обжимаются вертикальной обмоткой, а ригели горизонтальной. Намотка предварительно напряженной проволоки производится специальной намоточной машиной. По второму варианту (фиг. 9, г) клетка состоит из четырех стоек прямоугольного поперечного сечения ($2 \times 1,8$ м), соединенных сверху и снизу ригелями полукруглого поперечного сечения. Предварительное обжатие станин выполняется путем намотки четырех поясов из высокопрочной проволоки. Ригели между станинами обжимаются стержневой арматурой. По предварительным подсчетам на железобетонную клетку стана «4200» требуется 40—45 т арматурной стали и 30—40 т стального листа для облицовки. Экономия стали составляет около 80%, т. е. на железобетонную клетку расходуется металла в 5 раз меньше, чем на стальную. Общий вес железобетонной клетки составляет 1000 т.

Выводы

Проведенная работа показала:

1. Вполне надежную работу железобетона в конструкции клетки на многократно повторную нагрузку по деформативности. Упругие деформации практически оставались постоянными после $5 \cdot 10^6$ циклов нагрузки.

2. Хорошее совпадение расчетных данных с экспериментальными — расхождение между ними не превышало 12%.

3. Применение железобетона в конструкциях клеток прокатных станов даст значительный экономический эффект (экономия стали до 80%) и уменьшение затрат труда на изготовление их.

В дальнейшей работе по применению сборного железобетона для изготовления клетей прокатных станов необходимо обратить внимание на обеспечение точности сборки при монтаже клетки или предусмотреть возможность обработки направляющих после ее сборки

ЛИТЕРАТУРА

1. Жемочкин Б. Н. Теория упругости. Госстройиздат, 1957.
2. Михайлов К. В., Городницкий Ф. М. Исследование выносливости арматуры из высокопрочной холоднотянутой проволоки. Труды НИИЖБ, вып. 23. Госстройиздат, 1961.
3. Мурашев В. И. и др. Железобетонные конструкции. Госстройиздат, 1962.
4. Пратусевич Я. А. Вариационные методы в строительной механике. Гостехиздат, 1948.
5. Строительные нормы и правила. Ч. II, разд. В. Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования. Госстройиздат, 1962.
6. Целиков А. И. Прокатные станы. Metallurgizdat, 1946.

Инж. ОВЧИННИКОВА И. Г.

О ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ СОЕДИНЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЗАКЛАДНЫХ ДЕТАЛЕЙ С ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫМИ СТАНИНАМИ

Металлические закладные детали в различных железобетонных конструкциях станин станков, прессов и других машин выполняют роль стыковочных и привалочных плит, направляющих, платиков для крепления механических узлов, распределительных плит и т. д.

Во всех случаях любая металлическая закладная деталь состоит из собственно закладной детали и анкерного устройства, обеспечивающего ее крепление к бетону. Закладная деталь в большинстве случаев имеет продольные и поперечные ребра, обеспечивающие ее жесткость как при транспортировке и механической обработке, так и в период эксплуатации машины.

В зависимости от условий применения металлические закладные детали должны удовлетворять требованиям прочности или жесткости заделки в бетоне¹.

Выполнение этих требований зависит главным образом от характера и величины действующей нагрузки и выбранной в зависимости от этого конструкции анкеров.

Как показали исследования, под действием внешней нагрузки в области сочленения металлических деталей с бетоном могут возникать нормальные растягивающие и сжимающие напряжения, а также напряжения сдвига. При этом величина напряжений в анкерах будет зависеть не только от способа приложения нагрузки на закладную деталь и интенсивности ее действия, но и от жесткости самой закладной детали.

В данной статье рассмотрены два вопроса:

1. Влияние конструкции анкеров на прочность и жесткость заделки закладной детали в бетоне.
2. Определение величины усилий в анкерах длиномерных закладных деталей.

¹ Под требованием жесткости заделки подразумевается ограничение величины смещения загружаемого конца анкера в бетоне относительно первоначального положения.

Влияние конструкции анкеров на прочность и жесткость заделки металлических закладных деталей в бетоне

В большинстве случаев ребра жесткости закладной детали монолитно заделываются в бетон. В качестве анкерных креплений наиболее целесообразно применять стержневую арматуру периодического профиля.

Поскольку крупные закладные детали большей частью отливаются из чугуна, то стержневые анкера возможно соединять с этими деталями путем заливки их в чугун, например в ребра. В этом случае и тогда, когда представляется возможным стержневые анкера крепить непосредственно к верхней пластине закладной детали, желательно учитывать и анкерующую способность ребер жесткости закладной детали.

Однако для этого недостаточно материалов имеющихся экспериментальных исследований. Поэтому были проведены специальные испытания по выдергиванию закладных деталей с ребрами из бетона и сопоставлена их работа в заделке с работой анкеров из арматуры периодического профиля.

В настоящее время ребра жесткости закладных деталей проектируются с крупными отверстиями, предполагая, что они будут способствовать повышению качества заделки ребер в бетоне.

Для проверки справедливости этого суждения в НИИЖБ были проведены в 1962 г. соответствующие исследования.

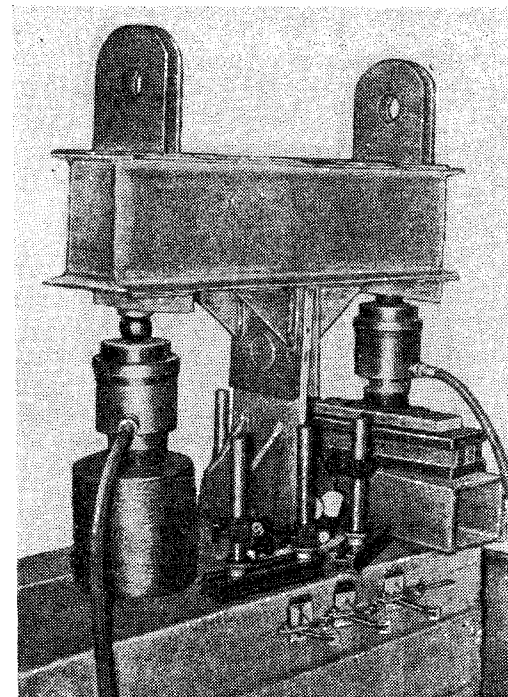
Испытание образцов. Закладная деталь состояла из верхней металлической пластины сечением 200×20 мм, длиной 500 мм, усиленной косынками, к которой были симметрично приварены анкера в виде ребер и стержневой арматуры периодического профиля на расстоянии 250 мм друг от друга. Ребра длиной 200 мм без отверстий или с двумя отверстиями диаметром 70 мм в среднем сечении по высоте ребра изготавливались из листовой стали марки Ст. 3 сечением 200×5 мм. Арматура имела диаметр 20 мм и длину 200 мм. Площади поперечных сечений анкеров в образце были равны. Конструкции анкеров были следующими: 1) гладкие ребра без отверстий; 2) гладкие ребра с отверстиями; 3) арматура периодического профиля; 4) гладкие ребра без отверстий с подваренными к ним снизу анкерами из арматуры периодического профиля; 5) гладкие ребра с отверстиями и подваренными к ним снизу анкерами из арматуры периодического профиля.

Закладные детали были заделаны в блок во время бетонирования. Кубиковая прочность бетона в день испытания составляла 435—490 кг/см². Бетон приготавливался на цементе активностью 600 кг/см² с долей песка в заполнителе ($r = 0,29 \div 0,33$) и расходом воды 180 л/м³. При бетонировании закладные детали устанавливались на дно опалубки.

При испытании усилие в образце создавалось двумя домкратами и передавалось на закладную деталь через распределитель-

ную траверсу. Закладные детали, снабженные анкерами разной конструкции, подвергались действию выдергивающей силы при кратковременном однократном нагружении. Общий вид устройства для испытания приведен на фиг. 1.

Смещение закладной детали под действием нагрузки относительно первоначального положения измерялось с помощью индикаторов, установленных с двух сторон верхней пластины над



Фиг. 1. Испытание образца.

анкерами. Посредством тензодатчиков, наклеенных на поверхности гладких ребер с двух сторон, изучался характер передачи нагрузки с ребер на бетон и по мере нагружения определялось какая доля внешней нагрузки в данных условиях воспринималась анкерами и какая — сцеплением верхней пластины с бетоном.

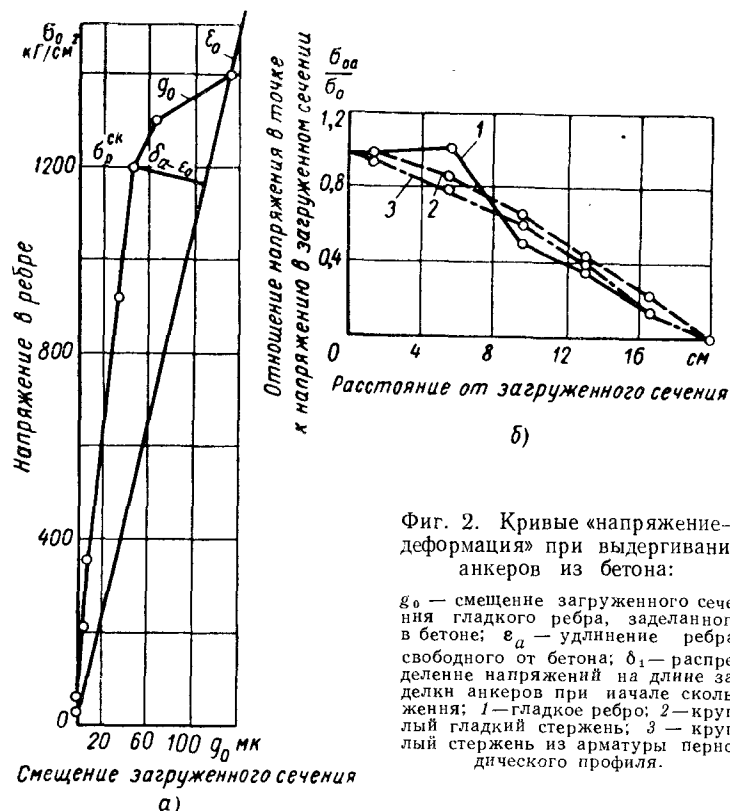
Результаты испытаний. Для оценки анкеровки гладких ребер в бетоне воспользуемся величиной напряжения $\sigma_0^{\text{ск}}$ при начале скольжения, характеризующей прочность заделки анкера.

При анализе работы анкеров из круглой арматуры за начало скольжения условно принимается максимальная разность $\epsilon_a - g_0$,

где g_0 — общее смещение анкера в бетонном блоке на длине заделки,

а ϵ_a — удлинение стали при растяжении на той же длине заделки.

Напряжение, при котором смещение загруженного конца анкера достигает значения удлинения свободной стали, характеризует начало разрушения заделки.



Фиг. 2. Кривые «напряжение—деформация» при выдергивании анкеров из бетона:

g_0 — смещение загруженного сечения гладкого ребра, заделанного в бетоне; ϵ_a — удлинение ребра, свободного от бетона; δ_1 — распределение напряжений на длине заделки анкеров при начале скольжения; 1 — гладкое ребро; 2 — круглый гладкий стержень; 3 — круглый стержень из арматуры периодического профиля.

На фиг. 2, а представлена кривая измеренных смещений g_0 загруженного сечения гладкого ребра при выдергивании закладной детали из бетонного блока в зависимости от напряжения (деформации в ребре определены по показаниям тензодатчиков). Для сравнения построена кривая полных удлинений стали ϵ_a при растяжении. Максимальная разность ($\epsilon_a - g_0$) характеризует начало скольжения ребра в бетоне. В данном случае она соответствует напряжению $\sigma_0^{sk} = 1200 \text{ кг/см}^2$.

Из графика видно, что после начала скольжения смещение ребра резко возросло. Полное нарушение заделки произошло при

напряжении в ребре $\sigma_0^p = 1400 \text{ кг/см}^2$. Образец выдержал дополнительно только напряжение $0,17\sigma_0^{sk}$. После начала скольжения сцепление ребер с бетоном осуществлялось в основном за счет сил трения.

Из приведенного анализа следует, что с момента начала скольжения стержня и до полного разрушения заделки имеется малый запас прочности заделки, поэтому рабочее напряжение в ребре не должно превосходить величины, соответствующей началу скольжения. Это возможно при небольших напряжениях, как например, в станинах станков.

Экспериментальная кривая (фиг. 2, б) распределения осевых нормальных напряжений по длине заделки ребра построена при начале скольжения $\sigma_0^{sk} = 1200 \text{ кг/см}^2$. На том же графике представлены теоретические кривые 2 и 3, подсчитанные для начала скольжения в бетоне круглого гладкого стержня и арматуры периодического профиля при равной длине заделки.

Из сравнения графиков видно, что экспериментальная кривая 1 характеризуется несколько большим скольжением ребра у загруженного сечения, чем круглая арматура (кривые 2 и 3), а следовательно, и большей податливостью в бетоне под действием нагрузки. Однако кривые свидетельствуют и о сходстве характера распределения нормальных напряжений по длине заделки у всех трех видов анкеров.

Значения отношений напряжений в точке σ_{0a} к напряжению на загруженном конце σ_0 при начале скольжения близки между собой.

Следовательно, можно считать, что смещение g_0 представляет собой сумму смещений отдельных участков ребра совместно с бетоном на длине заделки, а прочность сцепления может быть оценена по напряжению при начале скольжения.

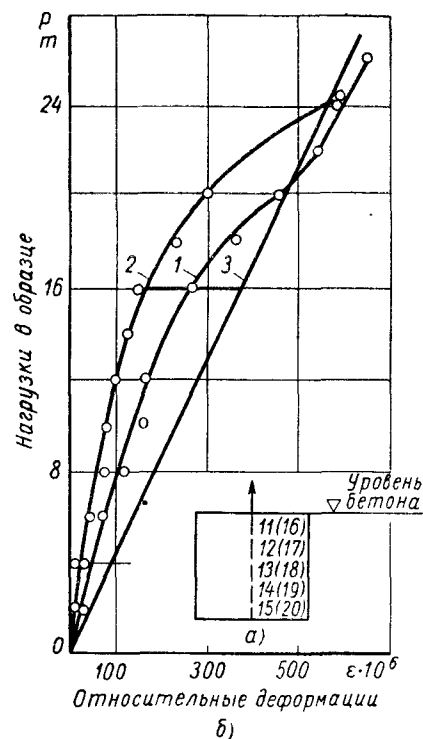
Это дает основание при разработке способа расчета прочности и жесткости заделки гладких ребер в бетоне применять положения, принятые для расчета круглых стержней.

На фиг. 3 представлена теоретическая кривая ϵ_a , построенная из условия упругой работы ребер, когда на них передается вся нагрузка, приложенная к образцу.

Экспериментальная кривая деформаций 1 получена по показаниям датчиков, поставленных у загруженного сечения ребра. Кривая характеризует ту фактическую долю общей нагрузки, которая воспринималась ребрами, а разность деформаций, представленных на графиках 3 и 1 — долю нагрузки, воспринятой сцеплением верхней пластины закладной детали с бетоном.

Анализ результатов показал, что на первых ступенях загрузки (до 2—4 т) действующая нагрузка, воспринимаемая ребрами и сцеплением пластины с бетоном, распределялась между ними пропорционально модулю упругости стали и бетона.

В дальнейшем большая доля нагрузки передавалась на ребра, что сопровождалось в отдельных случаях постепенным нарушением сцепления верхней пластины закладной детали с бетоном, в других — разрушением бетона под пластиной. Этому явлению способствовал изгиб пластины в пролете, имевший место при испытании образца.



Фиг. 3. Деформация гладких ребер при загрузке образца:

а — схема расположения датчиков на ребре; б — график нагрузки относительной деформации; 1 — экспериментальные значения относительных деформаций ребра в заделке по показаниям датчиков 11 и 16; 2 — экспериментальные значения относительных деформаций ребра в заделке по показаниям датчиков 12 и 17; 3 — теоретические значения относительных деформаций ребра, свободного от бетона (ϵ_a).

струкциях станков, где имеют место небольшие напряжения.

Нужно считать всю нагрузку полностью передаваемой на анкера.

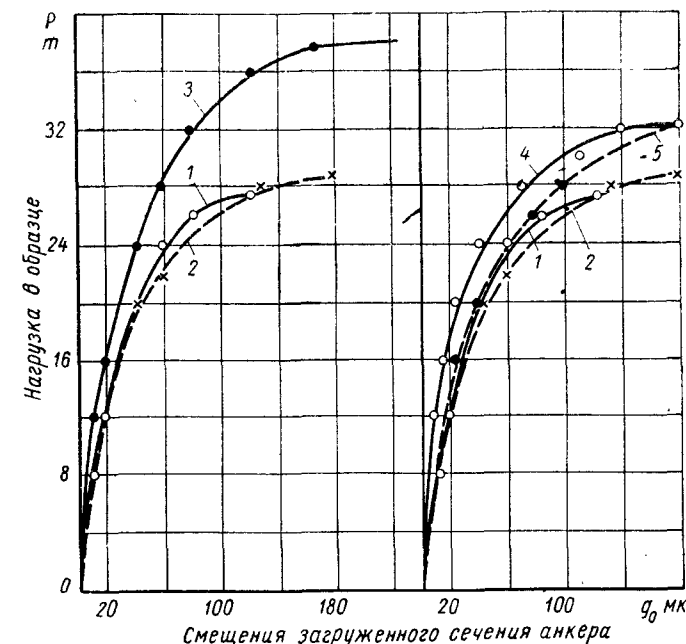
Конструктивные особенности анкера начали сказываться после того, как бетон под верхней пластиной выключился из работы (в данных образцах это соответствовало нагрузке 20 т, т. е.

При нагрузке от 16 до 20 т началось интенсивное разрушение монолитности соединений под пластиной, что иллюстрируется графиком на фиг. 3. Пересечение кривой 1, характеризующей деформации загруженного сечения гладкого ребра, с прямой 3, характеризующей относительные деформации того же ребра, свободного от бетона, соответствует нагрузке 20 т. Следовательно, с этого момента вся нагрузка начала восприниматься ребрами и анкерами.

Таким образом, нарушение монолитности соединения верхней пластины закладной детали с бетоном наступало как вследствие нарушения сцепления пластины с бетоном, так и в результате разрыва бетона. Нагрузка, при которой происходило нарушение, зависела в значительной мере от прогиба закладной детали между анкерами. Для испытанных образцов начало разрушения бетона под пластиной соответствовало 2—4 т, что значительно ниже большинства эксплуатационных нагрузок. Поэтому соединение верхней пластины с бетоном не должно учитываться даже в кон-

напряжению в анкерах 1000 кг/см^2 . При напряжении в образце 1100 кг/см^2 ($P = 22 \text{ т}$) анкера из арматуры периодического профиля имели в среднем смещение 37 мк, гладкие ребра — 50 мк и ребра с отверстиями — 62 мк (фиг. 4).

Наивысшие показания по прочности заделки получены у образца с анкерами из арматуры периодического профиля ($P = 33 \text{ т}$).



Фиг. 4. Смещение загруженного сечения анкеров:

1 — гладкие ребра без вырезов; 2 — гладкие ребра с вырезами; 3 — арматура периодического профиля; 4 — гладкие ребра без вырезов и с анкерами периодического профиля; 5 — гладкие ребра с вырезами и анкерами периодического профиля.

Разрушающая нагрузка в образцах с гладкими ребрами составляла 27,8 т, с ребрами, прорезанными отверстиями, — 28,2 т.

Испытания показали, что самая большая жесткость заделки была у анкеров, выполненных из арматуры периодического профиля, самая же малая — у анкеров из гладкой листовой стали с отверстиями.

Поверхность сцепления ребер с отверстиями (кривая 2) была на 20 % меньше гладких ребер без отверстий (кривая 1). Жесткость их заделки в бетоне оказалась сниженной соответственно. Прочность заделки обоих типов ребер практически не различалась. Таким образом, испытания показали, что применение ребер с крупными отверстиями нецелесообразно.

Жесткость заделки анкеров периодического профиля в сравнении с гладкими ребрами была на 26% выше, тогда как поверхность сцепления — в 2,1 раза меньше. Таким образом, можно считать, что эффективность заделки анкеров периодического профиля в сравнении с гладкими ребрами в данном случае составляла 265%. Это значение оставалось постоянным до начала скольжения ребер в заделке.

Оценку прочности заделки гладких ребер в бетоне по сравнению с анкерами периодического профиля следовало проводить при напряжении $\sigma_0^{ск}$ в начале скольжения. В испытанных нами образцах получить величину начала скольжения анкеров периодического профиля не удалось, так как образцы разрушались от разрыва бетона прежде, чем наступало скольжение анкеров. Поэтому этот вопрос предлагается проанализировать теоретически.

Испытания образцов 4 и 5 показали, что в результате приварки к нижнему концу ребер стержней из арматуры периодического профиля была повышена как жесткость, так и прочность их сцепления с бетоном.

Так, при напряжении в ребрах 1200 кг/см^2 (общая нагрузка в образце 24 т) смещения ребер в образце 5 оказались на 21% меньше, чем в образце 2. Однако прочность заделки при этом увеличилась всего на 12% (произошел разрыв бетона в сечении, ослабленном отверстиями).

При этом же напряжении величина смещений загруженных сечений ребер в образце 4 была на 26% меньше, чем в образце 1. Прочность заделки повысилась на 13%.

Аналогичные результаты получены и при более высоких напряжениях.

Выводы

1. При определении анкерующей способности закладной детали в бетоне соединение верхней пластины с бетоном не должно учитываться.

2. Гладкие ребра закладной детали могут быть введены в расчет жесткости и прочности заделки в бетоне марок «400»—«500» при напряжении в них меньше 800 кг/см^2 . Арматура периодического профиля, приваренная к ребрам, увеличивает жесткость и прочность заделки.

3. Для разработки способа расчета прочности и жесткости заделки гладких ребер в бетоне могут быть применены положения, принятые для расчета круглых стержней.

4. Применение ребер закладной детали с крупными отверстиями нецелесообразно, так как они обладают низкой жесткостью заделки в бетон. Прочность их заделки по сравнению с ребрами без отверстий практически не повышается.

Усилия в анкерах длиномерной закладной детали

В практике проектирования железобетонных базовых деталей бывают случаи, когда действующая на закладную деталь эксплуатационная нагрузка приложена на небольшом участке ее длины. При определении расчетных напряжений в анкерах закладной детали следует учитывать, что в работу будет вовлечен участок детали, больший того, к которому непосредственно приложена нагрузка, и, следовательно, на анкера, находящиеся в зоне приложения усилия, придется только часть полной нагрузки.

В данном разделе статьи рассматривается приближенный способ определения усилий в анкерах таких деталей при действии выдергивающей силы (это имеет место, например, в растянутой зоне направляющей).

Для решения поставленной задачи проводились теоретические и экспериментальные исследования на образце упрощенной конструкции.

Конструкция образца. Для исследования была принята металлическая закладная деталь длиной 2200 мм, сечением $200 \times 20 \text{ мм}$, с двумя рядами анкеров периодического профиля диаметром 20 мм и длиной 200 мм. Расстояние между анкерами по длине пластины было принято 250 мм, расстояние между рядами — 160 мм.

Закладная деталь крепится к блоку из бетона марки «500». Внешняя выдергивающая сила принята приложенной к середине закладной детали на участке длиной 200 мм.

Расчет системы. Для решения задачи пользовались известным в строительной механике способом расчета многопролетной неразрезной балки на упруго смещающихся опорах. При этом металлическая закладная деталь рассматривалась как неразрезная балка с пролетом, равным расстоянию между опорами, а стержни из арматуры периодического профиля, заделанные в бетон, — как опоры.

Поскольку рассматриваемая закладная деталь фактически крепится к бетону двумя рядами анкеров, вся система является пространственной. Для упрощения решения задачи систему рассматривали как плоскую, для чего в расчет ввели следующие допущения:

расчетную ширину балки уменьшили в 2 раза по сравнению с фактической;

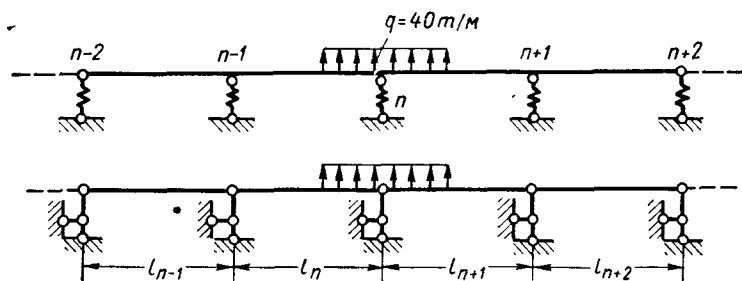
приняли один ряд анкеров с сохранением их фактического диаметра и шага;

анкеры расположили посередине расчетной ширины балки; расчетную величину нагрузки считали в 2 раза меньше фактической, сохранив интенсивность ее действия;

сцеплением пластинки закладной детали с бетоном пренебрегали.

Расчетная схема приведена на фиг. 5. Способ расчета балки с упруго смещающимися опорами в данной статье не приводится, так как он подробно изложен в «Курсе строительной механики стержневых систем» Рабиновича М. М. Специфичным в данном расчете является лишь определение коэффициента податливости опор.

Поскольку коэффициент податливости опоры C есть изменение ее длины, вызванное единичной продольной силой, то можно считать, что он равен смещению в бетоне загруженного сечения анкера g_0 на длине заделки l при напряжении в нем σ_0 , вызванном действием единичной произвольной силы P . Тогда $c = \frac{g_0}{P}$.



Фиг. 5. Расчетная схема.

Для подсчета этого коэффициента пользовались формулой, предложенной Т. И. Астровой для определения удлинения стержня в бетоне на упругой стадии работы:

$$\delta_0 = \frac{\sigma_0}{E_a \lambda} \left(\frac{\lambda l e^{-\lambda l} + e^{-\lambda l} - 1}{e^{-\lambda l} - 1} \right), \quad (1)$$

где E_σ — модуль упругости стали;

l — длина заделки анкера в бетон;

λ — параметр сцепления, определяемый практически.

Формула (1) применима при эксплуатационном напряжении в анкере не более 1000 кг/см^2 . Удлинение стержня в бетоне δ_0 может принято равным смещению g_0 .

Если в рассматриваемой балке конструкция анкеров одинаковая, то значения g_0 для всех стержней равны.

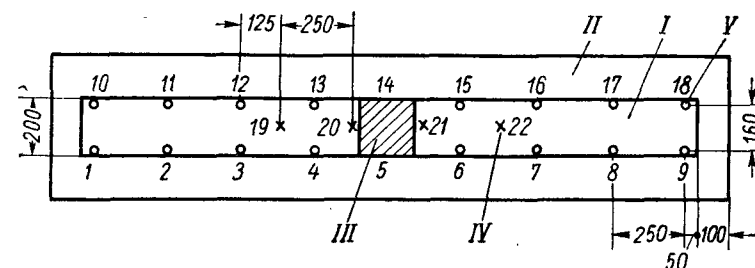
Удлинение опор равно усилию в анкере, умноженному на соответствующий коэффициент податливости.

Составив и решив систему канонических уравнений и определив неизвестные моменты в опорах, можно определить в них опорные реакции. Эти реакции и являются искомыми усилиями

в стержнях, вызванными внешней нагрузкой, приложенной к закладной детали.

На фиг. 10 приведена теоретическая кривая распределения усилий между анкерами при нагрузке 16 т. Для проверки справедливости решения аналогичный образец был исследован экспериментально.

Экспериментальные исследования. Смещения верхней пластины закладной детали относительно бетонного блока под действием нагрузки измерялись при помощи индикаторов, установленных над всеми анкерами и в средней части балки (фиг. 6 и 7). Для



Фиг. 6. Схема расположения стержней на закладной детали:
I — металлическая закладная деталь; II — бетонный блок; III — гру-
зовая площадь; IV — места установки индикаторов между анкерами;
V — места установки индикаторов над анкерами.

определения усилия в анкерах при действии нагрузки использовались усредненные показания тензодатчиков, поставленных у загруженного сечения анкеров.

Исследование напряженного состояния бетона между анкерами проводилось с помощью глубинных тензодатчиков.

Первоначальное нарушение сцепления верхней пластины с бетоном произошло в зоне *III* приложения нагрузки (0,5—1,0 *m*). При нагрузке 16 *t* эта зона составляла 500 *mm*, распространившись до стержней 4; 6 и 13; 15.

Измерения индикаторами показало, что при первом цикле загрузки от 0 до 16 т деформация пластины развивалась в обоих направлениях симметрично относительно осей образца. Однако пластина имела изгиб в двух направлениях.

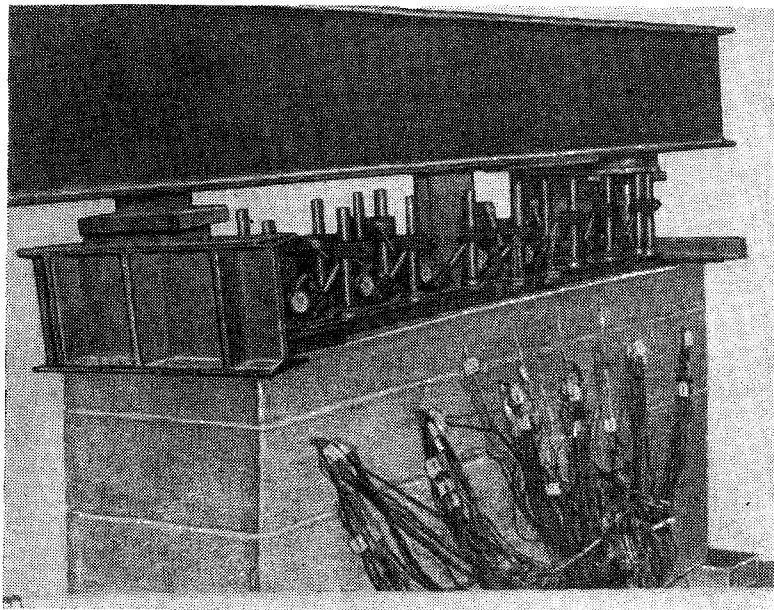
Смещение стержня 5 в середине пролета при данной нагрузке составляло 153 мк. При 40 циклах загрузки (16 т) наблюдалось некоторое перераспределение усилий между анкерами, вследствие чего смещение стержня 5 уменьшилось до 133 мк.

При повышении нагрузки на образец прогиб пластины увеличился с проявлением некоторой несимметричности относительно середины образца. При нагрузке 30 т зона нарушения сцепления между пластиной и бетоном увеличилась до 790 мм, т. е. до анкеров 4; 13; 7 и 16.

Разрушение образца произошло при нагрузке 31 т в результате отрыва анкеров 5 и 14 от пластины, что сопровождалось смещением загруженных сечений остальных анкеров.

Показания индикаторов при этом свидетельствовали о полном нарушении сцепления пластины с бетоном по всей длине образца.

Продольные ряды анкеров были загружены в разной степени (фиг. 8). Так, при первом цикле загрузки 16 т стержень 5



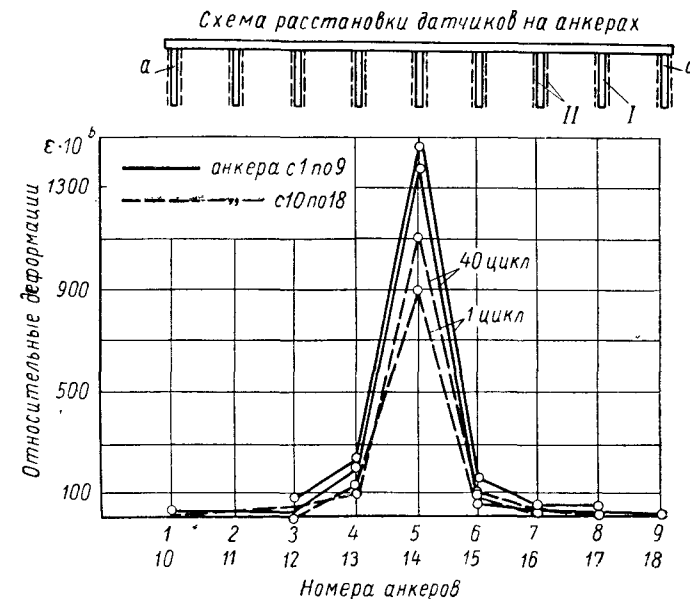
Фиг. 7. Испытание образца.

в загруженном сечении имел деформацию растяжения $\epsilon_0 = 1432 \cdot 10^{-6}$, а стержень 14 деформацию $\epsilon_0 = 902 \cdot 10^{-6}$. В анкерах 4; 6; 13 и 15 деформации растяжения колебались в пределах от $157 \cdot 10^{-6}$ до $215 \cdot 10^{-6}$. Во всех остальных стержнях под действием нагрузки деформаций не наблюдалось.

Сравнив эти данные с показаниями индикаторов, можно видеть, что при первом цикле загрузки 16 т нагрузка воспринималась только шестью средними анкерами. После 40 циклов загрузки той же нагрузкой усилие между анкерами несколько перераспределилось и воспринималось тремя парами анкеров.

При увеличении нагрузки сверх 16 т в средних стержнях (5 и 14) появилась текучесть стали, что вновь привело к перераспределению усилий между всеми соседними анкерами.

Для проверки полученных значений относительных деформаций в загруженных сечениях стержней были построены экспериментальные кривые распределения деформаций по всей длине их заделки в бетоне.



Фиг. 8. Относительные деформации по показаниям тензодатчиков (в сечении а—а):

I — анкера; II — тензодатчики.

Усилия в анкерах, подсчитанные по показаниям датчиков, приведены в табл. 1.

Суммы усилий в стержнях при нагрузке 16 т 1 и 40-го циклов загрузки были равны между собой и составляли 14,4 т, что меньше внешней нагрузки на 1,6 т. Можно предположить,

Распределение усилий между анкерами при действии на образец нагрузки 16 т

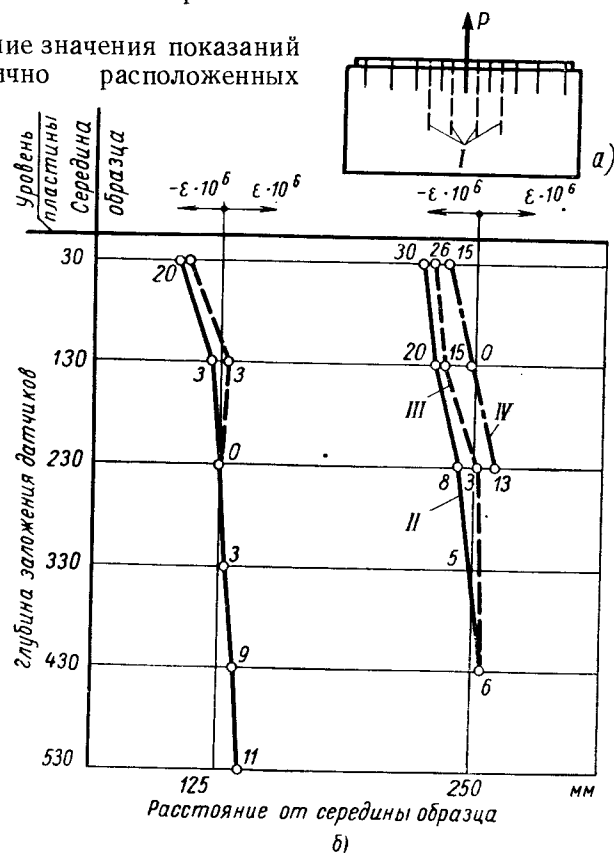
Таблица 1

Цикл нагружения	Номера стержней						Сумма усилий в т
	4	5	6	13	14	15	
	Усилия в т						
1	1,05	6,75	0,75	0,75	4,26	0,75	14,31
40	1,02	6,59	0,75	0,57	0,13	0,32	14,38

что эта часть усилия воспринималась силами сцепления пластины с бетоном на участках между стержнями 4; 6 и 14; 16.

Глубинные датчики, установленные между анкерами, в среднем продольном сечении образца замеры деформации бетона в вертикальном направлении (фиг. 9).

Средние значения показаний симметрично расположенных



Фиг. 9. Напряженное состояние бетона между анкерами:

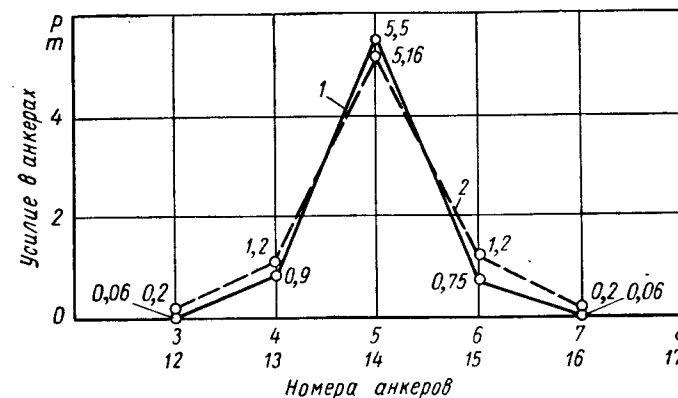
а — схема расположения тензодатчиков; б — график относительных деформаций бетона при загрузке; I — глубинные тензодатчики; II — относительные деформации бетона при нагрузке 16 т (шестой цикл загрузения); III — то же, при нагрузке 16 т (38-й цикл загрузения); IV — то же, при нагрузке 25 т (первый цикл загрузения).

датчиков на глубине до 130—220 мм от металлической пластины, зафиксировали деформации сжатия. Наибольшее значение сжатия было отмечено вблизи пластины при первом цикле загрузения нагрузкой 16 т ($\epsilon_s = -32 \cdot 10^{-6} \div 36 \cdot 10^{-6}$).

По мере удаления от пластины деформации сжатия уменьшались и затем перешли в деформации растяжения небольшого значения ($\epsilon_s = 10 \cdot 10^{-6} \div 15 \cdot 10^{-6}$).

Деформации сжатия в бетоне можно объяснить сопротивлением бетонного массива действию выдергивающей силы, приложенной к стержню. Возникает оно за пределами растянутой зоны бетона, прилегающей к стержню, и свидетельствует о том, что деформация бетона вокруг одного анкера не оказала влияния на смещение соседнего анкера и податливость опоры в заделке зависела только от g_0 .

Следовательно, в данном случае было справедливо рассматривать анкера в расчете как самостоятельные опоры.



Фиг. 10. Распределение усилий между анкерами:

1 — экспериментальные значения (усредненные); 2 — теоретические значения.

Сравнение экспериментальной кривой распределения усилий между анкерами с расчетной показало довольно близкое совпадение.

Разница усилий, подсчитанная для стержней 5 и 14, составляет всего лишь 6%, что вполне допустимо (фиг. 10).

Если работа одного анкера оказывает влияние на смещение другого анкера, то податливость опор будет несколько выше, чем та, которая может быть определена по формуле (1). В этом случае при сильном сближении анкеров будет правильнее закладную деталь рассчитывать как балку на упругом основании.

Выводы

Усилия в анкерах длиномерной закладной детали, подверженной действию выдергивающей силы на небольшом участке ее длины, могут быть определены путем расчета этой детали как многопролетной неразрезной балки на упруго смещающихся опорах с учетом характеристики податливости анкеров в бетоне.

Расстояние между анкерами при этом должно быть не менее 6 диаметров стержня.

В расчете необходимо учитывать возможный эксцентриситет приложения нагрузки.

Геометрия спиральной камеры определяется следующим образом. Радиус входного отверстия спиральной камеры ϱ находится по заданной входной скорости воды. В зависимости от него по формуле

$$\frac{2\pi - \varrho}{C} = r + a - \sqrt{r^2 + t^2 + 2ra} \quad (1)$$

строится поперечное сечение спиральной камеры (фиг. 1). Здесь C — величина, зависящая от полного расхода воды через турбину;
 r — радиус статорного кольца;
 t — половина высоты статорного кольца.

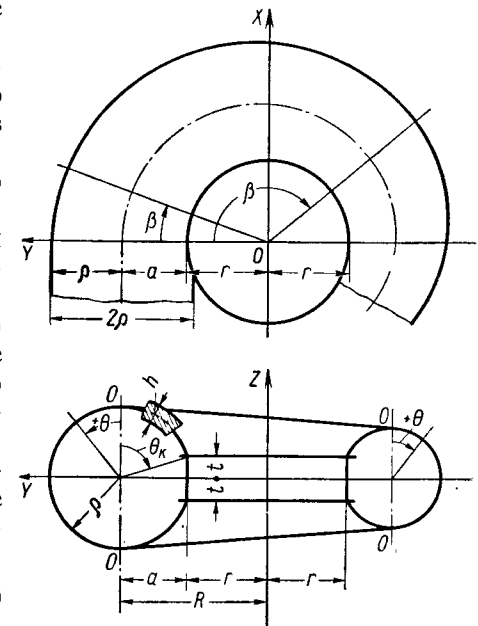
Так как формула (1) сложна для введения ее в уравнения статики, то Корнецкий А. Л. аппроксимирует ее следующим путем. Принимается, что для определенной по этой формуле спирали, лежащей в плоскости HOY ,

$$\varrho = \varrho_1 (1 - k\beta), \quad (2)$$

где ϱ_1 — радиус входного отверстия (начальный радиус).

Для $\beta = \pi$ коэффициент аппроксимации $k = \frac{\varrho_1 - \varrho_k}{\varrho_1 \pi} \leq \frac{1}{2\pi}$ в большинстве конструкций; здесь $\varrho_k = \varrho_{\beta=\pi}$.

Угол $\beta > \pi$ в рассмотрение не принимается ввиду того, что за его пределами кольцевое сечение спиральной камеры быстро переходит в эллиптическое, принимаемое из конструктивных соображений; здесь напряженное состояние не интересно, так как действующие в этом месте усилия малы, поскольку при постоянной толщине оболочки радиус ϱ сильно уменьшается. В работе Корнецкого А. Л. показано, что построенная по формуле (2) спираль очень мало отличается от гидравлической, но вносит весьма существенные упрощения в расчет.



Фиг. 1. Геометрия спиральной камеры.

Инж. ПЛОТНИКОВ Ф. А.

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СПИРАЛЬНЫХ КАМЕР ВОДЯНЫХ ТУРБИН КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

С повышением мощности применяемых в СССР турбин растут габариты их спиральных камер, что приводит к большим технологическим трудностям (иногда непреодолимым) изготовления и к большому расходу металла. Например, для турбины мощностью 500 тыс. квт толщина оболочки металлической спиральной камеры доходит до 70—90 мм. Сложность изготовления такой оболочки и громадная стоимость ее понятны.

В связи с этим встает вопрос о переходе на иной вид материала — железобетон. Применение железобетона для спиральной камеры изменяет конструктивную и расчетную схему ее. На это указывают примеры проектирования и исследования железобетонных спиральных камер [1] и примеры их возведения — сооружение ГЭС-Дэвис в США и сооружение гидроузла Лех в ФРГ [6], [7]. Отношение толщины оболочки к радиусу кольцевого сечения на входе меняется от 1/100—1/80 до 1/4—1/3, т. е. оболочка из тонкой превращается в оболочку «средней» толщины. А. Л. Корнецкий выяснил, что для тонкой оболочки, какой является оболочка металлической спиральной камеры, учет ее формы в сравнении с принимаемым обычно при расчете в качестве срединной поверхности оболочки тором не вносит существенных поправок в результаты расчета.

Насколько это будет верно для оболочки средней толщины, неизвестно. Расчету торообразной оболочки средней толщины посвящена работа Черниной В. С. [10]. В ней указывается, что учет толщины оболочки [11], [12] вносит поправку в вычисления напряжений, действующих в меридиональных разрезах торообразной оболочки («щепные» или «торовые» напряжения), величиной в 23% и более.

В настоящей статье дается постановка задачи по расчету спиральной камеры при учете формы ее согласно работе Корнецкого А. Л. для оболочки средней толщины, напряженное состояние которой определяется в соответствии с положениями Рейсснера Э. и Нахди П.

В принятой системе координат уравнения поверхности будут

$$\begin{aligned} x &= (r + a + q \sin \theta) \sin \beta; \\ y &= (r + a + q \sin \theta) \cos \beta; \\ z &= q \cos \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Линии $\theta = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ являются криволинейными координатами на срединной поверхности оболочки.

Выражение

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} = q \cos \theta \frac{\partial a}{\partial \beta} \neq 0$$

указывает на то, что данные координаты не ортогональны.

Отыщем ортогональные координаты из условия

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0, \quad (4)$$

положив

$$\theta = f_1(\alpha, \beta); \quad q = f_2(\beta) \quad \text{и} \quad a = f_3(\beta).$$

Дифференцируя уравнение (3) по α и β и подставляя в формулу (4), получим

$$\frac{dq}{\sqrt{q^2 - t^2}} + \frac{d\theta}{\cos \theta} = 0, \quad (5)$$

откуда

$$c = (q + a) \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}. \quad (6)$$

примем

$$c = -\frac{t}{\alpha},$$

тогда

$$\alpha = -\varepsilon \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}, \quad (7)$$

где

$$0 < \varepsilon = \frac{t}{q + a} < 1. \quad (8)$$

Формулой (7) определяются преобразования

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{2\varepsilon\alpha}{\varepsilon^2 + \alpha^2}; \\ \sin \theta &= \frac{\varepsilon^2 - \alpha^2}{\varepsilon^2 + \alpha^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения поверхности, отнесенные к ортогональной системе координат, принимают вид

$$\begin{aligned} x &= F(\alpha, \beta) \sin \beta; \\ y &= F(\alpha, \beta) \cos \beta; \\ z &= -q \frac{2\varepsilon\alpha}{\varepsilon^2 + \alpha^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$F(\alpha, \beta) = r + a + q \frac{\varepsilon^2 - \alpha^2}{\varepsilon^2 + \alpha^2}.$$

Геометрический смысл α виден из фиг. 2.

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\theta_K}{2} + \frac{\pi}{4} \right) : \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{t}{q + a} : \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = -\alpha.$$

Таким образом, рассматриваемая область оболочки ограничивается пределами

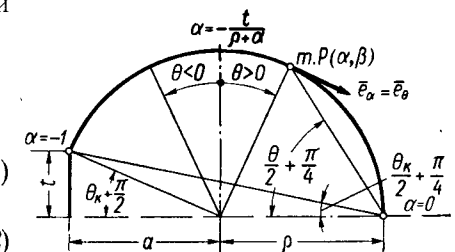
- 1) $0 \leq \beta \leq \pi$;
- 2) $\begin{cases} \alpha = 0 & \text{— плоская спиральная кривая;} \\ \alpha = -1 & \text{— полуокружность.} \end{cases}$

Для полученных координат по обычным формулам дифференциальной геометрии [5] вычисляются радиусы кривизны вдоль координатных линий α и β и коэффициенты Ламе (A и B).

$$A = \frac{2q\varepsilon}{\varepsilon^2 + \alpha^2} =$$

$$= \frac{q}{\varepsilon} (1 + \sin \theta) = -q \frac{\cos \theta}{\alpha}; \quad (11)$$

$$B = F \sqrt{1 + k^2 (B_1/F)^2}, \quad (12)$$



Фиг. 2. Геометрический смысл координаты α .

где

$$B_1 = q_1 \left(1 + \frac{q}{a} \sin \theta \right) \quad \text{и} \quad F = F(\alpha, \beta);$$

$$\frac{1}{R_{11}} = \frac{1}{q [1 + k^2 (B_1/F)^2]^{1/2}}; \quad (13)$$

$$\frac{1}{R_{22}} = \frac{\sin \theta}{F} \cdot \frac{1 + k^2 \frac{E_1}{F}}{[1 + k^2 (B_1/F)^2]}; \quad (14)$$

$$\frac{1}{R_{12}} = k \frac{r q_1 \cos \theta}{a F^2} \cdot \frac{1}{1 + k^2 (B_1/F)^2}. \quad (15)$$

В формуле (14)

$$E_1 = \frac{q_1^2}{a} \left[\frac{q}{a \sin \theta} + \frac{q^2}{a^2} + \left(\frac{2a}{F} - 1 \right) \left(1 + \frac{q}{a} \sin \theta \right) \right].$$

Так как $\frac{1}{R_{12}} \neq 0$, то линии $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ не являются главными линиями кривизны.

Полученные выражения легко упрощаются за счет отбрасывания пренебрежимо малых членов, содержащих величину k^2 . Тогда имеем

$$B = F = r + a + q \sin \theta = R (1 + \lambda \sin \theta), \quad (16)$$

где $R = r + a$ и $\lambda = \varrho/R$;

$$\frac{1}{R_{11}} = \frac{1}{\varrho}; \quad (17)$$

$$\frac{1}{R_{22}} = \frac{\sin \theta}{F} = \frac{\sin \theta}{R(1 + \lambda \sin \theta)}; \quad (18)$$

$$\frac{1}{R_{12}} = k \frac{r\varrho_1}{aR^2} \frac{\cos \theta}{(1 + \lambda \sin \theta)^2}. \quad (19)$$

Статика оболочки средней толщины

Рейсснер Э. показывает, что для предложенной им теории, учитывающей члены порядка h/R по сравнению с единицей, к шести уравнениям равновесия тонких оболочек [2] необходимо добавить седьмое уравнение, являющееся вторым недифференциальным уравнением в системе статических уравнений равновесия упругих оболочек [11].

Для оболочки, отнесенной к ортогональным координатам, уравнения статики в этом случае будут иметь вид [11], [12]:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} N_{11} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} N_{21} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} N_{12} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_2} N_{22} + \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{Q_1}{R_{11}} + \frac{Q_2}{R_{12}} \right) = 0; \\ \text{II. } & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} N_{12} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} N_{22} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} N_{21} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} N_{11} + \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{Q_1}{R_{12}} + \frac{Q_2}{R_{22}} \right) = 0; \\ \text{III. } & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} Q_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} Q_2 - \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{N_{11}}{R_{11}} + \frac{N_{22}}{R_{22}} + \right. \\ & \left. + \frac{N_{12} + N_{21}}{R_{12}} \right) + \alpha_1 \alpha_2 (q^+ H^+ + q^- H^-) = 0; \\ \text{IV. } & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} M_{11} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} M_{21} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} M_{12} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} M_{22} - \\ & - \alpha_1 \alpha_2 Q_1 = 0; \\ \text{V. } & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} M_{12} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} M_{22} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} M_{21} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} M_{11} - \\ & - \alpha_1 \alpha_2 Q_2 = 0; \\ \text{VI. } & \frac{M_{12}}{R_{11}} - \frac{M_{21}}{R_{22}} + \frac{M_{22} - M_{11}}{R_{12}} + N_{12} - N_{21} = 0; \\ \text{VII. } & M_{12} - M_{21} = \frac{h^2}{24} \left[\left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) (N_{12} + \right. \\ & \left. + N_{21}) + \frac{2}{R_{12}} (N_{11} - N_{22}) \right]; \end{aligned} \quad (20)$$

здесь

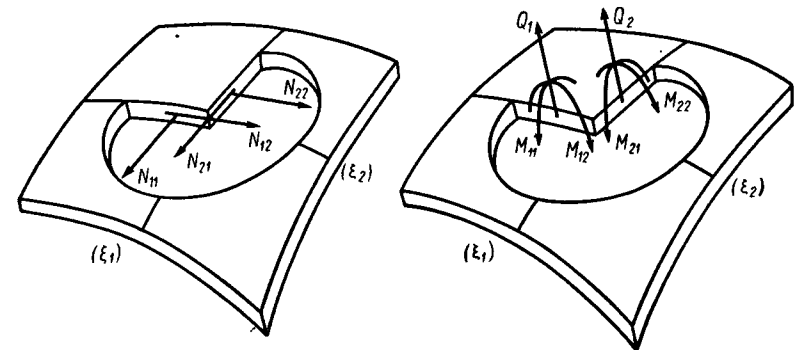
$$H^+ = 1 + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{22}} \right);$$

$$H^- = 1 - \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{22}} \right);$$

$$\alpha_1 = A; \quad \alpha_2 = B; \quad \xi_1 = \alpha; \quad \xi_2 = \beta.$$

q^+ и q^- — значения внешней нагрузки на обеих (верхней и нижней) поверхностях оболочки.

В этих уравнениях принято, что тангенциальные составляющие нагрузки отсутствуют, т. е. q^+ и q^- — нормальны к поверх-



Фиг. 3. Правило знаков для усилий и моментов.

ностям оболочки. Отсутствует также внешняя моментная нагрузка. Собственный вес оболочки не учитывается. Правило знаков показано на фиг. 3.

Чтобы получить соотношения между напряжениями и деформациями, нужно повторить ход рассуждений Рейсснера Э., поскольку он не учитывал внешней нагрузки в предложенных им приближенных формулах, связывающих усилия и моменты с напряжениями. Такой учет сделал Нахди П. [12] и получил следующие формулы:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\xi}{R_{II}} \right) \sigma_I &= \frac{N_I}{h} + \frac{M_I}{h^2/6} \cdot \frac{\xi}{h/2}; \\ \left(1 + \frac{\xi}{R_I} \right) \sigma_{II} &= \frac{N_{II}}{h} + \frac{M_{II}}{h^2/6} \cdot \frac{\xi}{h/2}; \\ \left(1 + \frac{\xi}{R_{II}} \right) \tau_{I, II} &= \frac{N_{I, II}}{h} + \frac{M_{I, II}}{h^2/6} \cdot \frac{\xi}{h/2}; \\ \left(1 + \frac{\xi}{R_{II}} \right) \tau_{I\xi} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_I}{h} \left[1 - \left(\frac{\xi}{h/2} \right)^2 \right]; \\ \left(1 + \frac{\xi}{R_I} \right) \tau_{II\xi} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{II}}{h} \left[1 - \left(\frac{\xi}{h/2} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\xi}{R_I}\right) \left(1 + \frac{\xi}{R_{II}}\right) \sigma_z = & \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{S}{h} + \frac{T}{4h} \left(\frac{\xi}{h/2} \right) \right] \left[1 - \left(\frac{\xi}{h/2} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} q^+ H^+ \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\xi}{h/2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{h/2} \right)^3 \right] + \\ & + \frac{1}{2} q^- H^- \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\xi}{h/2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{h/2} \right)^3 \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$S = - \left(\frac{M_I}{R_I} + \frac{M_{II}}{R_{II}} \right) \quad \text{и} \quad T = -h \left(\frac{N_I}{R_I} + \frac{N_{II}}{R_{II}} \right).$$

Эти формулы даны для координатной системы (ξ_I, ξ_{II}, ζ) , в которой линии $\xi_I = \text{const}$ и $\xi_{II} = \text{const}$ — есть линии кривизны срединной поверхности, а ζ — координата по нормали к срединной поверхности.

Отправляясь от системы уравнений (20), через частные производные потенциальной энергии деформации, относящейся к слою, окружающему срединную поверхность и имеющему толщину $2\zeta \leq h$, где $-\frac{h}{2} \leq \zeta \leq +\frac{h}{2}$, по соответствующим силам и моментам можно получить искомые соотношения. Для этого в выражении потенциальной энергии деформации [11], [111]

$$\begin{aligned} \Pi = \int & \left[\frac{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + 2\tau_{I,II}^2}{2E} + \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau_I^2 + \tau_{II}^2}{2G} \right] \times \\ & \times \left(1 + \frac{\xi}{R_I} \right) \left(1 + \frac{\xi}{R_{II}} \right) d\xi \end{aligned} \quad (22)$$

нужно заменить напряжения через их значения по формулам (21). В формуле (22) коэффициент Пуассона принят равным нулю [8]. Кроме того, здесь обозначено $\tau_I = \tau_{I\xi}$; $\tau_{II} = \tau_{II\xi}$ и $\sigma = \sigma_z$.

После соответствующих выкладок получим:

для той части потенциальной энергии деформации, которая обусловлена напряжениями σ_I , σ_{II} и $\tau_{I,II}$, параллельными срединной поверхности,

$$\begin{aligned} \Pi_t = & \frac{1}{2Eh} \left[N_I^2 + N_{II}^2 + \frac{1}{2} (N_{I,II} + N_{II,I})^2 \right] + \\ & + \frac{12}{2Eh^3} \left[M_I^2 + M_{II}^2 + \frac{1}{2} (M_{I,II} + M_{II,I})^2 \right] + \\ & + \frac{1}{Eh} \left(\frac{1}{R_{II}} - \frac{1}{R_I} \right) (N_{II}M_{II} - N_I M_I); \end{aligned} \quad (23)$$

для той части энергии деформации, которая обусловлена поперечным сдвигом,

$$\Pi_s = \frac{6}{5} \cdot \frac{Q_I^2 + Q_{II}^2}{2Gh}; \quad (24)$$

для части энергии деформации, обусловленной нормальным напряжением σ и нагрузкой q^+ и q^-

$$\begin{aligned} \Pi_n = & \frac{h}{70E} [13 (q^+)^2 (H^+)^2 + 13 (q^-)^2 (H^-)^2 + 9 q^+ q^-] + \\ & + \frac{1}{2E} [(q^+ H^+ + q^- H^-) S]. \end{aligned} \quad (25)$$

Переход от координатной системы (ξ_I, ξ_{II}, ζ) и соответствующих ей усилий и моментов к координатной системе (ξ_1, ξ_2, ζ) и соответствующим усилиям и моментам совершается при помощи зависимостей дифференциальной геометрии

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_I} = & \frac{\cos^2 \varphi}{R_{11}} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_{22}} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{R_{12}}; \\ \frac{1}{R_{II}} = & \frac{\sin^2 \varphi}{R_{11}} + \frac{\cos^2 \varphi}{R_{22}} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{R_{12}}; \\ 0 = & \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{R_{12}} \end{aligned} \quad (26)$$

и соотношений [9]

$$\begin{aligned} N_I = & N_{11} \cos^2 \varphi + N_{22} \sin^2 \varphi + (N_{12} + N_{21}) \sin \varphi \cos \varphi; \\ N_{I,II} = & (N_{22} - N_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + N_{12} \cos^2 \varphi - N_{21} \sin^2 \varphi; \\ N_{II,I} = & (N_{22} - N_{11}) \sin \varphi \cos \varphi - N_{12} \sin^2 \varphi + N_{21} \cos^2 \varphi; \\ N_{II} = & N_{11} \sin^2 \varphi + N_{22} \cos^2 \varphi - (N_{12} + N_{21}) \sin \varphi \cos \varphi; \\ Q_I = & Q_1 \cos \varphi - Q_2 \sin \varphi; \\ Q_{II} = & Q_1 \sin \varphi + Q_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (27)$$

Формулы для моментов имеют тот же вид, что и формулы для сил; φ — угол между направлениями линий ξ_I и ξ_1 . Подставив уравнения (26) и (27) в формулы (23) — (25), получим

$$\begin{aligned} \Pi_t = & \frac{1}{2Eh} \left[N_{11}^2 + N_{22}^2 + \frac{1}{2} (N_{12} + N_{21})^2 \right] + \\ & + \frac{12}{2Eh^3} \left[M_{11}^2 + M_{22}^2 + \frac{1}{2} (M_{12} + M_{21})^2 \right] + \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \times \right. \\ & \times (N_{22}M_{22} - N_{11}M_{11}) + \frac{1}{R_{12}} (N_{11} + N_{22}) (M_{12} + M_{21}) + \\ & \left. + \frac{1}{R_{12}} (M_{11} + M_{22}) (N_{12} + N_{21}) \right]; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\Pi_s = \frac{6}{5} \cdot \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{2Gh}. \quad (29)$$

Формулы (28) и (29) необходимо совпадают с формулами Рейсснера Э. Автор работы [11] допускает при использовании

формул для напряжений σ , τ_I и τ_{II} пренебрежение членами порядка h/R по сравнению с единицей, вследствие малости этих напряжений. Это правило было использовано при получении формул (25) и (29).

Потенциальная энергия деформации выражается суммой формул (25), (28) и (29)

$$P = P_t + P_s + P_n. \quad (30)$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial P}{\partial N_{11}} = \frac{1}{Eh} N_{11} + \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{22}} \right) M_{11} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_{12}} (M_{12} + M_{21}) \right]; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial P}{\partial N_{22}} = \frac{1}{Eh} N_{22} + \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) M_{22} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_{12}} (M_{12} + M_{21}) \right]; \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{\partial P}{\partial N_{12}} = \frac{\partial P}{\partial N_{21}} = \frac{1}{2Eh} (N_{12} + N_{21}) + \frac{1}{Eh} \times \\ &\quad \times \frac{1}{R_{12}} (M_{11} + M_{22}); \\ \gamma_1 &= \frac{\partial P}{\partial Q_1} = \frac{6}{5} \cdot \frac{Q_1}{Gh}; \quad \gamma_2 = \frac{\partial P}{\partial Q_2} = \frac{6}{5} \cdot \frac{Q_2}{Gh}; \\ \kappa_{11} &= \frac{\partial P}{\partial M_{11}} = \frac{12}{Eh^3} M_{11} + \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{22}} \right) N_{11} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_{12}} (N_{12} + N_{21}) \right]; \\ \kappa_{22} &= \frac{\partial P}{\partial M_{22}} = \frac{12}{Eh^3} M_{22} + \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) N_{22} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_{12}} (N_{12} + N_{21}) \right]; \\ \kappa_{12} = \kappa_{21} &= \frac{\partial P}{\partial M_{12}} = \frac{\partial P}{\partial M_{21}} = \frac{6}{Eh^3} (M_{12} + M_{21}) + \\ &\quad + \frac{1}{Eh} \cdot \frac{1}{R_{12}} (N_{11} + N_{22}). \end{aligned} \quad (31)$$

Решение системы уравнений (31) относительно сил и моментов дает нам обратную зависимость, необходимую для приведения системы статических уравнений равновесия оболочки I—VII к конкретной задаче равновесия оболочки спиральной камеры, если иметь выражения компонентов деформации и изменений кривизны ε_{11} ; ε_{22} ; $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$; κ_{11} ; κ_{22} ; $\kappa_{12} = \kappa_{21}$ через линейные перемещения u_1 ; u_2 ; w и угловые перемещения β_1 и β_2 срединной поверхности.

Приводим систему этих зависимостей:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \cdot \frac{u_2}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{w}{R_{11}} + \frac{1}{12} \cdot \frac{h^2}{R_{12}} \cdot \frac{\Omega}{\alpha_1 \alpha_2}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{u_1}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{w}{R_{22}} - \frac{1}{12} \cdot \frac{h^2}{R_{12}} \cdot \frac{\Omega}{\alpha_1 \alpha_2}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \cdot \frac{u_1}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{w}{R_{12}} - \frac{w}{\alpha_1 \alpha_2} + \\ &\quad + \frac{h^2}{24} \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \frac{\Omega}{\alpha_1 \alpha_2}; \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{u_2}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{w}{R_{12}} + \frac{w}{\alpha_1 \alpha_2} + \\ &\quad + \frac{h^2}{24} \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \frac{\Omega}{\alpha_1 \alpha_2}; \\ \kappa_{11} &= \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{R_{12}} \cdot \frac{w}{\alpha_1 \alpha_2}; \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{1}{R_{12}} \cdot \frac{w}{\alpha_1 \alpha_2}; \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{1}{R_{11}} \cdot \frac{w}{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{\Omega}{\alpha_1 \alpha_2}; \\ \kappa_{21} &= \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{R_{22}} \cdot \frac{w}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{\Omega}{\alpha_1 \alpha_2}; \\ \gamma_1 &= \beta_1 + \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{u_1}{R_{11}} - \frac{u_2}{R_{12}}; \\ \gamma_2 &= \beta_2 + \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{R_{22}} - \frac{u_1}{R_{12}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из условий симметрии $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ и $\kappa_{12} = \kappa_{21}$ существуют зависимости

$$\frac{w}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{u_2}{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \cdot \frac{u_1}{\alpha_1 \alpha_2} \right]; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{\alpha_1 \alpha_2} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{22}} \right) \frac{w}{\alpha_1 \alpha_2} + \\ &+ \left[\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1} - \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1 \alpha_2} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Для поверхности, отстоящей от срединной на расстоянии ξ , линейные перемещения вычисляются по формулам [12].

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= u_1 + s\beta_1; \quad U_2 = u_2 + s\beta_2; \\ W &= w + sw' + \frac{1}{2} s^2 w'', \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где ω' и ω'' — дополнительные компоненты поперечной нормальной деформации. Для них Нахди П. [12] дает формулы

$$\begin{aligned}\omega' &= \frac{1}{Eh} \left[\frac{6}{5} S + \frac{h}{2} (q^+ H^+ + q^- H^-) \right]; \\ \omega'' &= \frac{1}{Eh} \left[\frac{2}{7} \cdot \frac{T}{h} + \frac{9}{7} (q^+ H^+ + q^- H^-) \right]\end{aligned}\quad (36)$$

для координатной системы в линиях кривизны.

При переходе к общим ортогональным координатам величины H^+ и H^- не меняются. Если величинами S и T пренебречь, то формулы (36) получают вид

$$\begin{aligned}\omega' &= \frac{1}{2E} (q^+ H^+ + q^- H^-); \\ \omega'' &= \frac{2}{7Eh} (q^+ H^+ + q^- H^-).\end{aligned}\quad (37)$$

Из формулы [25] вытекает, что

$$\begin{aligned}w = \omega^+ + \omega^- &= \frac{\partial \Pi}{\partial q^+} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^-} = \frac{h}{70E} [26q^+ (H^+)^2 + 26q^- (H^-)^2 + \\ &+ 9q^+ + 9q^-] + \frac{1}{2E} S.\end{aligned}\quad (38)$$

Решение системы уравнений (31) определяет закон Гука для оболочки средней толщины следующими формулами:

$$\begin{aligned}N_{11} &= Eh \left[\varepsilon_{11} - \frac{h^2}{6R_{12}} \kappa_{12} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \kappa_{11} \right]; \\ N_{22} &= Eh \left[\varepsilon_{22} - \frac{h^2}{6R_{12}} \kappa_{12} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \kappa_{22} \right]; \\ N_{12} &= Eh \left\{ \varepsilon_{12} + \frac{h^2}{24} \left[\left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \kappa_{12} - \frac{\kappa_{11}}{R_{12}} \right] - \frac{h^2}{8R_{11}} \kappa_{22} \right\}; \\ N_{21} &= Eh \left\{ \varepsilon_{12} - \frac{h^2}{24} \left[\left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \kappa_{12} + \frac{\kappa_{22}}{R_{12}} \right] - \frac{h^2}{8R_{12}} \kappa_{11} \right\}; \\ M_{11} &= \frac{Eh^3}{12} \left[\kappa_{11} + \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \varepsilon_{11} - \frac{2\varepsilon_{12}}{R_{12}} \right]; \\ M_{22} &= \frac{Eh^3}{12} \left[\kappa_{22} - \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \varepsilon_{22} - \frac{2\varepsilon_{12}}{R_{12}} \right]; \\ M_{12} &= \frac{Eh^3}{12} \left[\kappa_{12} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \varepsilon_{12} - \frac{\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{22}}{2R_{12}} \right]; \\ M_{21} &= \frac{Eh^3}{12} \left[\kappa_{12} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \varepsilon_{12} - \frac{\varepsilon_{22} + 3\varepsilon_{11}}{2R_{12}} \right].\end{aligned}\quad (39)$$

Для сравнения приводим аналогичные зависимости по Новожилову В. В. [4], определенные при координатной сети в ли-

ниях главной кривизны (положив коэффициент Пуассона равным нулю):

$$\begin{aligned}N_I &= Eh\varepsilon_1; \quad N_{II} = Eh\varepsilon_2; \\ N_{I, II} &= \frac{Eh}{2} \left(\varepsilon_{12} + \frac{h^2}{6R_{II}} \kappa_{12} \right); \\ N_{II, I} &= \frac{Eh}{2} \left(\varepsilon_{12} + \frac{h^2}{6R_I} \kappa_{12} \right); \\ M_I &= \frac{Eh^3}{12} \kappa_1; \quad M_{II} = \frac{Eh^3}{12} \kappa_2; \quad M_{I, II} = M_{II, I} = \frac{Eh^3}{12} \kappa_{12}.\end{aligned}\quad (40)$$

Видно, что для совпадения системы формул (39) с системой (40) необходимо, кроме перехода от обобщенных ортогональных координат к координатам в линиях кривизны, пренебречь членами порядка h/R по сравнению с единицей. Несовпадение формул для касательных усилий $N_{12(21)}$ объясняется существованием для оболочки средней толщины в системе уравнений статики дополнительного уравнения VII.

Расчет оболочки спиральной камеры по безмоментной теории

В разделе I указывалось, что границами по координате α будут пределы $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$. Для этих пределов граничные условия сформулируем так:

$$\begin{aligned}\text{при } \alpha = 0 \ (\theta = \pi/2) \quad N_{12} &= Q_1 = u_1 = \beta_1 = 0; \\ \text{при } \alpha = -1 \ (\theta = \theta_k) \quad u_1 &= u_2 = w = 0.\end{aligned}\quad (41)$$

Граничные условия при $\alpha = 0$ определяются симметрией конструкции относительно плоскости XOY . Граничные условия при $\alpha = -1$ отвечают тому обстоятельству, что, хотя оболочка спиральной камеры имеет значительно большую жесткость, чем статор, но точка стыка оболочки и статорного кольца на линии $\alpha = -1$ не имеет возможности перемещаться по всем трем направлениям координатных осей ξ_1 , ξ_2 и ζ , сохраняя, очевидно, для края оболочки возможность некоторого поворота вокруг оси ξ_2 ($\beta_1 \neq 0$). Это объясняется симметрией линии $\alpha = -1$ (окружность) и примыкающих частей конструкции (край оболочки и кольцо статора) относительно вертикальной оси z .

Полагаем, что усилия в оболочке изменяются по закону (по Корнецкому А. Л.).

$$\begin{aligned}N_{11} &= N_{11}[\alpha, q(\beta)]; \\ N_{22} &= N_{22}[\alpha, q(\beta)]; \\ N_{12} &= kN'_{12}[\alpha, q(\beta)].\end{aligned}\quad (42)$$

Используя зависимости (11) — (19) и учитывая вытекающие из них и из формул (7) и (9) соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial \beta} &= -k \frac{q_1}{q} A \left(1 + \frac{q}{a} \sin \theta\right); \\ \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} &= \frac{1 + \sin \theta}{\varepsilon} = \frac{A}{q},\end{aligned}\quad (43)$$

подставим уравнения (42) в уравнения статики безмоментной теории. Переходя к переменным θ и β , получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{F} (N_{11} - N_{22}) + k^2 \frac{q_1}{qF} \left[2 \left(1 + \frac{q}{a} \sin \theta\right) N'_{12} + q \frac{\partial N'_{12}}{\partial q} \right] &= 0; \\ k \left[2 N'_{12} \cos \theta + (N_{11} - N_{22}) \frac{q_1}{q} \left(1 + \frac{q}{a} \sin \theta\right) + \right. & \\ \left. + \frac{F}{q} \cdot \frac{\partial N'_{12}}{\partial \theta} - q \frac{\partial N_{22}}{\partial q} \right] &= 0; \\ \frac{N_{11}}{q} + \frac{N_{22} \sin \theta}{F} = q - q \frac{h}{2} \cdot \frac{1 + 2\lambda \sin \theta}{q(1 + \lambda \sin \theta)},\end{aligned}\quad (44)$$

предполагая отсутствие нагрузки на внешней поверхности ($q^+ = 0$).

Пренебрегая, как и раньше, членами, содержащими k^2 , записываем вместо уравнений (44)

$$\begin{aligned}\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{F} (N_{11} - N_{22}) &= 0; \\ 2 \cos \theta N'_{12} + \frac{q_1}{q} \left(1 + \frac{q}{a} \sin \theta\right) (N_{11} - N_{22}) + & \\ + \frac{F}{q} \cdot \frac{\partial N'_{12}}{\partial \theta} - q_1 \frac{\partial N_{22}}{\partial q} &= 0; \\ \frac{N_{11}}{q} + \frac{\sin \theta}{F} N_{22} = q - q \frac{h}{2} \cdot \frac{1 + 2\lambda \sin \theta}{q(1 + \lambda \sin \theta)}.\end{aligned}\quad (45)$$

Первое и третье уравнения системы (45) совпадают (формально) с уравнениями безмоментной торообразной оболочки, нагруженной внутренним давлением q . Их решения имеют вид

$$\begin{aligned}N_{11} &= \frac{qQ}{2} \cdot \frac{2 + \lambda \sin \theta}{1 + \lambda \sin \theta} - q \frac{h}{2}; \\ N_{22} &= \frac{qQ}{2} - \frac{qh}{2}.\end{aligned}\quad (46)$$

Подставив уравнения (46) во второе уравнение системы (45), получим уравнение

$$2 \cos \theta N'_{12} + \frac{F}{q} \cdot \frac{dN'_{12}}{d\theta} + q \frac{q_1}{2} \cdot \frac{qr}{aR} \cdot \frac{\sin \theta}{1 + \lambda \sin \theta} = 0 \quad (47)$$

и по его решению напишем

$$N_{12} = kq \frac{Q}{2} \cdot \frac{rQ_1}{(r+a)^2} \cdot \frac{q}{a} \cdot \frac{\cos \theta}{(1 + \lambda \sin \theta)^2} + N'_{12}.\quad (48)$$

В силу граничных условий $N'_{12} = 0$. Величину N_{12} можно определить, как

$$N_{12} = kq \frac{Q}{2} \cdot \frac{rQ_1}{(r+a)^2} \cdot \frac{1}{\sin \theta_K} \cdot \frac{\cos \theta}{(1 + \lambda \sin \theta)^2}.\quad (49)$$

Видно, что если положить $k = 0$, то система уравнений (44) и (45) переходит в систему уравнений статики торообразной оболочки, замкнутой относительно координаты β . Это указывает на непротиворечивость условиям задачи принятого положения [42].

Таким образом, оказывается, что изменяемость радиуса сечения q вызывает появление касательных усилий N_{12} , представляющих дополнительные для усилий N_{11} и N_{22} , существующих в торообразной безмоментной оболочке.

А. Л. Корнецкий указывает, что отношение $|N_{12}|/qQ \approx 0,20$, а пренебрежение членами, содержащими k^2 , вносит погрешность $< 4\%$ относительно действующей нагрузки q .

Расчет оболочки спиральной камеры по моментной теории

Используя полученные ранее геометрические характеристики поверхности (11) и (16) — (19), приводим систему уравнений (32) к выражению конкретной задачи — системе зависимостей эффективных деформаций и изменений кривизны от линейных и угловых перемещений для оболочки спиральной камеры.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= -k \frac{q_1}{qR} \cdot \frac{1 + \frac{q}{a} \sin \theta}{1 + \lambda \sin \theta} u_2 - \frac{\alpha}{q \cos \theta} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{\omega}{q}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{\cos \theta}{R(1 + \lambda \sin \theta)} u_1 + \\ &+ \frac{\sin \theta}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \omega; \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= k \frac{q_1}{2qR} \cdot \frac{1 + \frac{q}{a} \sin \theta}{1 + \lambda \sin \theta} u_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \\ &- \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{q \cos \theta} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \theta}{R(1 + \lambda \sin \theta)} u_2 + k \frac{rQ_1 \cos \theta}{aR^2(1 + \lambda \sin \theta)^2} \omega;\end{aligned}\quad (50)$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{11} &= -k \frac{q_1}{qR} \cdot \frac{1 + \frac{q}{a} \sin \theta}{1 + \lambda \sin \theta} \beta_2 - \frac{a}{q \cos \theta} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_1}; \\
\kappa_{22} &= \frac{1}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2} + \frac{\cos \theta}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \beta_1; \\
\kappa_{12} &= \frac{1}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_2} - \frac{\cos \theta}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \beta_2; \\
\kappa_{21} &= k \frac{q_1}{qR} \cdot \frac{1 + \frac{q}{a} \sin \theta}{1 + \lambda \sin \theta} \beta_1 - \frac{a}{q \cos \theta} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1}; \\
\gamma_1 &= \beta_1 - \frac{u_1}{q} - \frac{a}{q \cos \theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - k \frac{r q_1}{a R^2} \cdot \frac{\cos \theta}{(1 + \lambda \sin \theta)^2} u_2; \\
\gamma_2 &= \beta_2 - \frac{\sin \theta}{R(1 + \lambda \sin \theta)} u_2 + \frac{1}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \\
&\quad - k \frac{r q_1}{a R^2} \cdot \frac{\cos \theta}{(1 + \lambda \sin \theta)^2} u_1.
\end{aligned}$$

В силу условия $\kappa_{12} = \kappa_{21}$, можно написать

$$\begin{aligned}
\kappa_{12} = \kappa_{21} &= \frac{1}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_2} - \frac{\cos \theta}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \beta_2 - \\
&= k \frac{q_1}{qR} \cdot \frac{1 + \frac{q}{a} \sin \theta}{1 + \lambda \sin \theta} \beta_1 - \frac{a}{q \cos \theta} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \theta}{R(1 + \lambda \sin \theta)} \beta_2 + \\
&\quad + k \frac{q_1}{2qR} \cdot \frac{1 + \frac{q}{a} \sin \theta}{1 + \lambda \sin \theta} \beta_1 - \frac{a}{2q \cos \theta} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_2} - k \frac{q_1}{q} \left(1 + \frac{q}{a} \sin \theta\right) \beta_1 &= \beta_2 \cos \theta + \\
&\quad + \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{1 + \lambda \sin \theta}{1 + \sin \theta} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_1}
\end{aligned} \quad (51)$$

выражает зависимость между β_1 и β_2 , носящую чисто геометрический характер.

Система уравнений (50) получена при пренебрежении величинами

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12} \cdot \frac{h^2}{R_{12}} \cdot \frac{\Omega}{\alpha_1 \alpha_2}; \quad \frac{h^2}{24} \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \cdot \frac{\Omega}{\alpha_1 \alpha_2}; \\
\frac{1}{12} \cdot \frac{\omega}{\alpha_1 \alpha_2}; \quad \frac{1}{R_{11}} \cdot \frac{\omega}{\alpha_1 \alpha_2}; \quad \frac{1}{R_{22}} \cdot \frac{\omega}{\alpha_1 \alpha_2} \quad \text{и} \\
\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{22}} \right) \cdot \frac{\omega}{\alpha_1 \alpha_2}.
\end{aligned}$$

Отметим, что в силу определенных выше конструктивных особенностей оболочки спиральной камеры при формулировании граничных условий на границе $\alpha = -1$ изгибающий момент M_{11} необходимо положить равным моменту в статоре, либо равным нулю, т. е. $M_{11} = M_{cm}$ или $M_{11} = 0$. Второе соответствует шарнирным условиям опирания.

Система семи уравнений равновесия оболочки I—VII в совокупности с системами уравнений (39) и (50) полностью охватывает задачу расчета оболочки спиральной камеры. После перехода к переменным θ и β , полагая

$$\begin{aligned}
N_{ii} &= N_{ii}[\alpha, q(\beta)]; \quad N_{ik} = k N'_{ik}[\alpha, q(\beta)]; \\
M_{ii} &= M_{ii}[\alpha, q(\beta)]; \quad M_{ik} = k M'_{ik}[\alpha, q(\beta)],
\end{aligned} \quad (52)$$

где $i = 1; 2, k = 2; 1$;

$$\begin{aligned}
Q_1 &= Q_1[\alpha, q(\beta)]; \quad Q_2 = k Q_2[\alpha, q(\beta)]; \\
u_1 &= u_1[\alpha, q(\beta)]; \quad u_2 = k u'_2[\alpha, q(\beta)]; \\
w &= w[\alpha, q(\beta)],
\end{aligned} \quad (53)$$

получим систему уравнений равновесия в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{q}{F} \cos \theta (N_{11} - N_{22}) + \frac{\partial N_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{F} \cos \theta (M_{11} - M_{22}) + \\
+ \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta} = 0;
\end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
k \left\{ \cos \theta (N'_{12} + N'_{21}) - \frac{B_1}{q} (N_{22} - N_{11}) + \frac{F}{q} \cdot \frac{\partial N'_{12}}{\partial \theta} - \right. \\
\left. - q_1 \frac{\partial N_{22}}{\partial q} + \frac{r q_1}{a F} \cos \theta Q_1 + \sin \theta Q_2 \right\} = 0,
\end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
N_{11} + \frac{q}{F} \sin \theta N_{22} + \frac{1}{F} \sin \theta (M_{11} - M_{22}) - \frac{2}{F} \cos \theta \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta} + \\
+ \frac{1}{F} \cos \theta \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} - \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial \theta^2} = \\
= q q - q \frac{h}{2} \cdot \frac{1 + 2\lambda \sin \theta}{1 + \lambda \sin \theta};
\end{aligned} \quad (56)$$

$$Q_1 = \frac{1}{F} \cos \theta (M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta}; \quad (57)$$

$$\begin{aligned}
Q_2 = k Q'_2 = k \left\{ \frac{1}{F} \cos \theta (M'_{12} + M'_{21}) + \right. \\
\left. + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial M'_{12}}{\partial \theta} - \frac{B_1}{q F} (M_{22} - M_{11}) - \frac{q_1}{F} \cdot \frac{\partial M_{22}}{\partial q} \right\}.
\end{aligned} \quad (58)$$

Применяя условия (53) для эффективных деформаций и изменений кривизны и переходя к переменным θ и β , получим вместо системы уравнений (50) следующую систему:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{1}{q} w; \quad (59)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{F} \cos \theta u_1 + \frac{1}{F} \sin \theta w; \quad (60)$$

$$\varepsilon_{12} = k \left\{ \frac{B_1}{2qF} u_1 - \frac{q_1}{2F} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial q} + \frac{1}{2q} \cdot \frac{\partial u_2'}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2F} \cos \theta u_2' + \frac{r q_1}{a F^2} \cos \theta w \right\}; \quad (61)$$

$$\kappa_{11} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta}; \quad (62)$$

$$\kappa_{22} = \frac{1}{F} \cos \theta \beta_1; \quad (63)$$

$$\kappa_{12} = k \left\{ \frac{B_1}{2qF} \beta_1 - \frac{q_1}{2F} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial q} - \frac{1}{2F} \cdot \cos \theta \beta_2' + \frac{1}{2q} \cdot \frac{\partial \beta_2'}{\partial \theta} \right\}; \quad (64)$$

$$\gamma_1 = \beta_1 - \frac{1}{q} u_1 + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}; \quad (65)$$

$$\gamma_2 = k \left\{ \beta_2' - \frac{1}{F} \sin \theta u_2' - \frac{q_1}{F} \cdot \frac{\partial w}{\partial q} - \frac{r q_1}{a F^2} \cos \theta u_1 \right\}. \quad (66)$$

Дифференциальное уравнение (51) преобразуется в уравнение

$$\cos \theta \beta_2' + \frac{F}{q} \cdot \frac{\partial \beta_2'}{\partial \theta} + q_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial q} + \frac{B_1}{q} \beta_1 = 0. \quad (67)$$

Если положить $k = 0$, то система уравнений (54) — (58) преобразуется в систему уравнений равновесия торообразной оболочки. Это обстоятельство указывает на то, что уравнения (54), (56) и (57) можно решать как для торообразной оболочки.

Решение этих уравнений дается многими авторами (В. В. Новожилов, С. А. Тумаркин и др.). Полученное таким образом решение позволит определить все остальные неизвестные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. «Высшая школа», 1961.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. Грановский С. А. и др. Конструкции гидротурбин и расчет их деталей. Машгиз, 1956.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1962.

5. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. Гостехиздат, 1956.

6. Сыроежкин М. И. Железобетонные спиральные камеры кольцевого сечения. «Энергомашиностроение», 1959, № 10.

7. Трайбер Ф. и Гзентер А. Сооружение промежуточного водохранилища на шестой ступени подпора Дорнау гидроузла Лех (ФРГ). — «Der Bauingenieur», 1961, № 11, 12.

8. Фёппль А., Фёппль Л. Сила и деформация. Т. I. Пер. с нем., Гостройиздат, 1933.

9. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. Пер. с нем., Госстройиздат, 1961.

10. Чернина В. С. Напряженное состояние торообразной оболочки средней толщины. Известия АН СССР, ОТН. — «Механика и машиностроение», 1959, № 3.

11. Reissner E. On some problems in shell theory structural Mechanics Proc of the First Symp on Naval struct Mech stanford University. 1958, № 11—14.

12. Naghdi P. On the theory of thin elastic shells. Quart. Appl. Math v. XIV. 1957, № 4.

Канд. техн. наук КАСАБЬЯН Л. В.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СПИРАЛЬНЫХ КАМЕР ВЫСОКОНАПОРНЫХ ГЭС

Развитие гидротехнического строительства в последнее время идет по пути создания агрегатов большой мощности при высоких напорах порядка 100—200 м, что обеспечивает высокую экономичность гидростанций. Если единичная мощность агрегатов Братской ГЭС составляет 225 тыс. кВт. при напоре 100 м, то для агрегатов Красноярской ГЭС принята единичная мощность 500 тыс. кВт при том же напоре. Еще большие мощности и напоры намечаются для Саянской, Нижне-Ленской и других ГЭС.

Создание таких агрегатов встречает большие затруднения в части изготовления спиральных камер. Применение для оболочки спиральной камеры обычных низкоуглеродистых сталей исключается, так как необходимая толщина стального листа порядка 80—100 мм значительно превышает толщину проката, а переход к высокопрочным никелесодержащим сталям связан с трудностями их сварки в условиях строительной площадки. Кроме того, легированные стали являются остродефицитными.

В настоящее время рядом научно-исследовательских и проектных институтов совместно с машиностроительными заводами ведутся работы по созданию спиральных камер гидротурбин с принципиально новыми конструктивными решениями.

Основным направлением этих работ является стремление обеспечить совместную работу металлической оболочки спиральной камеры с бетоном агрегатного блока. Такое решение, в частности, было принято в осуществленных спиральных камерах Братской ГЭС, где совместная работа бетона агрегатного блока с металлической оболочкой спирали в околостаторной зоне достигается удалением войлочной прокладки. Одним из возможных конструктивных решений спиральной камеры является железобетонная спиральная камера круглого поперечного сечения с обычной или предварительно напряженной арматурой.

Экспериментальные исследования моделей металлических спиральных камер, проведенные ВНИИГ им. Веденеева и Ленинградским металлическим заводом им. XII съезда КПСС, выявили

значительные пики напряжений в зоне заделки оболочки спирали в статор. Это объясняется тем, что жесткость металлической оболочки значительно меньше жесткости статора, и при таком соотношении жесткостей в сильной степени сказывается влияние краевого эффекта.

Поскольку жесткость толстостенной железобетонной оболочки значительно больше жесткости статора, то, очевидно, влияние краевого эффекта будет весьма незначительным. Поэтому в конструкциях железобетонных спиральных камер трудность обеспечения прочности околостаторной зоны должна быть исключена.

Существующая методика расчета металлических спиральных камер

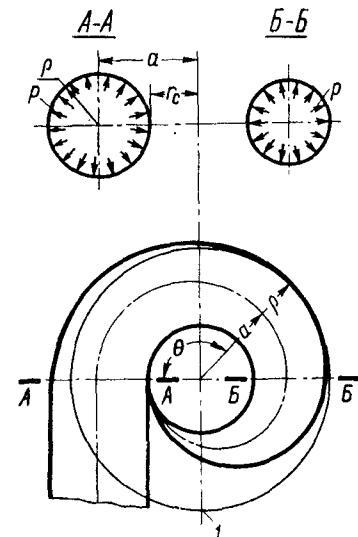
Спиральная камера представляет собой неправильную торообразную оболочку. Расчет такой оболочки является сложной математической задачей, отыскание точного решения которой в настоящее время весьма затруднительно и вряд ли целесообразно. Поэтому при решении ее в качестве расчетной схемы (фиг. 1) принимается для каждого сечения торообразная оболочка, находящаяся под действием внутреннего давления, интенсивностью p кг/см².

Металлические спиральные камеры рассчитываются с помощью простых формул, получающихся главным образом на основе использования зависимостей безмоментной теории оболочек вращения. При этом меридиональные напряжения σ_φ торообразной оболочки толщиной t и радиусом поперечного сечения q выражаются через напряжения $\sigma_\varphi^0 = \frac{pq}{t}$ для тонкой цилиндрической оболочки по «котельной» формуле путем умножения их на коэффициент K , учитывающий отличие напряженного состояния тора от напряженного состояния цилиндра:

$$\sigma_\varphi = \sigma_\varphi^0 K. \quad (1)$$

Для круглых сечений

$$K = K_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + \frac{q}{a} \sin \varphi}{1 + \frac{q}{a} \sin \varphi}, \quad (2)$$



Фиг. 1. Расчетная схема спиральной камеры:

1 — контур тора, заменяющего спираль в расчетной схеме.

где a — расстояние от оси вращения до центра поперечного сечения тора;

φ — угол, отсчитываемый от вертикального диаметра поперечного сечения тора и считающийся положительным в направлении от статора к внешней части тора.

Напряжения в местах заделки звеньев спиральной камеры в статор определяются с помощью коэффициента $K = K_1$, полученного приближенным решением по моментной теории

$$K = K_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{a}{r_c} \right) + \sqrt{\frac{3}{1-\mu^2}} \left[(1-\mu) - \mu \frac{a}{r_c} \right] \right\}, \quad (3)$$

где r_c — расстояние от оси вращения до места заделки спирали в статор;

μ — коэффициент Пуассона.

Для металлических спиральных камер ($\mu = 0,3$) значение коэффициента K_1 определяется формулой

$$K_1 = 1,135 + 0,228 \frac{a}{r_c}. \quad (4)$$

Тангенциальные напряжения σ_θ на основе безмоментной теории тонких торообразных оболочек получаются постоянными по величине и равными соответствующим напряжениям в цилиндрической оболочке:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2} \sigma_\varphi^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p q}{t}. \quad (5)$$

В случае значительной толщины оболочки спиральной камеры в выражения для коэффициента K вводится уточненное значение радиуса

$$q' = q + \frac{t}{2}. \quad (6)$$

Указанными формулами можно пользоваться также и для приближенной оценки напряженного состояния железобетонных спиральных камер круглого сечения. Однако следует иметь в виду, что при значительной толщине оболочки будет иметь место внецентренное растяжение, т. е. напряжения по толщине оболочки будут распределяться неравномерно. Поэтому уточнение расчета необходимо провести, в первую очередь, в направлении более точного учета влияния толщины оболочки на распределение напряжений.

Уточнение расчетных формул для определения меридиональных напряжений на основе использования решения Ламе

Анализ выражения (2) для коэффициента K , учитывающего отличие напряженного состояния тора от напряженного состояния цилиндра, показывает, что величина его зависит от соотношения между радиусом меридионального сечения оболочки q

и расстоянием a от оси вращения до центра поперечного сечения. Очевидно, что с достаточной точностью приближения значение этого коэффициента может быть принято и для расчета толстых оболочек с учетом поправки (6):

$$K_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + \frac{q'}{a} \sin \varphi}{1 + \frac{q'}{a} \sin \varphi}. \quad (7)$$

Так как в толстой оболочке распределение напряжений по толщине неравномерно, то значение напряжений σ_φ^0 в этом случае более правильным будет определять не по «котельным» формулам, годным для тонких металлических оболочек, а на основе решения Ламе для толстых цилиндров, находящихся под действием внутреннего давления:

$$\sigma_\varphi^0 = p \frac{q^2}{R^2 - q^2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right), \quad (8)$$

где R — наружный радиус меридионального сечения оболочки;
 r — расстояние от центра поперечного сечения до точки, в которой определяется напряжение.

Тогда для волокон, находящихся на внутренней поверхности сечения ($r = q$), будем иметь

$$\sigma_\varphi = p \frac{R^2 + q^2}{R^2 - q^2} K_3, \quad (9)$$

а для волокон, находящихся на внешней поверхности ($r = R$)

$$\sigma_\varphi = p \frac{2q^2}{R^2 - q^2} K_3. \quad (10)$$

Значение тангенциальных напряжений σ_θ определяется, как и в случае тонкой оболочки, из выражения (5).

Приближенный метод расчета толстой торообразной оболочки, находящейся под действием внутреннего давления

Основным недостатком приведенных формул для расчета торообразных оболочек является то, что они не позволяют установить закон распределения тангенциальных напряжений в поперечном сечении спиральной камеры, так как эти напряжения, как и в обычном цилиндре, считаются равномерно распределенными по сечению. Для металлических спиральных камер этот фактор не играет существенной роли, поскольку подбор толщины оболочки производится по меридиональным напряжениям, величина которых примерно вдвое больше тангенциальных.

В железобетонных спиральных камерах закон распределения тангенциальных напряжений влияет на характер армирования конструкции, а поэтому возникает необходимость уточнения расчета.

Вырежем из толстостенной торообразной оболочки бесконечно малый элемент, образованный углами $d\varphi$ (фиг. 2, а) и $d\theta$ (фиг. 2, б) и поверхностями, отстоящими от центра сечения на расстояниях r_1 и $r_1 + dr_1$. Введем предположение, что перекоса элемента не происходит и по его граням действуют только нормальные напряжения σ_r , σ_φ и σ_θ , причем тангенциальное напряжение σ_θ не зависит от угла θ , определяющего положение сечения тора.

Между радиусами кривизны r_1 и r_2 торообразной оболочки существует зависимость

$$r_2 = \frac{a}{\sin \varphi} + r_1, \quad (11)$$

из которой следует, что $\frac{dr_2}{dr_1} = \frac{dr_1}{dr_1} = 1$, т. е. $dr_2 = dr_1$.

Для упрощения дальнейших записей отбросим индекс у радиуса кривизны r_1 . Тогда будем иметь

$$dr_2 = dr_1 = dr. \quad (12)$$

Составим условие равновесия элемента тора, спроектировав все силы на направление радиуса r :

$$\begin{aligned} & (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi(r_2 + dr)d\theta - \\ & - \sigma_r r d\varphi r_2 d\theta - (\sigma_\varphi + d\sigma_\varphi)\left(r_2 + \frac{dr}{2}\right) dr d\theta \frac{d\varphi}{2} - \\ & - \sigma_\varphi dr \left(r_2 + \frac{dr}{2}\right) d\theta \frac{d\varphi}{2} - 2\sigma_\theta dr \left(r + \frac{dr}{2}\right) d\varphi \frac{d\theta}{2} = 0. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов, сокращения на общий множитель $d\varphi d\theta$ и пренебрежения малыми величинами высших порядков будем иметь

$$d\sigma_r r r_2 + \sigma_r dr(r_2 + r) - \sigma_\varphi drr_2 - \sigma_\theta drr = 0$$

или

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{1}{r_2}(\sigma_r - \sigma_\theta). \quad (13)$$

Полученное выражение является условием равновесия бесконечно малого элемента торообразной оболочки. Нетрудно заме-

тить, что при $r_2 \rightarrow \infty$ это выражение превращается в условие равновесия толстостенного цилиндра:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad (14)$$

а при $r_2 = r$ получается условие равновесия толстостенной сферической оболочки:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad (15)$$

где меридиональное напряжение σ_φ равно тангенциальному σ_θ .

Поскольку уравнение (13) содержит три неизвестных величины σ_r , σ_φ и σ_θ , то для решения его необходимо составить условия совместности деформаций. Будем считать, что грани элемента, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации, т. е. перемещение всех точек элемента определяется величиной радиального перемещения U точек внутренней поверхности элемента (фиг. 3). Точки внешней поверхности элемента перемещаются в радиальном направлении на величину $U + dU$, а толщина элемента изменяется на dU .

Тогда относительная радиальная деформация будет

$$\varepsilon_r = \frac{dU}{dr}.$$

Фиг. 3. Деформации бесконечно малого элемента тора.

В меридиональном направлении относительная деформация элемента ε_φ определяется относительной деформацией дуги AA_1 , которая в деформированном состоянии займет положение $A'A_1$; при этом $\varepsilon_\varphi = \frac{U}{r}$. Аналогично получается величина относительной деформации в тангенциальном направлении. Эта деформация равна $\varepsilon_\theta = \frac{U}{r_2}$.

Выразим относительные деформации через напряжения по закону Гука:

$$\varepsilon_r = \frac{dU}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\varphi - \mu\sigma_\theta); \quad (16)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{U}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \mu\sigma_r - \mu\sigma_\theta). \quad (17)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r_2} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r - \mu\sigma_\varphi). \quad (18)$$

Полученные выражения совместно с уравнением равновесия позволяют найти четыре неизвестных величины: σ_r , σ_φ , σ_θ и U . Исключим из уравнений величины напряжений и получим дифференциальное уравнение для определения перемещения U .

Для этого возьмем σ_θ из выражения (17), выразим:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\mu} \sigma_\varphi - \sigma_r - \frac{EU}{\mu r} \quad (19)$$

и подставим полученное значение σ_θ в уравнение (16):

$$\frac{dU}{dr} = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \mu \sigma_\varphi - \sigma_\varphi + \mu \sigma_r + \frac{EU}{r} \right)$$

или

$$\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} = \frac{1+\mu}{E} (\sigma_r - \sigma_\varphi). \quad (20)$$

Подстановка значения σ_θ из уравнения (19) в уравнение (18) дает

$$\frac{U}{r_2} = \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma_\varphi}{\mu} - \sigma_r - \frac{UE}{\mu r} - \mu \sigma_r - \mu \sigma_\varphi \right)$$

или

$$\frac{U(\mu r + r_2)}{\mu r r_2} = \frac{1+\mu}{E} \left[-\frac{(1-\mu)}{\mu} \sigma_\varphi - \sigma_r \right]. \quad (21)$$

Сложив левые и правые части выражений (20) и (21), исключим из них напряжения σ_r :

$$\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} + \frac{U(\mu r + r_2)}{\mu r r_2} = \frac{1+\mu}{E} \left[\frac{(1-\mu)}{\mu} \sigma_\varphi - \sigma_\varphi \right],$$

откуда

$$\sigma_\varphi = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\frac{\mu(r-r_2)+r_2}{\mu r r_2} U + \frac{dU}{dr} \right]. \quad (22)$$

Подставив полученное значение σ_φ из уравнения (22) в уравнение (20), получим выражение для определения σ_r :

$$\sigma_r = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\frac{(1-\mu)}{\mu} \cdot \frac{dU}{dr} + \frac{r+r_2}{r r_2} U \right]. \quad (23)$$

Найдем значение $\frac{d\sigma_r}{dr}$, продифференцировав выражение (23):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} & \left[\frac{(1-\mu)}{\mu} \cdot \frac{d^2U}{dr^2} + \right. \\ & \left. + \frac{r+r_2}{r r_2} \frac{dU}{dr} - \frac{r^2+r_2^2}{r^2 r_2^2} U \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Выражение для σ_θ получим, подставив значения σ_φ и σ_r из уравнений (22) и (23) в уравнение (19):

$$\sigma_\theta = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\frac{dU}{dr} + \frac{\mu(r_2-r)+r}{\mu r_2 r} U \right]. \quad (25)$$

Таким образом, с помощью зависимостей (22), (23) и (25) можно определить напряжения σ_r , σ_φ и σ_θ , если известно перемещение U . Для определения U необходимо исключить значения напряжений и производной от радиального напряжения из уравнения равновесия (13). После соответствующих подстановок и преобразований получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{r+r_2}{r r_2} \frac{dU}{dr} - \frac{r^2+r_2^2}{r^2 r_2^2} U = 0. \quad (26)$$

Таким образом, для определения U получили обыкновенное, линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Если использовать зависимость (11) между радиусами кривизны торообразной оболочки, то получим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{a+2r \sin \varphi}{r(a+r \sin \varphi)} \cdot \frac{dU}{dr} - \\ - \frac{a^2+2r(a+r \sin \varphi) \sin \varphi}{r^2(a+r \sin \varphi)^2} U = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Это уравнение при $a \rightarrow \infty$ превращается в дифференциальное уравнение Эйлера второго порядка для толстостенного цилиндра:

$$r^2 \frac{d^2U}{dr^2} + r \frac{dU}{dr} - U = 0, \quad (28)$$

а при $a = 0$ получается уравнение

$$r^2 \frac{d^2U}{dr^2} + 2r \frac{dU}{dr} - 2U = 0, \quad (29)$$

аналогичное уравнению (28) и описывающее напряженное состояние толстостенной сферической оболочки.

Таким образом, для получения выражений, определяющих напряжения σ_r , σ_φ и σ_θ , необходимо найти решение дифференциального уравнения (27) и удовлетворить полученное решение условиям на поверхности оболочки. Эти условия в случае оболочки, находящейся под действием внутреннего давления p , будут

$$\text{при } r = 0, \quad \sigma_r = -p; \quad (30)$$

$$\text{при } r = R \quad \sigma_r = 0. \quad (31)$$

Значения σ_r могут быть найдены из дифференциальной зависимости (23), если известно выражение для U , полученное из уравнения (27) с точностью до двух постоянных интегрирования.

Дифференциальное уравнение (27) для определения радиального перемещения U можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & r^2 (a^2 + 2ar \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) \frac{d^2 U}{dr^2} + \\ & + r (a^2 + 3ar \sin \varphi + 2r^2 \sin^2 \varphi) \frac{dU}{dr} - \\ & - (a^2 + 2ar \sin \varphi + 2r^2 \sin^2 \varphi) U = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

т. е. в виде линейного однородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, представляющими собой многочлены степеней r .

Решение такого дифференциального уравнения может быть представлено в виде обобщенного степенного ряда

$$U = r^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n, \quad (33)$$

где C_n — постоянные, которые могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов;

λ — корни определяющего уравнения, равные для данного уравнения ± 1 .

Первое решение дифференциального уравнения при $\lambda_1 = 1$ получается в виде ряда

$$U_1 = C_1 r - C_1 \frac{\sin \varphi}{3a} r^2 + C_1 \frac{\sin^2 \varphi}{3a^2} r^3 - \dots \quad (34)$$

или

$$U_1 = C_1 r \left[1 - \frac{r \sin \varphi}{3a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\sin \varphi}{a} r \right)^n \right]. \quad (35)$$

Нетрудно заметить, что при $\frac{r}{a} < 1$, как это имеет место в спиральных камерах, ряд, входящий в выражение (35), является биномиальным рядом и суммируется в функцию

$$\left(1 + \frac{\sin \varphi}{a} r \right)^{-1}. \quad (36)$$

После подстановки этой функции в выражение (35) получается окончательное выражение для U в замкнутом виде, являющееся первым решением дифференциального уравнения (32), соответствующим корню определяющего уравнения $\lambda_1 = 1$:

$$U_1 = C_1 \frac{3a + 2r \sin \varphi}{a + r \sin \varphi} r. \quad (37)$$

Используя второе значение корня определяющего уравнения $\lambda_2 = -1$, можно получить еще одно решение дифференциального уравнения в виде ряда

$$U_2 = C_2 r^{-1} \left(1 - \frac{\sin \varphi}{a} r + \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} r^2 - \dots \right), \quad (38)$$

который также при $\frac{r}{a} < 1$ суммируется и дает второе решение уравнения в замкнутом виде

$$U_2 = C_2 \frac{1}{r(a + r \sin \varphi)}. \quad (39)$$

Это же выражение получается, если воспользоваться для отыскания второго решения из первого формулой Лиувилля.

Подстановка полученных решений в уравнение (32) показывает, что они удовлетворяют исходному дифференциальному уравнению.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$U = C_1 \frac{3a + 2r \sin \varphi}{a + r \sin \varphi} r + C_2 \frac{1}{r(a + r \sin \varphi)}. \quad (40)$$

Продифференцировав полученное выражение по r , получим значение производной

$$\frac{dU}{dr} = C_1 \frac{2(a + r \sin \varphi)^2 + a^2}{(a + r \sin \varphi)^2} + C_2 \frac{a + 2r \sin \varphi}{r^2 (a + r \sin \varphi)^2}. \quad (41)$$

Значения постоянных C_1 и C_2 можно определить из граничных условий на поверхности оболочки по формулам (30) и (31) с помощью выражения

$$\sigma_r = E_1 \left[(1 - \mu) \frac{dU}{dr} + \mu \frac{a + 2r \sin \varphi}{r(a + r \sin \varphi)} U \right], \quad (42)$$

получающегося из формулы (23) при подстановке в нее r_2 из уравнения (11) и введении обозначения

$$E_1 = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}. \quad (43)$$

Подставив в выражение (42) значения U из уравнения (40) и производной $\frac{dU}{dr}$ из уравнения (41), получим выражение для радиальных напряжений в следующем виде:

$$\sigma_r = \frac{E_1}{(a + r \sin \varphi)^2} \left[C_1 \Phi(r) + C_2 \frac{1 - 2\mu}{r^2} (a + 2r \sin \varphi) \right], \quad (44)$$

где

$$\Phi(r) = 3a^2 + 2(1 + \mu)r \sin \varphi (2a + r \sin \varphi). \quad (45)$$

Использование условий на поверхности дает формулы для определения постоянных C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{p}{E_1} \cdot \frac{(a + q \sin \varphi)^2}{q^2 \cdot \frac{R^2}{a + 2q \sin \varphi} \Phi(R) - \Phi(q)}; \quad (46)$$

$$C_2 = C_1 \frac{R^2 \Phi(R)}{(1 - 2\mu)(a + 2R \sin \varphi)}, \quad (47)$$

где $\Phi(R)$ и $\Phi(q)$ — значения функции (45) при $r = R$ и $r = q$. Из структуры формулы (46) вытекает, что при $2R \sin \varphi = -a$ постоянная C_1 обращается в ноль, а значение C_2 в формуле (47) становится неопределенным. Если избавиться от неопределенности, то получим выражение для C_2 в следующем виде:

$$C_2 = \frac{p}{E_1} \cdot \frac{(a + q \sin \varphi)^2 q^2}{(1 - 2\mu)(a + 2q \sin \varphi)}. \quad (48)$$

Значение угла φ , при котором коэффициент C_1 обращается в ноль, для натуральных размеров спиральных камер колеблется от -65° до -75° .

Наиболее простой вид формулы для определения постоянных C_1 и C_2 имеют для точек, расположенных на вертикальном диаметре поперечного сечения ($\varphi = 0$):

$$C_1 = \frac{p}{E_1} \cdot \frac{q^2}{3(R^2 - q^2)}; \quad (49)$$

$$C_2 = \frac{p}{E(1 - 2\mu)} \cdot \frac{R^2 q^2 a}{(R^2 - q^2)}. \quad (50)$$

Формулы для определения меридиональных и тангенциальных напряжений можно получить, если представить уравнения (22) и (25) в виде

$$\sigma_\varphi = E_1 \left[\frac{a(1 - \mu) + r \sin \varphi}{r(a + r \sin \varphi)} U + \mu \frac{dU}{dr} \right]; \quad (51)$$

$$\sigma_\theta = E_1 \left[\frac{\mu a + r \sin \varphi}{a + r \sin \varphi} U + \mu \frac{dU}{dr} \right] \quad (52)$$

и подставить в них значения U и ее производной из уравнений (40) и (41). Окончательно получим

$$\sigma_\varphi = \frac{E_1}{(a + r \sin \varphi)} \left\{ C_1 [3a + 2(1 + \mu)r \sin \varphi] + C_2 \frac{1 - 2\mu}{r^2} \right\}; \quad (53)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_1}{(a + r \sin \varphi)^2} \left\{ C_1 [2\mu(3a^2 + 3ar \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) + (3a + 2r \sin \varphi)r \sin \varphi] + C_2 \frac{1 - 2\mu}{r} \sin \varphi \right\}. \quad (54)$$

Для точек вертикального диаметра поперечного сечения спиральной камеры формулы значительно упрощаются:

$$\sigma_r = p \frac{q^2}{R^2 - q^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right); \quad (55)$$

$$\sigma_\varphi = p \frac{q^2}{R^2 - q^2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right); \quad (56)$$

$$\sigma_\theta = p \frac{q^2}{R^2 - q^2} 2\mu. \quad (57)$$

Нетрудно заметить, что выражения (55) и (56) в точности совпадают с формулами Ламе для радиальных и меридиональных напряжений в толстостенном цилиндре. На этом основании можно сделать вывод о том, что введение формул Ламе в решение безмоментной теории тора дает возможность более правильно отразить напряженное состояние толстостенной торообразной оболочки.

Из выражений (49) и (50) видно, что коэффициент C_1 учитывает влияние толщины оболочки, а коэффициент C_2 — влияние радиуса вращения a оболочки на величину нормальных напряжений.

С помощью полученных формул можно сравнительно просто произвести расчет оболочки в табличной форме.

Рассмотрим пример расчета модели круглой железобетонной спиральной камеры масштаба 1 : 10 применительно к параметрам гидротурбины Красноярской ГЭС. Напряжения вычислим для сечения со следующими расчетными данными: $a = 101,0$ см; $q = 42,5$ см; $R = 54,5$ см и $\mu = 0,15$. Напряжения будем определять в точках поперечного сечения с величинами углов φ : 90° ; 45° ; 0° ; -30° ; -50° и -70° .

Расчет производится в следующем порядке: по формуле (45) находят значения $\Phi(R)$ и $\Phi(q)$, после чего из выражений (46) и (47) определяют коэффициенты C_1 и C_2 , имея которые по формулам (53) и (54) можно вычислить значения меридиональных и тангенциальных напряжений. Значения функций $\Phi(R)$ и $\Phi(q)$, коэффициентов C_1 и C_2 и напряжений σ_φ и σ_θ для указанных точек поперечного сечения приведены в табл. 1.

Построенная по результатам расчета эпюра меридиональных напряжений приведена на фиг. 4, а. Для сопоставления полученных значений напряжений (2 — прерывистая линия и ординаты в скобках) показана эпюра, получающаяся при использовании формул Ламе в решении для безмоментной торообразной оболочки (8). Как видно из сопоставления эпюр, они очень близко совпадают во внешней части оболочки до зоны вертикального диаметра. По мере приближения к статору значения напряжений по формуле (8) продолжают увеличиваться, а напряжения, получающиеся по расчету, несколько убывают.

Таблица 1

Значения функций $\Phi(R)$ и $\Phi(q)$, коэффициентов C_1 и C_2 и напряжений

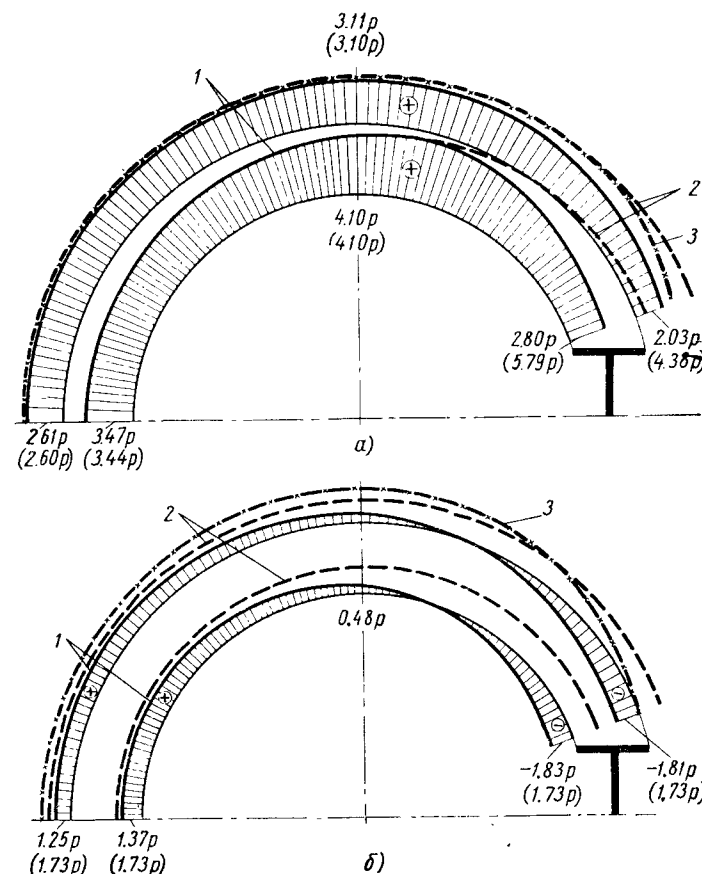
Величины	Φ					
	90°	45°	0°	-30°	-50°	-70°
$\Phi(q) \cdot 10^{-4}$	5,449	4,664	3,060	2,177	1,791	1,572
$\Phi(R) \cdot 10^{-4}$	6,275	5,192	3,060	1,965	1,521	1,284
C_1	$0,559 \frac{p}{E_1}$	$0,571 \frac{p}{E_1}$	$0,518 \frac{p}{E_1}$	$0,337 \frac{p}{E_1}$	$0,140 \frac{p}{E_1}$	$-0,003 \frac{p}{E_1}$
$C_2 \cdot 10^{-6}$	$0,709 \frac{p}{E_1}$	$0,706 \frac{p}{E_1}$	$0,665 \frac{p}{E_1}$	$0,606 \frac{p}{E_1}$	$0,494 \frac{p}{E_1}$	$-0,450 \frac{p}{E_1}$
σ_φ	$r = q$	$3,47p$	$3,70p$	$4,10p$	$4,01p$	$3,26p$
	$r = R$	$2,61p$	$2,79p$	$3,11p$	$3,02p$	$2,45p$
σ_θ	$r = q$	$1,37p$	$1,26p$	$0,48p$	$-0,65p$	$-1,41p$
	$r = R$	$1,25p$	$1,12p$	$0,48p$	$-0,66p$	$-1,54p$

На фиг. 4, а приведена также (3 — линия с крестиками) эпюра напряжений на внешней поверхности, найденная экспериментально при испытании в НИИЖБ Госстроя СССР железобетонной модели спиральной камеры. Сопоставление экспериментальной кривой с теоретическими указывает на близкое совпадение их во внешней части оболочки до зоны вертикального диаметра, а в зоне, примыкающей к статору, эпюра экспериментально найденных напряжений сначала близко совпадает с эпюрой, построенной по формуле (8), а по мере приближения к статору начинает убывать, занимая промежуточное положение между двумя теоретическими.

Значения напряжений σ_φ , найденных экспериментально, в сечениях с углами φ равными 90°; 45°; 0°; -30°; -50°; -70° на внешней поверхности равны соответственно: 2,89р; 2,95р; 3,28р; 3,60р; 3,75р и 2,83р.

Таким образом, полученное приближенное решение для толстостенного тора во внешней части оболочки довольно точно отражает действительное напряженное состояние в меридиональном направлении, а в зоне, примыкающей к статору, имеет место лишь качественное совпадение, т. е. в обоих случаях наблюдается снижение напряжений у заделки. Определение меридиональных напряжений по формуле (8) дает несколько завышенное значение их в зоне примыкания к статору, что обеспечивает прочность оболочки при большой простоте расчета.

Эпюры тангенциальных (торовых) напряжений представлены на фиг. 4, б, где показаны: эпюра (2 — прерывистая линия), получающаяся по существующей методике расчета и эпюра (3 — линия с крестиками) — по результатам эксперимента. Как видно



Фиг. 4. Эпюры напряжений:

а — меридиональных напряжений; б — тангенциальных напряжений;
1 — решение для толстостенного тора; 2 — по существующей методике расчета; 3 — по эксперименту.

из эпюр, имеет место некоторое совпадение результатов эксперимента с результатами расчета по существующей методике расчета почти во всем поперечном сечении, за исключением околостаторной зоны, где в эксперименте наблюдается снижение торовых напряжений и даже перемена их знака в непосредственной близости заделки. Перемена знака тангенциальных напряжений получается также и по полученной формуле (54), однако в более

резком виде, так как величины разнозначных напряжений имеют примерно один порядок.

Экспериментальные значения тангенциальных напряжений на внешней поверхности модели в указанных выше точках поперечного сечения равны: $2,13p$; $2,20p$; $2,56p$; $2,10p$; $0,93p$ и $-0,1p$.

Таким образом, для определения тангенциальных напряжений в спиральных камерах с достаточным приближением можно воспользоваться формулой (5) существующей методики расчета спиральных камер как безмоментных торообразных оболочек. При этом следует учитывать возможность появления напряжений противоположного знака в околостаторной зоне. То, что тангенциальные напряжения, найденные теоретически, довольно существенно отличаются от экспериментальных, является следствием принятых допущений в расчете.

Канд. техн. наук КАЛАТУРОВ Б. А.,
инж. ДОКУДОВСКИЙ С. И.

ЖЕЛЕЗОБЕТОН В АВТОКЛАВОСТРОЕНИИ

В течение нескольких лет в НИИЖБ при участии Экспериментально-конструкторского бюро Госстроя СССР и Проектно-конструкторской конторы Проектстроймеханизация Госмонтажспецстроя СССР проводились экспериментально-теоретические и проектно-конструкторские работы по созданию железобетонных предварительно напряженных автоклавов для запарки под давлением 8 и 12 *ати* крупноразмерных строительных деталей из силикатной массы и ячеистого бетона.

Параллельно с разработкой конструктивной формы железобетонных автоклавов и методики их расчета проводились исследования физико-механических свойств бетона высоких марок и высокопрочной арматуры, подвергавшихся воздействию повышенных температур ($180-200^{\circ}\text{C}$), и исследование работы железобетонных элементов сборного корпуса автоклава, изготовленных в натуральную величину.

Выполненная работа позволила установить необходимые параметры для статического расчета железобетонных корпусов автоклавов и разработать рабочие проекты двух головных образцов.

В настоящее время в г. Новосибирске приступили к возведению производственно-технологической линии, включающей железобетонный автоклав на 8 *ати*.

Работа над проектами железобетонных автоклавов была обусловлена тем, что быстро развивающаяся промышленность строительных материалов испытывает недостаток в поставке машиностроительными заводами стальных автоклавов больших диаметров (3,6 м). Такие автоклавы необходимы для запарки крупноразмерных деталей для строительства.

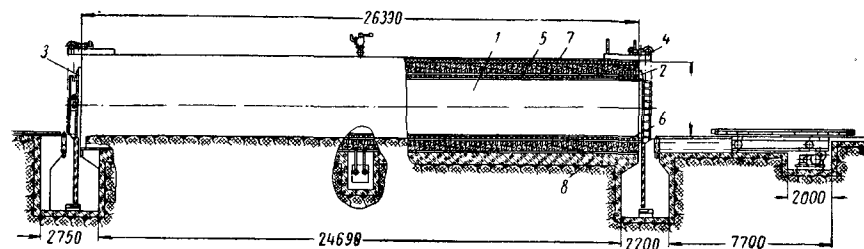
При разработке проектов автоклава было установлено [1], что для запарки плитных конструкций наиболее целесообразной формой поперечного сечения является не круглая, а прямоугольная, так как коэффициент заполнения объема автоклава может

быть повышен с 0,18—0,30 до 0,5. При прямоугольной форме корпуса автоклава железобетон находится в менее выгодных условиях работы под нагрузкой, чем металл в цилиндрическом автоклаве. Однако повышение коэффициента заполнения объема при прямоугольной форме автоклава позволяет добиться существенной экономии стали в 1,35—2 раза, сократить общее количество потребных автоклавов, а следовательно, и производственных площадей автоклавных отделений, где они устанавливаются.

Переход от цилиндрической к прямоугольной форме железобетонных автоклавов не отражается на технологии их заводского изготовления и монтажа.

Краткое описание конструкции железобетонных предварительно напряженных автоклавов на 8 и 12 *ати*

Автоклав на 8 *ати* запроектирован в виде проходного прямоугольного тоннеля, состоящего из железобетонного предварительно напряженного корпуса и двух торцовых стальных оголовьев с крышками кассетного типа и механизмами для их открывания и закрывания (фиг. 1). Автоклав расположен на сплошной фунда-



Фиг. 1. Сборный проходной железобетонный предварительно напряженный автоклав на 8 *ати*:

1 — железобетонный корпус из предварительно напряженных рам; 2 — стальное оголовье; 3 — крышка; 4 — механизм открывания и закрывания крышки; 5 — стальная рубашка; 6 — рельсовый путь для вагонетки; 7 — термоизоляция из пенобетонных блоков; 8 — фундаментная плита.

ментной плите, сверху которой имеется тонкий слой песка и стальной лист толщиной 2 мм. Они предназначены для обеспечения равномерной передачи усилий на фундамент и уменьшения сил трения при деформации автоклава.

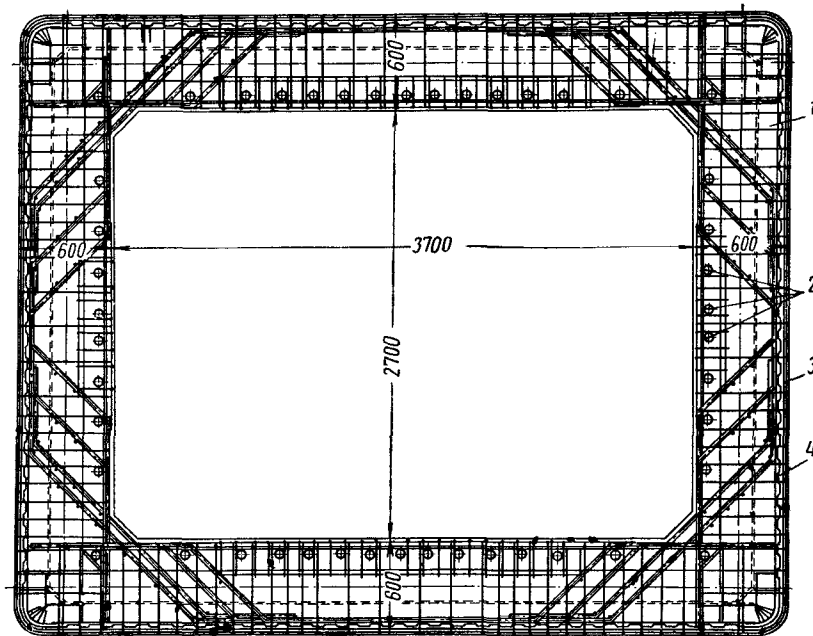
Для удобства производства работ по натяжению поперечной и продольной арматуры, корпус автоклава запроектирован сборным из отдельных рам трех типоразмеров, отличающихся в основном армированием.

Автоклав оборудован рельсовыми путями для сквозного движения вагонеток. Паронепроницаемость стенок корпуса обеспечивается сварной рубашкой из листовой стали толщиной 5—10 мм.

Внутренние размеры корпуса 3700 × 2700 × 26 390 мм позволяют размещать в нем 24 стеновые панели с наибольшими разме-

рами 640 × 320 × 25 см и обеспечить коэффициент заполнения объема 0,5 (130 м³).

Железобетонные рамы сборного корпуса имеют вес 5 т и сечение стоек и ригелей 230 × 600 мм (фиг. 2). Рамы изготавливаются в металлических формах на заводах сборного железобетона из бетона марки «400» (фиг. 3). Они армируются сварными каркасами из горячекатаной стали класса А-II и А-III (марки Ст. 5



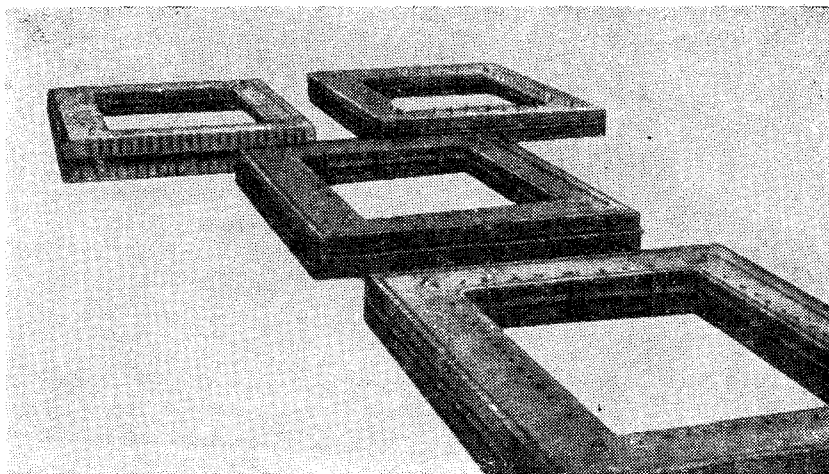
Фиг. 2. Железобетонная предварительно напряженная рама сборного корпуса автоклава на 8 *ати* с контурной напрягаемой арматурой из высокопрочной проволоки:

1 — бетон марки «400»; 2 — каналы для пропуска пучков диаметром 60 мм; 3 — предварительно напряженная проволока по ГОСТ 7348-55 диаметром 5 мм (98 вттков); 4 — обетонировка раствором марки «200».

и 35 ГС) и напрягаемой арматурой из высокопрочной холодно-тянутой проволоки диаметром 5 мм, расположенной по наружному контуру. Натяжение проволоки и ее намотка на раму производятся арматурно-ригельной машиной с последующей защитой ее слоем цементного раствора.

При сборке корпуса стыки между отдельными рамами заполняются цементным раствором и обжимаются в продольном направлении 46-ю предварительно напряженными пучками из 24 проволок диаметром 5 мм. Анкерами для пучков служат стальные оголовья, к которым крепятся крышки.

Суммарное усилие обжатия корпуса продольными пучками составляет около 2760 т. После проявления потерь предварительного напряжения усилие обжатия оказывается достаточным, чтобы при испытательном давлении 11 *ати* и площади крышки $\approx 10 \text{ м}^2$ внутреннее усилие 1100 т не вызвало раскрытия трещин в стыках между рамами.



Фиг. 3. Изготовление железобетонных сердечников рам на Новосибирском заводе железобетонных конструкций № 1.

Принятая конструкция затвора позволяет при открывании крышки опускать ее вниз в приямок, расположенный с торца автоклава.

Термоизоляция автоклава выполняется из пенобетонных блоков объемным весом 400—500 кг/м^3 .

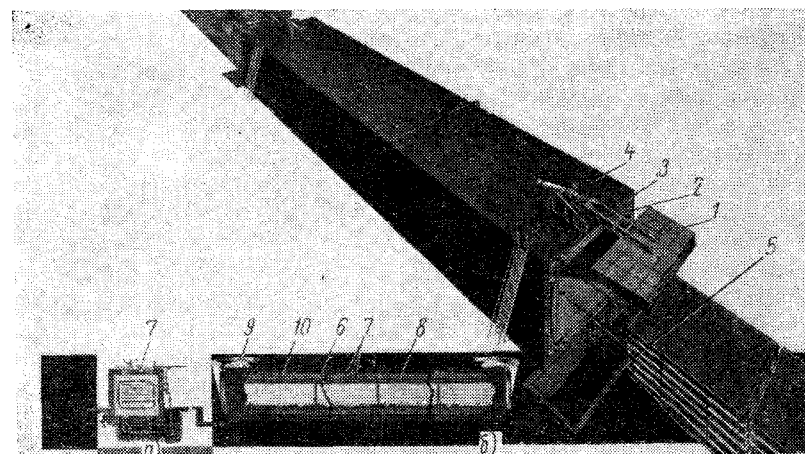
Таблица 1

Расход основных материалов на железобетонные автоклавы

Показатели	Внутреннее давление в <i>ати</i>	
	8	12
Объем в м^3	261	269
Расход железобетона марки «400» в м^3	239	295
Расход арматурной стали в т	78,5	117
Стальная оснастка (крышки, оголовья, рубашка механизма подъема и др.) в т	36	53,5

Примечание. На стальной автоклав диаметром 3,6 м, длиной 19 м, требуется 118 т стали.

Отличительными особенностями автоклава на 12 *ати* являются большие размеры рам, армирование и конструкция механизма открывания затвора крышек. В этом автоклаве крышки открываются путем их поворота вокруг горизонтальной оси, закрепленной в верхней части корпуса (фиг. 4). Крепление крышек в оголовьях производится с помощью четырех стальных скоб, оборудованных механизмами для их перемещения вдоль крышек.



Фиг. 4. Сборный железобетонный предварительно напряженный автоклав на 12 *ати*:

а — поперечный разрез корпуса; б — продольный разрез; 1 — крышка; 2 — оголовье; 3 — железобетонный корпус из предварительно напряженных рам; 4 — термоизоляция из пенобетонных блоков; 5 — приямок; 6 — фундамент; 7 — преднатяженные рамы; 8 — стальная рубашка; 9 — механизм подъема крышки; 10 — арматурные пучки.

Основные показатели железобетонных автоклавов приведены в табл. 1.

Если учесть, что один железобетонный автоклав (в зависимости от коэффициента заполнения объема) может заменить в работе 1,45—3,0 стальных автоклава диаметром 3,6 м, то, несмотря на менее выгодную конструктивную форму железобетонных автоклавов, экономия стали составляет не менее 35%.

Влияние повышенных температур на физико-механические свойства материалов и предварительно напряженный железобетон

Для статического расчета корпусов железобетонных автоклавов важно знать прочность и деформативность бетонов, работающих в условиях повышенной температуры 174—190° С.

Поскольку в автоклавостроении могут применяться бетоны марки «200—500», то необходимо знать их временное сопротивление

на сжатие, сжатие при изгибе и растяжении при воздействии температуры до 200°С.

Исследованием свойств обычного бетона в условиях действия повышенных температур занимался ряд исследователей: Некрасов К. Д. [2]; Мурашев В. И. [3], Милованов А. Ф., Прядко В. М. [4], Салманов Г. Д. [5], Mathieu Н. [17] и др., однако их исследования оказались недостаточными. Это обусловлено тем, что составы бетонов, режимы нагрева, методика проведения испытаний опытных образцов существенно отличались от условий, в которых должны работать бетоны, предназначенные для возведения железобетонных автоклавов. Исследования в основном проводились на бетонах марки «200».

В большинстве выполненных ранее исследований температура образцов в течение всего времени их нагрева сохранялась постоянной, а влияние на прочность бетона повторных нагревов, если и изучалось, то при сравнительно небольшом числе теплосмен (не более 10); при этом образцы испытывались после их охлаждения до температуры 10—20°С.

При эксплуатации железобетонных автоклавов на 8 и 12 *ати* в условиях установившегося режима работы на внутренней поверхности стенок температура периодически изменяется соответственно от 174—190°С до 75—100°С, а на наружной поверхности стенок остается почти неизменной и равной ≈100°С; при этом наибольшие усилия в автоклаве от давления пара совпадают по времени с максимальной температурой его стенок. После продолжительного перерыва работы автоклава его стенки могут иметь температуру 15—20°С. Следовательно, для установления влияния повышенной температуры на прочность бетона требовалось провести дополнительные испытания образцов, периодически нагреваемых и охлаждаемых в указанном интервале температур.

Как показали опыты¹, многократное запаривание бетонов при давлении пара 8 *ати* и температуре 174°С приводит к значительному снижению его прочности. Например, после 60 циклов запарки прочность бетона на сжатие составила всего 54% от его прочности до запаривания.

Столь большое снижение прочности бетона в стенках автоклава недопустимо, так как при нескольких тысячах запарок изделий прочность бетона может снизиться еще заметнее.

Резкое снижение прочности бетона объясняется вредным влиянием на него попеременного увлажнения и высушивания. Этого можно избежать, если на внутренней поверхности автоклава предусмотреть гидроизоляцию.

¹ Митник Г. С. Внедрение предварительно напряженных железобетонных поддонов. Научно-технический отчет НИИЖБ, 1961.

Учитывая большое давление пара, гидроизоляцию стенок удобнее выполнить из тонкой листовой стали, что и предусмотрено в обоих головных образцах железобетонных автоклавов.

По указанной причине авторы настоящего сообщения сочли необходимым произвести испытания бетонных образцов на прочность только на воздействие длительного переменного нагрева и охлаждения в интервале температур 15—200°С.

Для изготовления образцов был применен портландцемент Белгородского завода марки «400», активность которого составляла 401 кг/см^2 . В качестве мелкого заполнителя применялся речной песок с объемным весом 1575 кг/м^3 и влажностью 2,7%. Крупный заполнитель — известняковый щебень с объемным весом 1386 кг/м^3 и объемом пустот 38,5%.

Основные данные по составу бетона, водоцементному отношению, объемному весу при температуре 15—20°С и после нагрева до 180—200°С для всех шести серий образцов (129 кубов) приведены в табл. 2.

Таблица 2

Состав бетона, водоцементное отношение и объемный вес бетонных образцов

Шифр серии	Состав бетона по весу	В/Ц	Количество образцов в серии	Объемный вес образцов в т/м^3	
				при температуре 15—20°С	после нагрева до температуры 200°С
А	1 : 1,1 : 2,3	0,375	14	2,40	1,96
Б	1 : 1,47 : 2,4	0,41	24	2,47	2,28
В	1 : 0,97 : 1,88	0,35	18	2,32	2,20
Г	1 : 0,97 : 1,88	0,35	26	2,39	2,28
Д	1 : 1,56 : 3,8	0,46	26	2,46	2,34
Е	1 : 3,5 : 5,25	0,82	21	2,36	2,27

Кубы всех серий делились на две равные части. Одна часть кубов в возрасте одного месяца помещалась в сушильный шкаф. Исключение составляли кубы серии А, которые загружались в шкаф в возрасте 490 дней.

Образцы подвергались нагреву до 200°С и охлаждению до температуры 15—20°С (при охлаждении образцы не вынимались из шкафа).

Продолжительность одной теплосмены составляла 24 ч. Нагретые образцы испытывались в специальном контейнере, оборудованном нагревателем из нихромовой проволоки, обеспечивающем постоянную температуру 180—200°С.

Вторая часть образцов не подвергалась нагреву и испытывалась в холодном состоянии (при температуре 15—20°С). Такая

Таблица 3

Результаты испытания на сжатие нагретых и холодных бетонных образцов

Шифр серии	Группа	Число испытанных образцов		Прочность бетонных образцов на сжатие*	Возраст образца в момент испытания в сутках	Число теплосмен до испытания в нагретом состоянии	Средняя прочность бетона на сжатие в кг/см ²	
		холодных	нагретых				при температуре 15—20°С	при температуре 180—20°С
А	1	3	3	467	490	120	582	532
	2	0	3		561	180	—	485
	3	2	3		585	60	550	514
Б	1	3	3	288	60	28	396	400
	2	3	3		90	53	344	401
	3	3	3		223	153	463	277
В	4	0	3	304	967	789	—	354
	1	3	3		107	90	358	330
	2	3	3		166	139	409	340
Г	3	3	3	460	190	160	408	342
	1	3	3		155	30	544	516
	2	3	3		185	54	573	550
Д	3	3	3	345	343	185	550	507
	4	2	3		528	342	501	458
	1	3	3		153	128	509	420
Е	2	3	3	144	254	218	528	357
	3	5	6		527	443	567	451
	1	3	3		103	87	173	206
	2	3	3	144	244	203	260	182
	3	3	3		518	435	292	202

* В возрасте 28 суток при нормальной температуре в кг/см².

** Продолжительность теплосмены 24 ч.

методика позволяла установить влияние многократного нагрева и охлаждения бетона на его прочность.

Результаты испытания нагретых и холодных кубов приведены в табл. 3.

Из табл. 3 видно, что образцы всех шести серий при хранении в условиях нормальных температур в течение 60—967 суток значительно увеличили свою прочность по сравнению с прочностью на 28-й день. Аналогичное увеличение прочности, по сравнению с прочностью на 28-й день, наблюдалось и у образцов, подвергнувшихся нагреву.

Однако для образцов одного и того же возраста нагрев до температуры 200°С (28—789 теплосмен) уменьшает прочность бетона. Этот вывод можно распространить на все бетонные кубы, к моменту испытания которых прочность на сжатие составляла от 173 до 582 кг/см².

Приведенные данные мало отличаются от данных, полученных за рубежом при испытании бетона на портландцементе [17]. По французским данным отношение прочности бетонных образцов на сжатие, нагретых до 200°С, к их прочности при температуре 20°С составило от 90 до 120%.

При нагреве обычного бетона, кроме снижения прочности, наблюдается снижение и его модуля упругости. В расчетах конструкций величина снижения модуля упругости может быть учтена введением коэффициента $\beta_6 < 1$. По опытам, выполненным Куренковым А. Ф. [6], значение этого коэффициента для обычного бетона можно принимать при температуре 20°С $\beta_6 = 1$, а при 200°С $\beta_6 = 0,8$.

Следует отметить, что в указанных опытах прочность бетона не превышала 250 кг/см².

Ввиду отсутствия данных о величине снижения модуля упругости обычного бетона марки «400» и, тем более, предварительно напряженного железобетона при длительном воздействии переменных температур 15—200°С, значение коэффициента β_6 при расчете автоклавов принималось равным 0,8. Последующие испытания предварительно напряженных рам, выполненных в натуральную величину, показали, что и для бетона марки «400» коэффициент β_6 может быть принят равным 0,8.

При воздействии на бетон повышенной температуры наблюдаются также его необратимые деформации укорочения, вызванные термической усадкой. Термическая усадка может вызывать значительные потери предварительного напряжения в напрягаемой арматуре и, как следствие этого, снизить трещиностойкость конструкции. Она может также нарушить работу затвора автоклава и внутренней стальной рубашки, если ее не учитывать при разработке конструкции и монтаже затвора и рубашки.

В технической литературе отсутствуют данные о величине термической усадки бетона марки «400» при длительном воздействии переменных температур. Опыты Оямаа Э. Г. [7] показали, что величина термической усадки жароупорного бетона при температуре 175°С составляет 0,06%, а обычного бетона при температуре 100°С — 0,05%. Однако в указанных опытах не учитывались некоторые факторы, которые имеют место в конструкциях подобных автоклавов: различная температура нагрева по высоте сечений, наличие арматуры и предварительного обжата бетона.

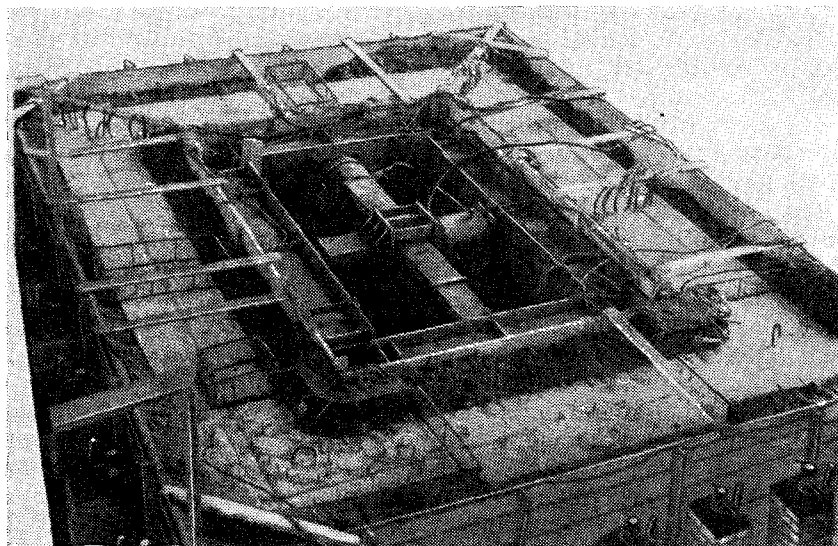
Авторы проводили исследования термической усадки не на образцах, выполненных из бетона, а учитывая конструктивные особенности корпусов железобетонных автоклавов, — на рамах, выполненных в натуральную величину (фиг. 5). Результаты испытаний приведены в табл. 4.

Экспериментальные данные по термической усадке ригелей и стоек рам достаточно близко совпадают с данными Оямаа Э. Г. и позволяют, с достаточной для практики точностью, оценить

величину потерь предварительного напряжения в напрягаемой арматуре. Величина этих потерь может быть оценена по приближенной эмпирической формуле

$$\sigma_{1t} = 11,5t_{cp},$$

где t_{cp} — температура нагрева бетона посередине сечений ригелей и стоек.



Фиг. 5. Испытание железобетонной предварительно напряженной рамы на совместное действие внутреннего давления и температурный перепад, создаваемый электронагревателями, уложенными в бетон рамы (показана рама без верхнего слоя термоизоляции).

В испытанной раме Р-2 автоклава величина потерь предварительного напряжения от термической усадки бетона ригелей и стоек составила около 1200 кг/см^2 .

Таблица 4

Величина термической усадки ригелей и стоек предварительно напряженной железобетонной рамы

Вид испытаний	Температура бетона в середине пролета в °С			Температура бетона в углах рамы (по его оси) в °С	Термическая усадка бетона в %		
	по оси ригеля	по оси стойки	средняя		ригеля	стойки	средняя
Первый нагрев	118	98	108	90	0,052	0,037	0,044
Второй нагрев	120	115	117,5	104	0,063	0,046	0,054

При расчете элементов корпуса автоклава необходимо учитывать ползучесть бетона при длительном воздействии нагрузки и повышенной температуры. Поскольку авторами специальных опытов не производилось, то для учета потерь от ползучести бетона применялась эмпирическая формула [8]

$$\sigma_{2t} = 0,003t_{cp}\sigma_2,$$

где t_{cp} — температура нагрева бетона по середине сечений элементов конструкции;

σ_2 — величина потерь предварительного напряжения в арматуре, вызванная ползучестью бетона при обычной температуре с учетом в необходимых случаях коэффициента β (определяется по указаниям СН и П II-B. 1-62).

Испытание рамы Р-2 показало, что при $t_{cp} = 107^\circ \text{С}$, $\beta = 0,735$, потери предварительного напряжения при $t = 20^\circ$ составили $\sigma_2 = 312 \text{ кг/см}^2$, а потери предварительного напряжения от ползучести бетона при повышенной температуре составили $\sigma_{2t} = 100 \text{ кг/см}^2$.

Известно, что при воздействии высоких температур увеличивается релаксация напряжений в арматуре. Это явление может привести к значительным потерям напряжений и вызвать в конструкции преждевременное появление трещин. Величина потерь от релаксации напряжений стали зависит от вида арматуры и окружающей температуры. Она особенно резко увеличивается при температуре арматуры более 40°С . При этом степень увеличения потерь от релаксации тем больше, чем ближе предварительное напряжение к временному сопротивлению стали.

По зарубежным данным [18] потери предварительного напряжения в высокопрочной проволоке от релаксации напряжений резко возросли при изменении температуры с 20 до 220°С составляли около 38% от величины контролируемого напряжения при натяжении арматуры на упоры.

Величину потерь предварительного напряжения от релаксации арматуры, нагретой более 40°С (выполненной из отечественных марок стали), можно определить по формуле Инструкции [8]

$$\sigma_{3t} = k_t t_a \sigma_0,$$

где t_a — температура нагрева арматуры;

k_t — коэффициент, принимаемый в зависимости от вида арматуры и имеющий размерность $1/град$.

Согласно Инструкции [8] для высокопрочной проволоки коэффициент k_t может быть принят равным 0,0018. Применительно к конструкции железобетонного автоклава величина этих потерь для напрягаемой арматуры рам составила бы 18%, а для продольной пучковой — 27% от σ_0 . Однако опыты Михайлова К. В.

и Кричевской Э. А. [10] показали, что фактическая величина потерь от релаксации напряжений проволоки при повышенной температуре приводит к лучшему совпадению с опытом при коэффициенте $k_t = 0,00113$.

Кроме рассмотренных выше потерь напряжений для конструкций, работающих в условиях повышенных температур, следует учитывать потери, вызванные разной величиной удлинения арматуры и бетона при их нагреве. Величина этих потерь может быть определена по формуле Инструкции [8]

$$\sigma_9 = 3t_a,$$

где 3 — численное значение коэффициента, размерность которого дана в $\text{кг} \cdot \text{см}^{-2} \text{град}^{-1}$.

Суммарная величина потерь предварительного напряжения контурной арматуры рам автоклавов на 8 и 12 *ати* составила соответственно 4230 и 4500 кг/см^2 , а для пучковой арматуры соответственно 4350 и 4600 кг/см^2 . Как показали испытания рам, опытная величина усилий, вызывающих появление трещин в ригелях рам, хорошо совпадает с вычисленной при учете потерь от воздействия повышенной температуры, подсчитанных по указанным выше формулам. Столь большие потери позволяют сделать вывод о нецелесообразности использования для армирования автоклава напрягаемой арматуры из горячекатаной стали (включая сталь класса А-IV), так как вследствие больших потерь эффект ее предварительного напряжения почти полностью пропадает.

Особенности статического расчета железобетонного корпуса автоклава

Особенности статического расчета железобетонного корпуса автоклава должны быть указаны потому, что для их расчета до настоящего времени нет нормативных документов.

Действующие СНиП II-B.1-62 [11] (как и прежняя Инструкция СН 10-57 [9]) не распространяются на проектирование конструкций, работающих в условиях систематического воздействия повышенных температур, а «Временные указания по проектированию жароупорных железобетонных конструкций» [12] не содержат необходимых данных для расчета предварительно напряженных железобетонных конструкций, выполненных из обычного бетона.

Поскольку фундамент под автоклав запроектирован в виде сплошной железобетонной плиты, опирающейся на грунт, расчет корпуса автоклава в поперечном направлении может быть сведен к расчету плоской замкнутой рамы с жесткими узлами. Расчет корпуса в продольном направлении можно заменить расчетом полосы шириной 1 м и высотой, равной толщине стенки корпуса, условно вырезанной из корпуса автоклава. Если толщины стенок

различны, то без большой погрешности расчет соответствующей полосы производится для каждой стенки отдельно.

Одной из особенностей расчета железобетонного автоклава является учет температурных усилий, возникающих в стенках его корпуса вследствие их неравномерного нагрева. Неравномерный нагрев стенок, имеющих толщину измеряемую десятками сантиметров, объясняется плохой теплопроводностью бетона (в 40 раз меньше, чем стали). При этом температурные моменты в стенках должны определяться по наибольшей величине температурного перепада.

Анализ работы автоклава под нагрузкой показал, что перепад температуры между внутренней и наружной поверхностями стенок может вызвать усилия, соизмеримые с усилиями от давления пара, особенно при неустановившемся режиме его работы. При разработке проекта автоклава расчеты изменения температуры во времени производились для заданного режима пропарки при регулярной (установившейся) его работе. Для упрощения расчетов решение дифференциального уравнения теплопроводности [13] было заменено решением уравнения теплопроводности в конечных разностях. Сущность такой замены состояла в том, что непрерывный процесс заменялся скачкообразным как в пространстве, так и во времени.

Определение величины максимальной разности температур и их распределение в элементах корпуса автоклава за один цикл его работы было проведено лабораторией строительной физики бывшего ЦНИПС [11]. Исследования проводились для стенок толщиной 90 и 40 см и двух (условных) циклов работы автоклава продолжительностью 24 и 32 ч. Цикл работы автоклава в 32 ч был принят, исходя из желания получить наибольший из возможных относительных температурных перепадов. На практике цикл запарки изделий в автоклаве не превышает 24 ч. Проведенные исследования позволили сделать следующие выводы.

1. Распределение температуры в железобетонных стенках при нагреве корпуса автоклава происходит по кривой, близкой к гиперболе [11].

2. Разность температуры на внутренней и наружной поверхностях стенок автоклава возрастает с увеличением продолжительности цикла его работы. При цикле работы 32 ч максимальная разность температур составила 74° С, а при цикле 24 ч — 64° С.

3. В обоих циклах работы автоклава максимальная разность температур совпадает по времени с наибольшим давлением пара внутри автоклава.

4. При одинаковых, установившихся режимах работы автоклава величина максимальной разности температур практически не зависит от толщины стенок его корпуса. Так, например, при цикле работы автоклава 32 ч она составила: для стенки толщиной 40 см — 74° С, для стенки толщиной 90 см — 72° С, а относи-

тельный температурный перепад — соответственно 1,08 и 0,8 град/см.

Экспериментальное исследование распределения температуры в специальном железобетонном образце и рамах сборного корпуса автоклава [1] подтвердило выводы теоретических расчетов.

Отметим, что при определении температурных моментов, вызванных неравномерным нагревом стенок, в расчетные формулы вводился не максимальный, а расчетный относительный температурный перепад, который был определен из условия замены криволинейной эпюры распределения температуры эквивалентной ей по площади и статическому моменту трапециoidalной. При такой замене величина расчетного относительного температурного перепада составила 0,7 от его максимального значения, полученного из криволинейной эпюры распределения температур.

В целях снижения температурных усилий в продольном направлении корпуса автоклава было предусмотрено устройство искусственных трещин, что обеспечивалось заливкой раствора в швы между рамами не по всей высоте, а лишь части их.

Благодаря применению при расчете сечений элементов корпуса автоклава методики расчета по предельным состояниям, оказалось возможным использовать дифференцированные коэффициенты перегрузки и перегрева: для нагрузки, создаваемой давлением пара, и температурных усилий, вызванных температурным перепадом по толщине стенок. Это позволило более точно учесть действующие на автоклав нагрузки и температурные воздействия.

Например, при расчете трещиностойкости рам, армированных высокопрочной проволокой, к нормативным нагрузкам, соответствующим давлению пара в автоклаве при его нормальной эксплуатации (8 или 12 *атм*), вводились коэффициенты перегрузки и перегрева: к усилиям от внутреннего давления — 1,37, а к расчетному температурному перепаду — 1,075.

Определение усилий, действующих в элементах рамы (стойках и ригелях) от внешней нагрузки, производилось по формулам строительной механики.

При проверке прочности, трещиностойкости и деформативности ригелей и стоек рамы, работающих на внецентренное растяжение и неравномерный нагрев, оказалось возможным частично использовать методику расчета, принятую в СН 10-57, СН и П II-B.1-62 и «Временных указаниях по проектированию жароупорных железобетонных конструкций» [12].

За расчетную нагрузку при проверке сечений ригелей и стоек на прочность принималось нормативное давление пара (8 или 12 *атм*), умноженное на коэффициент перегрузки 1,5.

Температурные усилия в этом случае не учитывались, так как согласно исследований Милованова А. Ф. и Зырянова В. С. [14] при величине внешней нагрузки, составляющей 0,6—0,9 от разрушающей, температурные моменты полностью исчезают.

Краткие сведения о результатах испытания железобетонных рам

Сравнение опытной разрушающей поперечной силы при проверке прочности наклонных сечений ригеля рамы (вычисленной по указаниям СН и П II-B.1-62) показало, что нормы недооценивают прочность указанных сечений действию поперечной силы.

Было также установлено, что указания п. 7-56 СН и П II-B.1-62 о том, что при малых эксцентриситетах продольной растягивающей



Фиг. 6. Схема разрушения, армирование, расположение нагрузки и эксцентриситета приложения растягивающего усилия в раме Р-1:
1 — напрягаемая проволочная арматура.

силы вся поперечная сила в любом наклонном сечении, направленном под углом меньше 60° к продольной оси элемента, должна быть воспринята только одной поперечной арматурой, испытаниями четырех рам автоклава не подтвердилось.

Так, например, рама Р-1 разрушилась по наклонному сечению между первым и вторым грузами при воздействии относительного расчетного температурного перепада 0,87 град/см, поперечной силы $Q = 32,5 \text{ т}$, растягивающего усилия $N = 65 \text{ т}$ и переменного по длине ригеля изгибающего момента, при котором величина эксцентриситета приложения растягивающего усилия имеет вид, показанный на фиг. 6.

Из фиг. 6 видно, что разрушение рамы произошло по наклонному сечению, в котором отсутствовали отогнутая и поперечная арматуры, а эксцентриситет приложения растягивающего усилия e_0 изменяется в пределах от 0 до $0,5h_0$.

Если руководствоваться указаниями п. 7-56 СН и П II-V.1-62, то поперечная сила могла бы быть воспринята только отогнутой и поперечной арматурой, а поскольку она отсутствует, то следовало бы считать сопротивление наклонного сечения действию поперечной силы равным нулю.

Расчеты показали, что если рассмотреть сопротивление поперечной силе участка ригеля между первым грузом и осью стойки рамы, то при наличии отогнутой горячекатаной арматуры и значений коэффициента

$$k = \frac{e_0}{h_0} - 0,5 = 0,39$$

рама могла бы выдержать $Q = 31,6 \text{ т}$. Однако опытная поперечная сила составила $Q = 65 \text{ т}$, а рама на рассматриваемом участке ригеля не разрушилась. Из этого можно заключить, что рекомендации действующих норм недооценивают фактическую прочность рам действию поперечной силы при внецентренном растяжении, когда $e_0 \leq 1,5h_0$.

Обработка данных испытания рамы Р-1 показала, что вычисленная разрушающая поперечная сила дает хорошее совпадение с опытом, если вместо коэффициента 0,15 в формуле (63) СН и П II-V.1-62 принять коэффициент 0,04, и вместо коэффициента 0,6 в формуле (65) принять коэффициент 0,16.

В последнем случае вычисленная разрушающая поперечная сила для участка между первым и вторым грузами составила 32,2 т, а на участке между первым грузом и осью стойки — 63,6 т, т. е. отличается не более, чем на 1—2% от величин поперечных сил, действовавших при испытании рамы.

Подобные данные могли бы быть приведены по раме Р-2, испытанной на внутреннее давление и температурный перепад, раме Р-3, армированной ненапрягаемой горячекатаной сталью класса А-IV, и раме Р-4, армированной напрягаемой высокопрочной проволокой. Укажем, что рамы Р-3 и Р-4 испытывались на одно внутреннее давление без температурного перепада.

При расчете предварительно напряженных рам по образованию трещин исходили из того, что в растянутых зонах ригелей и стоек, армированных напрягаемой проволочной арматурой при испытательном давлении, трещины не допускаются. На участках ригелей и стоек рамы, примыкающих к углам и армированных в растянутых зонах ненапрягаемой стержневой арматурой, трещины допускаются. Однако величина раскрытия последних не должна превышать 0,2 мм. Отметим, что испытательное давление для автоклава на 8 атм составляет 11 атм, а для автоклава на 12 атм — 16,5 атм.

Температурные моменты определялись по сечению с минимальной жесткостью. При расчете трещиностойкости сечений, кроме потерь предварительного напряжения, указанных выше,

и коэффициента точности натяжения арматуры $m_t = 0,9$, учитывалось также влияние нагрева рам на снижение физико-механических свойств бетона и арматуры.

Расчет деформаций ригелей и стоек рамы включал определение их прогибов и удлинений при воздействии эксплуатационной нагрузки. При этом влиянием растягивающих усилий на величину прогибов стоек и ригелей рамы пренебрегали.

Для упрощения расчета прогибы и удлинения ригелей и стоек определялись по формулам строительной механики, как для сплошного упругого тела с учетом работы всего поперечного сечения элемента (без учета трещин в углах рам) и жесткости, равной

$$B_{окр} = 0,85E_b I_k.$$

Согласно работе [15], для нахождения изогнутой оси элементов рамы к ординатам упругой линии ригеля или стойки от нагружения их узловыми температурными моментами алгебраически прибавлялись ординаты дуги окружности радиуса ρ от изменения температуры.

Учитывая ограниченный объем статьи, приведем сравнение опытных и теоретических величин усилий, вызывающих появление трещин и деформаций только для одной из испытанных рам, армированной предварительно напряженной высокопрочной гладкой проволокой диаметром 5 мм и подвергнутой действию внутреннего давления и неравномерного нагрева.

Так, например, опытный момент появления трещин в середине пролета ригеля составил $p^0 = 10,9 \text{ атм}$, а теоретический $p^T = 11 \text{ атм}$, т. е. отличается от опытного на 1%.

Значения опытных прогибов ригелей и стоек при первом нагреве рамы составили соответственно $f_p^0 = 1,65 \text{ мм}$ и $f_c^0 = 0,99 \text{ мм}$, а теоретически $f_p^T = 1,8 \text{ мм}$, $f_c^T = 0,43 \text{ мм}$, $\frac{f_p^0}{f_p^T} = 0,9$

$$\text{и } \frac{f_c^0}{f_c^T} = 1,30.$$

После второго нагрева рамы опытные значения прогибов составили $f_p^0 = 2,3 \text{ мм}$, $f_c^0 = 1,09 \text{ мм}$, а теоретические $f_p^T = 2,02 \text{ мм}$, $f_c^T = 0,73 \text{ мм}$, $\frac{f_p^0}{f_p^T} = 1,15$, $\frac{f_c^0}{f_c^T} = 1,49$.

Значения опытных и теоретических удлинений ригелей и стоек рамы при действии температуры 180—200° С при первом нагреве составили соответственно: для ригелей $\Delta l_p^0 = 2,31 \text{ мм}$ и стоек $\Delta l_c^0 = 1,93 \text{ мм}$, а $\Delta l_p^T = 2,32 \text{ мм}$ и $\Delta l_c^T = 2,06 \text{ мм}$; при этом $\frac{\Delta l_p^0}{\Delta l_p^T} = 0,99$ и $\frac{\Delta l_c^0}{\Delta l_c^T} = 0,88$.

После второго нагрева $\Delta l_p^0 = 5,14$ мм, $\Delta l_c^0 = 3,43$ мм, а $\Delta l_p^T = 5,46$ мм, $\Delta l_c^T = 3,89$ мм и $\frac{\Delta l_p^0}{\Delta l_p^T} = 0,94$, $\frac{\Delta l_c^0}{\Delta l_c^T} = 0,88$.

При совместном действии температурного перепада и внутреннего давления максимальные опытные прогибы ригелей и стоек рамы Р-2 составили соответственно 2,39 и 0,53 мм, а теоретические прогибы 2,28 и 0,51 мм.

Наибольшие опытные удлинения ригелей и стоек составили соответственно 5,25 и 3,74 мм, а теоретические 5,17 и 3,66 мм. Аналогичные данные могли бы быть приведены и по другим рамам.

Из приведенных данных можно сделать вывод, что экспериментальная проверка прочности, трещиностойкости и деформативности предварительно напряженных элементов сборного корпуса автоклава, рассчитанных с учетом изложенных выше особенностей, показала достаточно удовлетворительное совпадение их опытных и теоретических значений. Исключение составила рама Р-3, в которой напрягаемая проволоочная арматура была заменена ненапрягаемой горячекатаной сталью периодического профиля класса А-IV. В этой раме при давлении 11 атм, являющемся испытательным давлением для автоклава на 8 атм, величина раскрытия трещин по наклонным сечениям достигала 0,5 мм, что превышало допустимую ширину раскрытия на 0,2 мм. Таким образом, применение железобетонных рам с ненапрягаемой контурной арматурой недопустимо по ширине раскрытия трещин.

Выводы

Выполненные экспериментально-теоретические исследования работы рам сборного предварительно напряженного железобетонного корпуса автоклава и материалов для их изготовления позволяют сделать следующие выводы.

1. Для возведения крупноразмерных автоклавов, наряду со сталью, может быть использован предварительно напряженный железобетон, который обеспечивает достаточную прочность, трещиностойкость и жесткость корпуса автоклава. Его применение позволяет отказаться от традиционной цилиндрической формы стальных автоклавов и использовать прямоугольную. В результате этого коэффициент заполнения железобетонного прямоугольного автоклава может быть повышен до 0,5 (вместо 0,18—0,32), расход листовой стали уменьшен (по сравнению с круглым стальным автоклавом диаметром 3,6 м) на 35% и более и, кроме того, сокращена на 30% площадь автоклавных цехов.

Использование железобетона в автоклавостроении позволяет уменьшить загрузку машиностроительных заводов и обеспечить

изготовление корпусов железобетонных автоклавов на заводах сборного железобетона.

2. Расчет железобетонного корпуса автоклава может производиться по правилам строительной механики, а подбор сечений рам — по методике предельных состояний в соответствии с указаниями СН и П II-V.1-62 и рекомендациями настоящей статьи в части учета работы железобетона в условиях повышенных температур. К последним относятся снижение прочности и начального модуля упругости бетона и дополнительные потери предварительного напряжения, вызванные воздействием повышенных температур (термическая усадка бетона, ползучесть бетона, релаксация напряжений в напрягаемой арматуре, разные величины удлинений арматуры и бетона и т. п.).

При подсчете нагрузок необходимо учитывать дифференцированные коэффициенты перегрузки и перегрева отдельно для давления и температуры, а также коэффициенты условий работы бетона и арматуры при повышенной температуре.

3. При действии внутреннего давления и повышенной температуры разрушение рам происходило от преодоления сопротивления действию поперечной силы ригелей по наклонным сечениям на участках их примыкания к узлам. Сравнение опытной разрушающей поперечной силы с вычисленной по указаниям СН и П II-V.1-62 показало, что опытная поперечная сила оказывается значительно больше вычисленной.

Лучшее совпадение с опытом имеет место при замене коэффициентов 0,15 и 0,6 в формулах (63) и (65) СН и П II-V.1-62 на коэффициенты, соответственно равные 0,04 и 0,16.

4. Трещиностойкость сердечников предварительно напряженных рам оказалась обеспеченной лишь в тех рамах, при расчете которых потери предварительного напряжения принимались с учетом потерь, вызванных действием повышенных температур; при этом суммарная величина потерь составила 4230—4350 кг/см² для автоклава на 8 атм и 4500—4600 кг/см² — на 12 атм.

5. Ввиду того, что потери предварительного напряжения в напрягаемой арматуре рам сборного корпуса автоклава могут достигать 4230 и 4600 кг/см², применение в автоклавостроении стержневой горячекатаной напрягаемой арматуры класса А-IV не рекомендуется, так как при указанной величине потерь эффект предварительного напряжения почти полностью пропадает.

6. Опыты показали, что деформации рам при воздействии нормативной и испытательной нагрузок невелики и не лимитируют конструкцию.

7. Окончательный вывод о работе железобетонных автоклавов под нагрузкой может быть сделан после испытания головного образца автоклава, возводимого в г. Новосибирске, и некоторого времени его эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калатуров Б. А. и Докудовский С. И. Исследования предварительно напряженных железобетонных автоклавов. — Исследование предварительно напряженных железобетонных конструкций промышленных зданий. Труды НИИЖБ, вып. 24, Госстройиздат, 1961.
2. Некрасов К. Д. Жароупорный железобетон. Промстройиздат, 1957.
3. Мурашев В. И. Замена металла железобетоном в агрегатах и сооружениях в условиях действия высокой температуры. — «Строительная промышленность», 1943, № 4—5.
4. Милованов А. Ф. и Прядко В. М. Особенности работы железобетонных конструкций при нагревании. Статья в сборнике «Применение железобетона в машиностроении». ЦИНТИАМ, 1964.
5. Салманов Г. Д. Исследования упругопластических свойств жароупорного бетона на портландцементе. — Исследования по жароупорному бетону и железобетону. Госстройиздат, 1954.
6. Куренков А. Ф. Экспериментальная проверка метода расчета температурных усилий в створе железобетонных дымовых труб. — Исследования по жароупорному бетону и железобетону. Госстройиздат, 1954.
7. Некрасов К. Д. и Оямаа Э. Г. Исследование отвальных доменных шлаков как заполнителей жароупорного бетона. Научное сообщение ЦНИПС, вып. 19, Госстройиздат, 1955.
8. Инструкция по расчету и проектированию железобетонных дымовых труб. Госстройиздат, 1962.
9. Инструкция по проектированию предварительно напряженных железобетонных конструкций (СН 10-57), Госстройиздат, 1958.
10. Михайлов К. В. и Кричевская Э. А. Влияние повышенных температур на релаксацию напряжений высокопрочной проволоки. — «Бетон и железобетон», 1963, № 2.
11. Строительные нормы и правила, Ч. II, разд. В, гл. 1, Бетонные и железобетонные конструкции, нормы проектирования СН и П II-В. 1-62, Госстройиздат, 1962.
12. Временные указания по проектированию жароупорных железобетонных конструкций У-151-56 МСПМХП, Госстройиздат, 1957.
13. Михеев М. А. Основы теплопередачи. Госэнергоиздат, 1947.
14. Милованов А. Ф. и Зырянов В. С. Работа жароупорных железобетонных элементов на растяжение и сжатие при неравномерном нагреве. — «Бетон и железобетон», 1960, № 7.
15. Горин А. А. Расчет статически неопределимых стержневых систем на действие температуры. Изд. Харьковского Государственного Университета, 1960.
16. Милованов А. Ф. Жаростойкий железобетон, Госстройиздат, 1963.
17. Mathieu H. Le comportement du Béton entre 80 et 300°. Etude établie par le service S. R. T. Batir No. 102 (1961), April Heft, S. 21/23.
18. Pfützenreiter, Herstellung und Güterwerte der Zeus Spannstähle. z. Betonstein Zeitung, 1958, N 5.

Канд. техн. наук ЛЮДКОВСКИЙ И. Г.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖЕЛЕЗОБЕТОНЕ И ОСНОВНЫХ ЕГО СВОЙСТВАХ

Железобетон — составной материал, созданный из разнородных по своим свойствам материалов, — бетона и стали.

Бетон — искусственный камень, обычно состоящий: из вяжущего вещества (цементы различных видов); заполнителей различной крупности (естественных: щебень, гравий, песок и искусственных: керамзит и др.); воды.

В зависимости от составов и видов вяжущего вещества и заполнителей могут быть получены бетоны различных прочностей и объемных весов и с различными степенями стойкости в агрессивных кислых средах, а также при действии высоких температур.

Для машиностроения могут применяться бетоны:

а) Тяжелые с объемным весом 1800 кг/м^3 и более марок «200», «300», «400», «500», «600», «700», «800».

Обычные тяжелые бетоны, представляющие собой смесь песка, щебня, цемента и воды, имеют объемный вес 2400 кг/м^3 (объемный вес железобетона — 2500 кг/м^3). При применении заполнителей в виде тяжелых железных руд и металлического скрапа различных видов могут быть получены бетоны объемных весов от 3600 до 4800 кг/м^3 .

б) Легкие с объемным весом менее 1800 кг/м^3 марок «150», «200», «300», «400» с искусственными заполнителями — керамзит, термозит и др.

в) Жаростойкие. В зависимости от степени огнеупорности жаростойкие бетоны подразделяются на высокоогнеупорные бетоны с огнеупорностью выше 1770°C , огнеупорные бетоны с огнеупорностью от 1580 до 1770°C и жароупорные бетоны с огнеупорностью ниже 1580°C .

Марки жароупорных бетонов в зависимости от состава и вида применяемых материалов могут колебаться в следующих пределах: для бетона на глиноземистом цементе и на портландцементе — от «100» до «300» и для бетонов на жидком стекле с кремнефтористым натрием от «100» до «200».

В качестве заполнителей для жаростойких бетонов применяются естественные каменные материалы (хромит, андезит, диабаз, пемза и др.), а также материалы, получаемые искусственным путем (шамот, магнезит).

Обычный бетон также огнестоек. Кратковременное нагревание бетона до 250—300° С не уменьшает его прочности. При нагревании бетона до 100° С наблюдается даже некоторое повышение прочности. Однако при длительном воздействии на железобетонные конструкции (изготовленные на портландцементе) температуры до 250° С снижаются прочностные показатели бетона на 20—25 %.

При длительном воздействии более высоких температур рекомендуется применять жароупорные и жаростойкие бетоны.

В железобетоне весьма важно защитить арматуру от воздействия высоких температур, так как при этом происходит снижение предела прочности и предела текучести стали. С этой целью при высоких температурах должен применяться увеличенный защитный слой, либо специальные конструктивные мероприятия.

г) Х и м и ч е с к и с т о й к и е — кислотоупорные бетоны изготавливаются с применением кислотоупорного кварцевого кремнефтористого цемента, состоящего из жидкого стекла, молотого песка (кварцевого, гипсового) и кремнефтористого натрия. В качестве заполнителя применяется кислотостойкий материал — кварцит.

Кислотоупорный бетон так же, как и жароупорный, обладает пониженной прочностью по сравнению с обычным.

Повышенной химической стойкостью обладает и пластбетон, в котором в качестве связующего материала (вместо цемента) применяются различные смолы.

Однако такие бетоны обладают повышенной пластичностью, в связи с чем их рационально применять в качестве защитных покрытий обычных бетонов. Поэтому в конструкциях, предназначенных для эксплуатации в кислых средах, должны применяться химически стойкие бетоны, либо защитные покрытия из полимерных бетонов или материалов.

Исследования показали, что прочность приклеивания покрытий из полимерных материалов всех разновидностей к бетону превышает разрывную прочность самого бетона; в среднем она составляет 40 кг/см². При попытках оторвать такие покрытия от бетона разрушение во всех случаях протекало по телу бетона в виде глубоких взрывов-воронок.

Высокая химическая стойкость синтетических материалов общеизвестна, что касается их водонепроницаемости, то испытания показали, что при толщине в 1 мм покрытия (полиэфирные, эпоксиодно-битумно-дегтевые и др.) обеспечивают водонепроницаемость бетона при давлении до 25 ат.

Как всякий камень, бетон хорошо работает на сжатие и плохо сопротивляется растяжению. Прочность бетона при растяжении составляет $\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{15}$ его прочности при сжатии и в большинстве случаев не может быть использована, так как при твердении бетона возникают собственные напряжения, в значительной мере поглощающие способность бетона противостоять растягивающим напряжениям.

Стальная арматура предназначается главным образом для восприятия всех растягивающих усилий в железобетонных конструкциях. Совместная работа стали и бетона, сопротивляющихся внешним воздействиям как единое монолитное тело, оказалась возможной, благодаря следующим факторам:

а) значительному сцеплению между бетоном и сталью, препятствующему скольжению арматуры в бетоне;

б) почти одинаковым коэффициентам линейного температурного расширения: для стали $\alpha = 0,000012$, для бетона в среднем $\alpha = 0,00001$;

в) отсутствию коррозии арматуры в бетоне, благодаря щелочной среде, если раскрытие трещин в конструкции не превышает 0,5—0,7 мм.

В процессе твердения бетон уменьшается в объеме, т. е. происходит его усадка. При твердении бетона в воде происходит увеличение его объема — разбухание.

Коэффициент линейной усадки бетона в среднем может быть принят равным 0,00015, или 0,15 мм на 1 пог. м, что эквивалентно понижению температуры на 15°.

Коэффициент линейного разбухания в несколько раз меньше коэффициента линейной усадки.

Указанные коэффициенты определяются в соответствии со «Строительными нормами и правилами» в зависимости от массивности конструкции, температурно-влажной среды и других факторов.

В железобетонных конструкциях деформации усадки значительно меньше указанных величин (до 2 раз). Наиболее интенсивно усадка проявляется в первые недели твердения бетона, на которые и падает основная доля от общей усадки. В железобетоне вследствие наличия разнородных материалов (сталь, бетон) и внутренней статической неопределенности системы усадка вызывает собственные или начальные напряжения: в арматуре — сжимающие, а в бетоне — растягивающие.

В массивных железобетонных конструкциях при несимметричном расположении арматуры или металлических деталей следует опасаться искривления элементов вследствие неравномерных напряжений от усадки бетона. Усадка бетона может быть в значительной мере уменьшена путем увеличения плотности бетона, повышения качества заполнителей и цемента и др.

При длительном действии нагрузки в бетоне развиваются пластические деформации, т. е. происходит так называемая ползучесть бетона.

Пластические деформации, как правило, в 1,5—2 раза превосходят упругие (деформации, соответствующие лишь кратковременной нагрузке, при которой пластические деформации бетона отсутствуют). Наиболее интенсивный прирост деформаций наблюдается в первые 4—3 месяца.

Ползучесть бетона затухает лишь в течение 3—4 лет.

Изучение ползучести бетона позволило установить влияние на нее отдельных факторов и выявить зависимости для определения деформаций ползучести за любой отрезок времени действия постоянной нагрузки.

Если в стальных конструкциях, выполняемых из однородных изотропных материалов, сечения могут намечаться по максимальным напряжениям, независимо от их знака, то при расчете железобетонных конструкций необходимо более точное определение действительного напряженного состояния конструкции.

Напряженное состояние любой системы из железобетона в зависимости от величины нагрузки и длительности ее действия может меняться как в количественном, так и в качественном отношении.

Процесс изменения напряженного состояния для наглядности рассмотрим на двух простейших видах деформации железобетонных элементов, а именно: для центрального сжатия и чистого изгиба.

Рассмотрим короткий железобетонный элемент, который при действии осевого сжатия не испытывает продольного изгиба.

Элемент армирован продольными стержнями, связанными между собой в поперечном направлении хомутами для предотвращения выпучивания продольных стержней при нагрузке, приближающейся к разрушающей. При действии на него осевого усилия N , возрастающего от нуля до N_p (разрушающего усилия), в любом поперечном сечении соблюдается равновесие между приложенным усилием и внутренними усилиями в бетоне и стали.

Это условие равновесия выражается следующей формулой:

$$N = N_b + N_a = \sigma_b F_b + \sigma_a F_a,$$

где $N_b = \sigma_b F_b$ — осевое усилие, воспринимаемое бетоном;

$N_a = \sigma_a F_a$ — осевое усилие, воспринимаемое продольными стержнями арматуры.

Вследствие монолитной связи между арматурой и бетоном оба материала деформируются одинаково. Выше уже указывалось, что при длительном напряженном состоянии в бетоне проявляется ползучесть. Это приводит к перераспределению общего усилия N , действующего на элемент, между двумя материалами, а именно — к увеличению усилия в арматуре $\sigma_a F_a$ и ее напряжения σ_a за счет

некоторого уменьшения усилия в бетоне $\sigma_b F_b$ и соответственно напряжения σ_b .

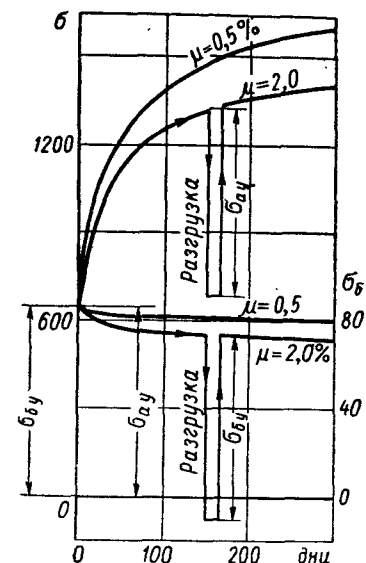
Такое перераспределение усилий между бетоном и арматурой в результате развития пластических деформаций в бетоне при увеличении нагрузки будет происходить до тех пор, пока напряжения в арматуре не достигнут предела текучести.

На фиг. 1 показаны кривые изменения во времени напряжений в бетоне и арматуре при длительной выдержке под нагрузкой железобетонных призм. В первый период после нагружения призм вследствие ползучести бетона напряжения в нем уменьшаются, а в арматуре увеличиваются. После некоторого периода времени (около 150 дней) напряжения стабилизируются. Для призм из бетона марки «500» при армировании $\mu = 0,5\%$ напряжения в арматуре возрастают более, чем в 2,5 раза по сравнению с начальными.

При мгновенной разгрузке бетон и арматура деформируются упруго, а напряжения материалов равны начальным по величине и обратны им по знаку. Поэтому после разгрузки железобетонная призма остается в напряженном (внутренне уравновешенном) состоянии — арматура сжата, а бетон растянут. Если при этом остаточные растягивающие напряжения в бетоне $\sigma_{br} > R_p$, то в бетоне появляются трещины. При повторном загрузении до той же нагрузки напряжения в бетоне и арматуре будут равны напряжениям при первом загрузении.

Дальнейшее увеличение нагрузки (после того как напряжения в арматуре достигнут предела текучести и, следовательно, остаются постоянными) будет приводить к увеличению напряжений в бетоне до исчерпания его прочности на сжатие. Следовательно, если путем увеличения нагрузки довести железобетонный элемент до разрушения, то разрушающая нагрузка будет равна сумме прочностей бетонного сечения и продольной арматуры. Это известное положение, проверенное многочисленными опытами, принято нормами проектирования железобетонных конструкций.

Опытами также установлено, что предельная сжимаемость армированного бетона ε_b при отсутствии наружной облоймы колеблется в пределах 1,5—3‰, или 1,5—3 мм на 1 пог. м. Следовательно, даже при $\varepsilon_b = 1,5\text{‰}$ напряжения в арматуре равны

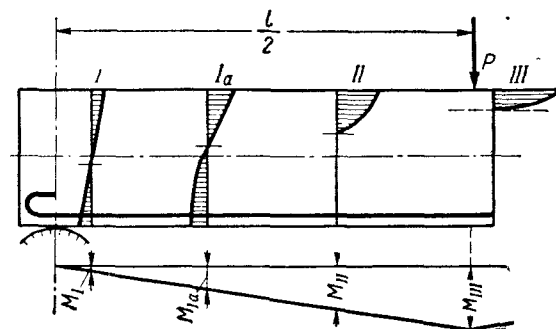


Фиг. 1. Изменение напряжений в арматуре и бетоне вследствие ползучести бетона.

$\sigma_a = E_a \varepsilon_a = 2\,100\,000 \cdot 0,0015 = 3150 \text{ кг/см}^2$, что соответствует пределу текучести высокопрочной арматурной стали.

Работу железобетона при изгибе можно проследить на балке, нагруженной сосредоточенным грузом посередине пролета (фиг. 2). При этом можно различить три характерные стадии напряженно деформированного состояния.

В сечениях близ опоры (сечение I), где изгибающие моменты незначительны, а следовательно, малы и величины деформаций бетона, с достаточной точностью можно считать, что железобетон подчиняется закону Гука, и эпюра напряжений близка к эпюре в идеально упругом теле. Однако постоянный модуль упругости,



Фиг. 2. Стадии работы бетона в различных сечениях железобетонной балки.

мало отличающийся для сжатого и растянутого бетона, может быть принят лишь при относительно небольших напряжениях.

В более напряженных сечениях балки разница в величине модулей упругости сжатого и растянутого бетона становится более значительной. Напряжения в бетоне растянутой зоны быстро приближаются к пределу прочности при растяжении, и эпюра напряжений становится криволинейной в связи с пластическими деформациями, принимая вид, указанный в сечении Ia. В сжатой зоне бетон испытывает преимущественно упругие деформации.

По истечении сопротивления растянутого бетона в нижней зоне образуются трещины, вначале невидимые простым глазом, а затем все более раскрывающиеся. Бетон растянутой зоны из работы выключается, и все растягивающие усилия воспринимаются лишь арматурой. Эта стадия охватывает весьма большую область напряженного состояния балки. Эпюра напряжений в сжатой зоне бетона, в связи с развитием ползучести бетона, резко отличается от треугольной и приближается к гиперболической (сечение II).

Обычно при достижении арматурой предела текучести напряжения в сжатом бетоне еще не достигают предела прочности. Дальнейшая картина разрушения характеризуется тем, что при

увеличении изгибающего момента трещины в растянутой зоне вследствие текучести арматуры резко раскрываются, причем сжатая зона сокращается (сечение III), и, в конечном счете, напряжения в бетоне достигают предела прочности на сжатие.

Таким образом, при разрушении железобетонной балки от изгиба в растянутой зоне напряжения в арматуре соответствуют пределу текучести, и в сжатой зоне — пределу прочности бетона. Это положение, как и вся стадия III, принято в основу расчета прочности железобетонных конструкций по предельным состояниям. В обычных изгибаемых железобетонных конструкциях считается нормальным образование трещин в растянутой зоне элемента при нагрузке, как правило, меньше эксплуатационной.

Сопротивление бетона растяжению расчетом на прочность обычно не учитывается, так как оно мало. По этим же причинам трещины в бетоне возникают при небольших напряжениях в арматуре.

В среднем предельная растяжимость бетона равна $0,15 \text{ мм/м}$, а напряжения в арматуре перед появлением трещин в бетоне, следовательно, равны всего $\frac{0,15}{1000} \cdot 2,1 \cdot 10^6 = 300 \text{ кг/см}^2$.

Действующими нормами регламентируется ширина раскрытия трещин для элементов, находящихся в неблагоприятных эксплуатационных условиях. Она должна быть не более $0,3 \text{ мм}$, а в элементах, находящихся под давлением жидкости, в зависимости от напряженного состояния, ширина раскрытия трещин должна быть не более $0,1—0,2 \text{ мм}$. Для того чтобы можно было эффективно использовать высокопрочные стали и при этом не допустить образования или большого раскрытия трещин в растянутых зонах железобетонного элемента, применяется предварительное напряжение.

Предварительно напряженный железобетон

Железобетонными предварительно напряженными называются такие конструкции, детали, изделия и элементы, в которых предварительно, т. е. в процессе изготовления, искусственно создаются собственные напряжения сжатия всего или части бетона при растяжении арматуры. Предварительное напряжение железобетонных конструкций производится в целях снижения расхода бетона и стали, увеличения сопротивления конструкций образованию трещин в бетоне и ограничения их раскрытия, повышения выносливости конструкций, работающих под воздействием многократно повторяющихся нагрузок.

Одно из самых важных преимуществ предварительно напряженных конструкций по сравнению с обычными железобетонными конструкциями заключается в их увеличенной жесткости, так как при эксплуатационных нагрузках они всегда работают без трещин.

Деформации предварительно напряженных железобетонных конструкций, а также ненапряженных конструкций, в которых появление трещин маловероятно, определяются как для сплошного упругого тела с учетом работы бетона сжатой и растянутой зоны. При этом в расчет вводят полное приведенное сечение элемента, т. е. полное сечение бетона, а также сечение всей продольной арматуры, умноженной на отношение модулей упругости арматуры и бетона (коэффициент приведения).

В этих случаях жесткость элементов при кратковременном действии нагрузки определяется по формуле

$$B_k = 0,85 E_b^H J_{bn},$$

где E_b^H — начальный модуль упругости бетона, соответствующий его проектной марке (для бетонов марок «400»—«600» $E_b^H = 350\,000—400\,000 \text{ кг/см}^2$);

J_{bn} — момент инерции приведенного поперечного сечения элемента с учетом всей продольной арматуры.

Начальный модуль упругости бетона соответствует лишь кратковременному нагружению образца.

При длительном действии нагрузки в связи с развитием пластических деформаций модуль полных деформаций бетона становится переменной величиной, изменяющейся в зависимости от марки и состава бетона, величины напряжения, влажности среды, длительности действия нагрузки и т. п.

Действие на железобетон многократно повторяющихся нагрузок

При воздействии повторной нагрузки в бетоне происходит накопление остаточных деформаций, которые развиваются примерно так же, как и деформации от длительного приложения нагрузки, но со значительно большей скоростью. Эти свойства бетона имеют существенное влияние на работу конструкций под нагрузкой и учитываются при проектировании железобетонных конструкций и особенно предварительно напряженных.

Бетон, как и другие материалы, под действием многократно повторяющейся нагрузки разрушается при величине напряжений, меньшей чем предел прочности материала при однократном статическом его нагружении. В связи с этим при расчетах на выносливость условные расчетные сопротивления бетона при характеристике амплитуды цикла нагрузки $0,1 < q < 0,6$ ($q = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$), где σ_{\min} и σ_{\max} — (наименьшие и наибольшие значения сжимающих напряжений) принимаются меньшими, чем условные расчетные сопротивления бетона на прочность при однократном нагружении. Экспериментально установлено, что при $q = 0$ предел выносливости бетона может снизиться до $1/2$ от условного расчетного сопротивления на прочность.

С увеличением коэффициента асимметрии цикла q увеличивается и предел выносливости бетона. При величине $q > 0,6$, согласно нормам, расчет элементов на выносливость может не производиться. Если повторные нагрузки вызывают переменные напряжения, не превышающие абсолютных пределов выносливости бетона, т. е. границы трещинообразования R_T^{\min} , то прочностные свойства бетона не изменяются при сколь угодно большом числе повторений нагрузок, так как при этом никаких структурных изменений в бетоне не происходит.

При расчете железобетонных конструкций на выносливость Строительными нормами и правилами, в зависимости от характеристики цикла напряжений в бетоне q , предусматривается снижение расчетных сопротивлений бетона. При этом, однако, учитывается, что со временем прочность бетона возрастает, в зависимости от марки, до 40%, поэтому минимальное значение снижающих коэффициентов равно 0,75.

Выносливость железобетонных конструкций при обычных процентах армирования лимитируется растянутой арматурой, а не сжатым бетоном. Многочисленные исследования прочности обычных ненапряженных железобетонных балок под воздействием многократно повторяющихся изгибающих нагрузок показали, что:

1. Многократно повторные нагрузки, если они вызывают напряжения ниже предела выносливости, не снижают статическую прочность железобетонных балок. Опыты показали, что, например, разрушающая нагрузка балок, прошедших 2 млн. циклов повторной нагрузки, близко совпадает со статической разрушающей нагрузкой балок, не подвергавшихся пульсации, и в некоторых случаях даже превышает ее.

2. Железобетонные балки, нагруженные повторными нагрузками, вызывающими напряжения ниже предела выносливости, выдержали при $q = 0,2$ без признаков разрушения более 5 млн. циклов нагружения, причем стабилизация деформаций (прогибов) в таких балках происходила примерно при 10 тыс. циклов нагружений.

3. Предел выносливости железобетонных балок в 1,5—2 раза ниже предела прочности при однократном статическом нагружении при числе повторений нагрузок 2—5 млн. раз.

Изучение предела выносливости предварительно напряженных железобетонных балок показало следующее:

1. Нагрузка, вызывающая разрушение от усталости, всегда выше нагрузки, вызывающей появление трещин. Таким образом, из-за усталости арматуры¹ разрушаются как бы обыкновенные железобетонные балки, но имеющие (благодаря предварительному напряжению) более высокий коэффициент асимметрии цикла q .

¹ В предварительно напряженных железобетонных балках разрушение от усталости также в большинстве случаев происходит из-за разрыва арматуры.

2. Если многократно повторяющаяся нагрузка меньше нагрузки, вызывающей раскрытие трещин, то сколько бы не было велико число нагружений, несущая способность не исчерпывается.

3. Балки, имеющие одинаковую несущую способность при статических нагрузках, имеют тем большую трещиностойкость и выносливость, чем выше величина натяжения арматуры. Отношение нагрузки, вызывающей разрушение от усталости, к статической разрушающей нагрузке в предварительно напряженных балках доходит до 0,8 на базе $2 \cdot 10^6$ циклов при $\rho = 0,15 \div 0,20$.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Людковский И. Г. Некоторые основные итоги исследований по применению железобетона в тяжелом машиностроении и прессостроении	16
Каранфилов Т. С., Волков Ю. С. Работа железобетонных конструкций на многократно повторную нагрузку	43
Гохбаум Ф. А. Применение метода начальных функций к расчету толстостенных и сплошных цилиндров	81
Браиловский М. И., Астрова Т. И. Экспериментальное исследование элементов железобетонных станин цилиндрической формы для кузнечно-прессовых машин и другого оборудования	266
Зоммер И. Э. Определение предварительного обжатия бетонного цилиндра при навивке напряженной многослойной спиральной обоймы	307
Хлебной Я. Ф. Применение вариационных методов к расчету элементов конструкций прессов	31
Окунев Г. Н. Экспериментальные и теоретические исследования напряженного состояния полудиска	340
Агаджанов В. И., Хлебной Я. Ф., Окунев Г. Н. и Фонов В. М. Железобетонная предварительно напряженная станина прессы усилием 600 т	361
Каранфилов Т. С. Железобетонная клеть прокатного стана «Кварто-200»	378
Каранфилов Т. С., Волков Ю. С. Железобетонная клеть прокатного стана, предварительно напряженная навивкой высокопрочной проволоки	408
Овчинникова И. Г. О прочности и жесткости соединения металлических закладных деталей с железобетонными станинами	425
Плотников Ф. А. Расчет железобетонных спиральных камер водяных турбин круглого сечения	440
Касабян Л. В. Приближенный расчет железобетонных спиральных камер высоконапорных ГЭС	458
Калатуров Б. А., Докудовский С. И. Железобетон в автоклавостроении	473
Людковский И. Г. Краткие сведения о железобетоне и основных его свойствах	493

2. Если
грузки, вы
велико чи
3. Бал
тических
и выноси
шение на
ческой ра
балках де

Редактор издательства П. В. Отдельнов
Технический редактор Т. Ф. Соколова
Корректор З. М. Пивоварова
Переплет и супер-обложка
художника В. Торгашева

Сдано в производство 14/IV 1964 г.
Подписано к печати 13/VIII 1964 г.
Т-11398 Тираж 3200 экз.
Печ. л. 31,75 (1 вклейка). Бум. л. 15,88.
Уч.-изд. л. 30. Формат 60×90¹/₁₆.
Зак. 1835.
Темплан 1964 г. № 142. Цена 1 р. 70 к.

Ленинградская типография № 6
Главполиграфпрома
Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати,
Ленинград, ул. Моисеенко, д. 10

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
6	Таблица, 1-я графа, 3-я сверху	Шинорезный	Шинпорезный
6	Таблица, 6-я графа головки	м ³	т

Поправка

В табл. 2 на стр. 6 вместо напечатанных цифр в графах 3—9,
1-я строка снизу, следует читать:

5,25	5,0	1,37	11,8	2,53	56,4	46,8
------	-----	------	------	------	------	------

«Применение железобетона в машиностроении». Зак. 1835.